This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

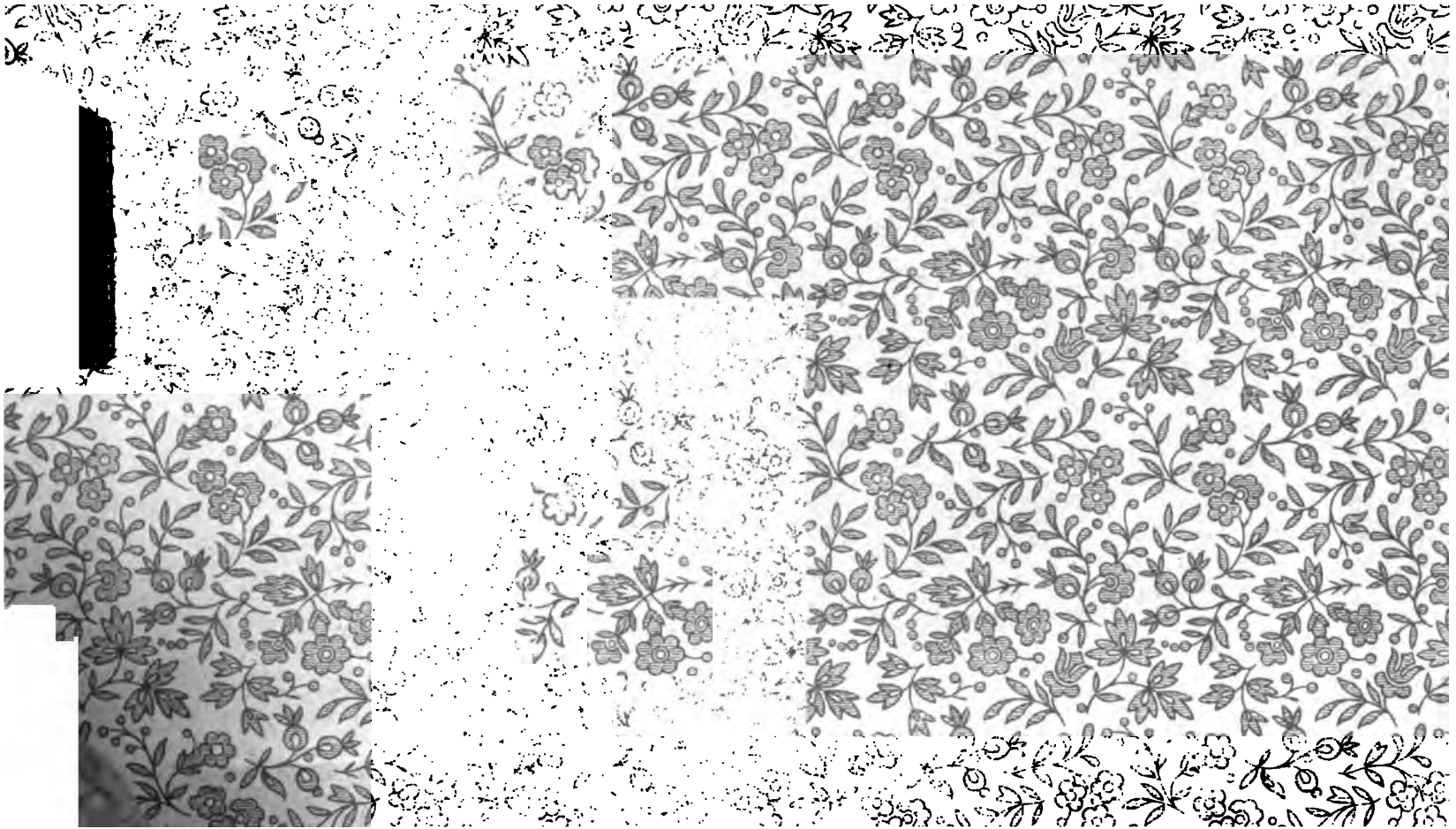
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Stanford University Libraries



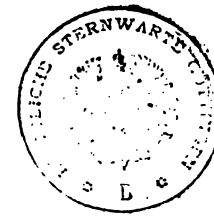
MATHEMATISCHE ANNALEN

HERAUSGEGEBEN

VON

A. CLEBSCH UND **C. NEUMANN**,
PROFESSOR IN GÖTTINGEN. PROFESSOR IN LEIPZIG.

DRITTER BAND.



LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1871.

LIBRARY OF THE
LELAND STANFORD JR. UNIVERSITY.
Q 28298

Inhalt des dritten Bandes.

(In alphabetischer Ordnung.)

Seite

Brill, in Darmstadt. Ueber die Doppelpunkte von Curven im Raume, deren Geschlecht Null ist 456

——— Ueber diejenigen Curven eines Büschels, welche eine gegebene Curve zweipunktig berühren 459

Cayley, in Cambridge. Note on the theory of Invariants 268

——— On the transformation of unicursal surfaces 469

——— On the deficiency of certain surfaces 526

Clebsch, in Göttingen. Ueber den Zusammenhang einer Classe von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen 45

——— Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit 238

——— Ueber die Bedeutung einer simultanen Invariante einer binären quadratischen und einer binären biquadratischen Form 263

——— Zur Theorie der binären algebraischen Formen 265

Geiser, in Zürich. Notiz über die algebraischen Minimumsflächen 530

Götting, in Torgau. Differentiation des Ausdrucks x^x, wenn x eine Function irgend einer unabhängig Veränderlichen bedeutet 276

Gordan, in Giessen. Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen 355

——— Ueber Curven dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten 631

Gundelfinger, in Tübingen. Bemerkung zur Auflösung der kubischen Gleichungen 272

Königsberger, in Heidelberg. Die linearen Transformationen der Hermite'schen φ-Function 1

Korndörfer, in Neumünster. Ueber diejenigen Raumcurven, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen . . . 415

——— Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelgeraden 496

Lommel, in Erlangen. Zur Theorie der Bessel'schen Functionen 475

Lüroth, in Carlsruhe. Eine Aufgabe über Kegelschnitte im Raume 124

Mayer, in Leipzig. Ueber die Jacobi-Hamilton'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung 435

Meissel, in Iserlohn. Berechnung der Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten Hundert Millionen natürlicher Zahlen vorkommen . . . 523

Meyer, in Memmingen. Notiz über zwei in der Würmetheorie auftretende bestimmte Integrale 157

Neumann, in Leipzig. Revision einiger allgemeiner Sätze aus der Theorie des Logarithmischen Potentials 325

Seite

Neumann, in Leipzig. Untersuchungen über die Bewegung eines Systemes starrer Körper 350

——— Revision einiger allgemeiner Sätze aus der Theorie des Newton'schen Potentiales 424

——— Ueber die Entwickelung einer Function nach Quadraten und Producten der Fourier-Bessel'schen Functionen 581

——— Notiz über die elliptischen und hyperelliptischen Integrale 611

Noether, in Heidelberg. Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen 161

——— Ueber die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen 547

Rosanes, in Breslau. Ueber algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung 535

Schläfli, in Bern. Einige Bemerkungen zu Herrn Neumann's Untersuchungen über die Bessel'schen Functionen 134

——— Ueber die Gauss'sche hypergeometrische Reihe 286

Schröder, in Pforzheim. Ueber iterirte Functionen 296

Spitzer, in Wien. Integration der linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} = Ax^2y'' + Bxy' + Cy,$$

in welcher n eine ganze positive Zahl und A, B, C constante Zahlen bezeichnen, mittelst bestimmter Integrale 453

Stahl, in Berlin. Zur Theorie der Krümmungslinien und der dreifachen Orthogonalsysteme 488

Sturm, in Bromberg. Ueber die Römische Fläche von Steiner 76

Weyr, in Prag. Erzeugung algebraischer Curven durch projectivische Involutionen 34

——— Construction der Hauptkrümmungshalbmesser und der Hauptkrümmungsrichtungen bei beliebigen Flächen 228

——— Ueber die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte . . . 235

Wiener, in Carlsruhe. Die mehrdeutige Beziehung zweier ebenen Gebilde auf einander 11

Zeuthen, à Copenhague. Nouvelle démonstration de théorèmes sur les séries de points correspondants sur deux courbes 150

——— Addition au mémoire sur les séries de points correspondants sur deux courbes 323

Die linearen Transformationen der Hermite'schen φ-Function.

Von Königsberger in Heidelberg.

Hermite hat zuerst auf die Wichtigkeit eines bestimmten, von Jacobi gefundenen Werthes von $\sqrt[4]{c}$ und $\sqrt[4]{c_1}$ für zahlentheoretische und algebraische Untersuchungen aufmerksam gemacht, wenn c^2 den Modul eines elliptischen Integrales und $c_1{}^2$ dessen Complement bedeutet, und diese Ausdrücke, wenn man mit τ den Modul der zugehörigen ϑ-Function bezeichnet und

$$q = e^{\pi i \tau}$$

setzt, folgendermaassen definirt:

$$(1) \quad \ldots . \varphi(\tau) = \sqrt[4]{c} = \sqrt{2} \cdot e^{\frac{\pi i \tau}{8}} \frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots..}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots..}$$

$$(2) \quad \ldots . \psi(\tau) = \sqrt[4]{c_1} = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots..}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots..}.$$

Für den Fall der linearen Transformation der elliptischen Functionen hat derselbe ferner die Werthe der den sechs Fundamentaltransformationen entsprechenden φ-Functionen bei Gelegenheit der Auflösung der Gleichung 5^{ten} Grades ohne Beweis mitgetheilt*) und ich habe in meiner Bearbeitung der Transformation der elliptischen Functionen**) den Beweis derjenigen vier Grundformeln, welche ich in der Theorie der Modulargleichungen brauchte, durchgeführt.

Da nun einerseits die Herleitung der allgemeinen dort angeführten Ausdrücke nicht ganz ohne Schwierigkeit ist, andererseits aber auch der von mir zum Beweise derselben eingeschlagene Weg zur Aufstellung all' der ähnlichen in die Theorie der elliptischen Transcendenten eintretenden Functionen, wie sie in der Theorie der (U, V)- und der Multiplicatorgleichungen vorkommen, ausreicht, so will ich mit Beziehung auf meine oben angeführte Schrift den Beweis dieser Formeln hier genauer entwickeln.

*) Hermite, sur la résolution de l'équation du cinquième degré.

**) Die Transformation, die Multiplication und die Modulargleichungen der elliptischen Functionen, Leipzig, Teubner 1868.

Ich habe gezeigt, dass, wenn man sämmtliche Lösungen der Gleichung:

$$a_0\, b_1 - a_1\, b_0 = 1 \tag{3}$$

nach dem Modul 2 in sechs Klassen theilt, mit c den gegebenen und mit k den durch die Transformation

$$\left\{\begin{aligned} C &= a_0\, a\, K + a_1\, a\, i\, K' \\ i\, C &= b_0\, a\, K + b_1\, a\, i\, K' \end{aligned}\right. \tag{4}$$

bestimmten Integralmodul bezeichnet, worin

$$C,\ C',\ K,\ K'$$

die in bekannter Weise definirten vollständigen Integrale bedeuten, so dass, wenn man mit τ und τ' die Moduln der zugehörigen ϑ-Functionen bezeichnet, die Relationen statthaben

$$\tau' = \frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}, \qquad \tau = \frac{b_0 + b_1\tau'}{a_0 + a_1\tau'}, \tag{5}$$

für die sechs linearen Transformationsfälle zwischen den Integralmoduln die folgenden Beziehungen existiren:

I. $a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 0,\ b_0 \equiv 0,\ b_1 \equiv 1 \pmod 2$

$$\sqrt{k} = e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{4}} \sqrt{c}, \qquad \sqrt{k_1} = e^{\frac{i\pi a_0 a_1}{4}} \sqrt{c_1} \tag{6}$$

II. $a_0 \equiv 0,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 0 \pmod 2$

$$\sqrt{k} = e^{\frac{-i\pi a_0 a_1}{4}} \sqrt{c_1}, \qquad \sqrt{k_1} = e^{\frac{-i\pi}{4}(a_0 a_1 + a_0 b_0 + a_1 b_1)} \sqrt{c} \tag{7}$$

III. $a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 0,\ b_1 \equiv 1 \pmod 2$

$$\sqrt{k} = e^{\frac{i\pi a_0 b_0}{4}} \frac{1}{\sqrt{c}}, \qquad \sqrt{k_1} = e^{\frac{i\pi}{4} a_0 (a_1 + b_0)} \sqrt{\frac{c_1}{c}} \tag{8}$$

IV. $a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 0 \pmod 2$

$$\sqrt{k} = e^{\frac{i\pi a_0 b_0}{4}} \sqrt{\frac{c_1}{c}}, \qquad \sqrt{k_1} = e^{\frac{i\pi}{4} a_0 (a_1 + b_0)} \frac{1}{\sqrt{c}} \tag{9}$$

V. $a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 0,\ b_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 1 \pmod 2$

$$\sqrt{k} = e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{4}} \sqrt{\frac{c}{c_1}}, \qquad \sqrt{k_1} = e^{\frac{i\pi a_0 a_1}{4}} \frac{1}{\sqrt{c_1}} \tag{10}$$

VI. $a_0 \equiv 0,\ a_1 \equiv 1,\ b_0 \equiv 1,\ b_1 \equiv 1 \pmod 2$

$$\sqrt{k} = e^{\frac{-i\pi a_0 a_1}{4}} \frac{1}{\sqrt{c_1}}, \qquad \sqrt{k_1} = e^{\frac{-i\pi}{4}(a_0 a_1 + a_0 b_0 + a_1 b_1 - 2 a_0 b_1)} \sqrt{\frac{c}{c_1}}, \tag{11}$$

und endlich finden mit Benutzung der obigen Definitionen für die φ- und ψ-Function die nachfolgenden Gleichungen statt:

$$\left\{\begin{aligned} &\varphi\left(-\tfrac{1}{\tau}\right) = \psi(\tau), && \psi\left(-\tfrac{1}{\tau}\right) = \varphi(\tau) \\ &\varphi(\tau + 1) = e^{\frac{i\pi}{8}} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)}, && \psi(\tau + 1) = \frac{1}{\psi(\tau)}; \end{aligned}\right. \tag{12}$$

es wird sich nunmehr darum handeln, die Werthe dieser φ-Function für die sechs oben angeführten Fälle der linearen Transformation herzuleiten.

Ich will zuerst zeigen, wie man jede lineare Transformation von der Form

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$$

durch die Anwendung einfacher linearer Transformationen, für welche die Ermittlung der φ-Function keiner Schwierigkeit unterliegt, auf die einfachste Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

zurückführt *).

Denkt man sich nämlich den rationalen Bruch $\frac{a_1}{a_0}$ so in einen Kettenbruch entwickelt, dass das erste Element desselben eine positive oder negative ganze Zahl oder Null ist, sämmtliche folgenden Theilnenner aber ganze positive Zahlen, die Theilzähler die positive Einheit sind und die Anzahl der Stellen des Kettenbruches eine ungerade ist (was stets zu erreichen, da, wenn es nicht der Fall sein sollte, statt des letzten Theilnenners z, der ≥ 2 ist, nur $z - 1 + \frac{1}{1}$ zu setzen ist), so mag $\frac{a_1}{a_0}$ die Form haben

$$\frac{a_1}{a_0} = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cdots + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t}}}}, \tag{13}$$

worin p positiv, Null oder negativ ist, je nachdem a_1 positiv und grösser als a_0, oder positiv und kleiner als a_0 oder endlich negativ ist **).

Betrachtet man nun vorläufig nur diejenigen Werthe von b_0 und b_1, welche durch den vorletzten Näherungswerth dieses Kettenbruches geliefert werden und daher auch der Gleichung

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

*) Der Satz von der Möglichkeit dieser Zurückführung ist, wenn auch in etwas anderer Form, als es im Folgenden geschieht, zuerst von Herrn Kronecker (Monatsberichte der Berliner Akademie 1860) ausgesprochen worden.

**) Man darf a_0 positiv voraussetzen, weil man im entgegengesetzten Falle nur für alle vier Transformationszahlen das Zeichen zu ändern hätte; ferner kann man die Fälle $a_1 = 0$, $a_0 = 0$ gleich von vornherein von der folgenden Betrachtung ausschliessen, da sich deren Transformationsausdrücke, wie später gezeigt wird, unmittelbar aus den Gleichungen (12) ergeben.

genügen, so werden sich, wenn man die Näherungswerthe des Kettenbruches folgendermaassen bezeichnet:

$$\frac{p}{1} = \frac{M_1}{N_1}$$
$$\frac{p\,q+1}{q} = \frac{M_2}{N_2}$$
$$\frac{r\,(p\,q+1)+p}{r\,q+1} = \frac{M_3}{N_3}$$

u. s. w., wie unmittelbar zu sehen, durch Zusammensetzung der einzelnen linearen Transformationen die nachfolgenden Gleichungen ergeben:

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -p \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & -a_0 p + a_1 \\ b_0 & -b_0 p + b_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 & -a_0 M_1 + a_1 N_1 \\ b_0 & -b_0 M_1 + b_1 N_1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_0 & -a_0 M_1 + a_1 N_1 \\ b_0 & -b_0 M_1 + b_1 N_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_0 + a_0 M_1 q - a_1 N_1 q & -a_0 M_1 + a_1 N_1 \\ b_0 + b_0 M_1 q - b_1 N_1 q & -b_0 M_1 + b_1 N_1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_0 M_2 - a_1 N_2 & -a_0 M_1 + a_1 N_1 \\ b_0 M_2 - b_1 N_2 & -b_0 M_1 + b_1 N_1 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_0 M_2 - a_1 N_2 & -a_0 M_1 + a_1 N_1 \\ b_0 M_2 - b_1 N_2 & -b_0 M_1 + b_1 N_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -r \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_0 M_2 - a_1 N_2 & -r\,(a_0 M_2 - a_1 N_2) - a_0 M_1 + a_1 N_1 \\ b_0 M_2 - b_1 N_2 & -r\,(b_0 M_2 - b_1 N_2) - b_0 M_1 + b_1 N_1 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} a_0 M_2 - a_1 N_2 & -a_0 M_3 + a_1 N_3 \\ b_0 M_2 - b_1 N_2 & -b_0 M_3 + b_1 N_3 \end{vmatrix},$$

u. s. w., und da die Anzahl der Elemente des Kettenbruches eine ungerade ist, so wird die zuletzt erhaltene Transformation die Form annehmen

$$\begin{vmatrix} a_0 M_{2k} - a_1 N_{2k} & -a_0 M_{2k+1} + a_1 N_{2k+1} \\ b_0 M_{2k} - b_1 N_{2k} & -b_0 M_{2k+1} + b_1 N_{2k+1} \end{vmatrix}$$

oder da der vorletzte Näherungswerth die Werthe b_0 und b_1 liefern soll,

$$\begin{vmatrix} a_0 b_1 - a_1 b_0 & -a_0 a_1 + a_1 a_0 \\ b_0 b_1 - b_1 b_0 & -b_0 a_1 + b_1 a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix},$$

somit die einfachste lineare Transformation, die eine Identität liefert*).

---

*) Ich bemerke, dass der obige Satz von der Reduction der Transformation

$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 \\ b_0 & b_1 \end{vmatrix}$ auf die einfachste Fundamentaltransformation $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$

bestehen bleibt, auch wenn b_0 und b_1 nicht jene durch den Zähler und Nenner des vorletzten Näherungsbruches gegebenen Werthe bedeuten; es geht nämlich das

Wird nun der Modul einer ϑ-Function mit t bezeichnet und eine Transformation von der Form

$$\begin{vmatrix} 1 & -p \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

auf denselben ausgeübt, so geht das transformirte φ, wie man leicht aus den folgenden, den Gleichungen (12) entnommenen Beziehungen

$$(14)\begin{cases} \varphi(\tau+2k) = e^{\frac{2ki\pi}{8}}\varphi(\tau), & \varphi(\tau+2k+1) = e^{\frac{(2k+1)i\pi}{8}}\frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} \\ \psi(\tau+2k) = \psi(\tau), & \psi(\tau+2k+1) = \frac{1}{\psi(\tau)} \end{cases}$$

ersieht, in

$$(15)\ \varphi\left(\frac{-t}{-pt-1}\right) = \psi\left(\frac{-pt-1}{t}\right) = \psi\left(-p-\frac{1}{t}\right) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{wenn } p \text{ gerade,} \\ \frac{1}{\varphi(t)}, & \text{wenn } p \text{ ungerade} \end{cases}$$

über; wendet man dagegen auf den Modul t die Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{vmatrix}$$

an, so ergiebt sich

$$(16)\quad \varphi\left(\frac{-q-t}{-1}\right) = \varphi(q+t) = \begin{cases} e^{\frac{qi\pi}{8}}\varphi(t), & \text{wenn } q \text{ gerade,} \\ e^{\frac{qi\pi}{8}}\cdot\frac{\varphi(t)}{\psi(t)}, & \text{wenn } q \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Gehen wir nunmehr zur Betrachtung des ersten Falles über, in welchem

$$a_0 \equiv 1,\ a_1 \equiv 0,\ b_0 \equiv 0,\ b_1 \equiv 1 \pmod 2$$

ist und unterwerfen $\frac{a_1}{a_0}$ der Bedingung, dass es sich in einen Kettenbruch von nur drei Elementen von der Form

---

letzte Transformationsschema, da die allgemeinen Werthe von b_0 und b_1 in der Form

$$b_0 = N_{2k} + ma_0, \qquad b_1 = M_{2k} + ma_1$$

dargestellt werden, in

$$\begin{vmatrix} a_0(b_1 - ma_1) - a_1(b_0 - ma_0) & -a_0 a_1 + a_1 a_0 \\ b_0(b_1 - ma_1) - b_1(b_0 - ma_0) & -b_0 a_1 + b_1 a_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix}$$

über, welche durch Anwendung der Transformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -m & 1 \end{vmatrix}$$

die Fundamentaltransformation

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

liefert. Wir behalten jedoch der Einfachheit wegen die obige Darstellung bei und werden später die Werthe von b_0 und b_1 verallgemeinern.

$$\frac{a_1}{a_0} = p + \frac{1}{q + \frac{1}{r}}$$

entwickeln lässt, so wird, wenn

$$\frac{b_0 - a_0 \tau}{a_1 \tau - b_1} = \tau'$$

gesetzt wird, weil

$$a_1 = r(pq + 1) + p \qquad b_1 = pq + 1$$
$$a_0 = rq + 1 \qquad b_0 = q$$

ist, q gerade sein müssen, während p und r zu gleicher Zeit gerade oder ungerade sind. Man ersieht nun aus den Gleichungen (15) und (16) unmittelbar, dass, wenn p und r gerade sind, die erste Transformation den Werth $\varphi(\tau')$, die zweite

$$e^{\frac{b_0 i\pi}{8}} \varphi(\tau'),$$

die dritte denselben Werth liefert, so dass

$$\varphi(\tau') = \varphi\left(\frac{b_0 - a_0 \tau}{a_1 \tau - b_1}\right) = e^{\frac{-b_0 i\pi}{8}} \varphi(\tau) \tag{17}$$

wird; sind dagegen p und r ungerade, so sind die der Reihe nach durch die drei Transformationen gelieferten Werthe der φ-Function die folgenden

$$\frac{1}{\varphi(\tau')}, \qquad e^{\frac{b_0 i\pi}{8}} \frac{1}{\varphi(\tau')}, \qquad e^{\frac{-b_0 i\pi}{8}} \varphi(\tau'),$$

so dass sich

$$\varphi(\tau') = \varphi\left(\frac{b_0 - a_0 \tau}{a_1 \tau - b_1}\right) = e^{\frac{b_0 i\pi}{8}} \varphi(\tau) \tag{18}$$

ergiebt.

Um nun für die Ausdrücke (17) und (18) eine gemeinsame Form zu erhalten, leitet man aus Gleichung (6), nämlich

$$\sqrt{k} = e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{4}} \sqrt{c},$$

durch Wurzelausziehung die folgende Gleichung ab:

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0 \tau}{a_1 \tau - b_1}\right) = \varepsilon\, e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{8}} \varphi(\tau), \tag{19}$$

worin ε die positive oder negative Einheit bedeutet; es ergiebt sich somit für den ersten Fall, in dem p und r gerade waren,

$$\varepsilon = e^{\frac{b_0 i\pi}{8}(a_0 - 1)},$$

und da die Congruenzen

$$b_0 \equiv a_0 + 1 \pmod 4 \text{ und } a_0 - 1 \equiv 0 \pmod 4$$
$$b_0 \equiv a_0 + 1 \pmod 2 \text{ und } a_0 - 1 \equiv 0 \pmod 8$$

zu gleicher Zeit stattfinden müssen, so folgt

$$\varepsilon = e^{\frac{a_0^2 - 1}{8} i\pi} = \left(\frac{2}{a_0}\right), \tag{20}$$

und ebenso im zweiten Falle, in welchem p und r ungerade sind:

$$\varepsilon = e^{\frac{b_0 i\pi}{8}(a_0+1)}$$

und daher wegen Bestehens der Congruenzen

$$a_0 + 1 \equiv 0 \pmod 4 \quad \text{und} \quad b_0 \equiv a_0 - 1 \pmod 4$$
$$a_0 + 1 \equiv 2 \pmod 4 \quad \text{und} \quad b_0 \equiv a_0 - 1 \pmod 8,$$

wiederum

$$\varepsilon = e^{\frac{a_0^2-1}{8} i\pi} = \left(\frac{2}{a_0}\right). \tag{21}$$

Wir erhalten somit für diejenigen a_0 und a_1, für welche die Kettenbruchsentwicklung von $\frac{a_1}{a_0}$ nur aus drei Gliedern besteht, wenn b_1 und b_0 den Zähler und Nenner des vorletzten Näherungsbruches bedeuten, und diese vier Zahlen zu dem ersten linearen Transformationsfall gehören, den Ausdruck

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{-i\pi}{8} a_0 b_0} \varphi(\tau), \tag{22}$$

und unter denselben Bedingungen für die fünf andern linearen Transformationen, wie unmittelbar zu sehen, die nachstehenden Beziehungen den Fällen (7) bis (11) entsprechend:

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{b_0}\right) e^{\frac{i\pi}{8} a_0 b_0} \psi(\tau) \tag{23}$$

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{i\pi}{8} a_0 b_0} \frac{1}{\varphi(\tau)} \tag{24}$$

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = e^{\frac{i\pi}{8} a_0 b_0} \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)} \tag{25}$$

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = e^{\frac{-i\pi}{8} a_0 b_0} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} \tag{26}$$

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{b_0}\right) e^{\frac{-i\pi}{8} a_0 b_0} \frac{1}{\psi(\tau)}. \tag{27}$$

Es soll nunmehr die Richtigkeit dieser Formeln für alle Werthe von a_0 und a_1 durch den Schluss von n auf $n+1$ nachgewiesen werden und zwar beschränke ich mich auch hierbei auf die Herleitung des Ausdruckes (22), indem die Behandlung der andern Fälle genau dieselbe bleibt.

Sei also zuerst für solche a_0, a_1, b_0, b_1, für welche

$$\frac{a_1}{a_0} = p + \frac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s}}}, \tag{28}$$

b_1 und b_0 den Zähler und Nenner des vorletzten Näherungsbruches

bedeuten und die Anzahl der Theilnenner eine ungerade ist, die zwischen den transformirten φ-Functionen stattfindende Relation, wenn jene vier Transformationszahlen zu dem ersten linearen Transformationsfall gehören, die folgende:

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\,\tau}{a_1\,\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{8}}\,\varphi(\tau),$$

so soll nachgewiesen werden, dass auch dieselbe Relation statthat für diejenigen Transformationszahlen a_0', a_1', b_0', b_1', für welche

$$\frac{a_1'}{a_0'} = p + \frac{1}{q+} \cdots + \frac{1}{r+} \frac{1}{s+} \frac{1}{t+} \frac{1}{u}, \tag{29}$$

b_1' und b_0' den Zähler und Nenner des vorletzten Näherungsbruches darstellen und übrigens auch den Bedingungen des ersten Transformationsfalles genügen. Es folgen nämlich aus der Vergleichung der beiden Kettenbrüche (28) und (29) unmittelbar die Beziehungen

$$\begin{aligned} b_1' &= t a_1 + b_1 & b_0' &= t a_0 + b_0 \\ a_1' &= u\,(t a_1 + b_1) + a_1 & a_0' &= u\,(t a_0 + b_0) + a_0, \end{aligned}$$

und es wird daher, da a_0 und b_1 der Voraussetzung nach ungerade, a_1 und b_0 gerade sind und die neu eintretenden Transformationszahlen ebenso beschaffen sein sollen, t und u gerade sein müssen, und die zur weiteren Reduction auf die einfachste lineare Substitution erforderlichen Transformationen

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -t & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & -u \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

werden somit bei Benutzung der Gleichung (22) den folgenden Ausdruck für die aus allen Transformationen resultirende φ-Function liefern:

$$\left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{t i\pi}{8} + \frac{a_0 b_0 i\pi}{8}}\,\varphi\left(\frac{b_0' - a_0'\,\tau}{a_1'\,\tau - b_1'}\right) = \varphi(\tau)$$

oder da

$$\frac{a_0' - a_0}{b_0'} = u \qquad \text{also} \qquad a_0 = a_0' - u b_0'$$

ist,

$$e^{\frac{a_0'^2 - 1}{8}\pi i}\, e^{\frac{i\pi a_0' b_0'}{8}}\, e^{\frac{C i\pi}{8}}\,\varphi\left(\frac{b_0' - a_0'\,\tau}{a_1'\,\tau - b_1'}\right) = \varphi(\tau),$$

worin

$$C = t - 2a_0' b_0' u + b_0'^2 u^2 - t a_0'^2 + 2 a_0' b_0' t u - b_0'^2 u - b_0'^2 t u^2 \equiv 0 \pmod{16},$$

und daher

$$\varphi\left(\frac{b_0' - a_0'\tau}{a_1'\tau - b_1'}\right) = \left(\frac{2}{a_0'}\right) e^{\frac{-i\pi a_0' b_0'}{8}} \varphi(\tau);$$

und zu demselben Resultate gelangt man, wenn man a_0, a_1, b_0, b_1 die den fünf andern Transformationsfällen entsprechenden Transformationszahlen bedeuten lässt, für welche die Richtigkeit der Gleichungen (23) bis (27) nachgewiesen ist, wenn nur a_0', a_1', b_0', b_1' in den ersten Transformationsfall gehören.

Nun können wir uns aber auch von der Beschränkung frei machen, dass b_1 und b_0 Zähler und Nenner des vorletzten Näherungswerthes des Kettenbruches $\frac{a_1}{a_0}$ sind. Setzt man nämlich in die Gleichung

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{8}} \varphi(\tau)$$

$\tau + 2k$ für τ, wobei k eine beliebige ganze Zahl bedeutet, so erhält man mit Benutzung der Gleichungen (14)

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0(\tau+2k)}{a_1(\tau+2k) - b_1}\right) = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{8}} \varphi(\tau+2k) = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{8} + \frac{2ki\pi}{8}} \varphi(\tau),$$

oder da

$$2k a_0^2 \equiv 2k \pmod{16}$$

ist,

$$\varphi\left(\frac{(b_0 - 2k a_0) - a_0\tau}{a_1\tau - (b_1 - 2k a_1)}\right) = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{-i\pi}{8} a_0(b_0 - 2k a_0)} \varphi(\tau)$$

d. h. aber

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{8}} \varphi(\tau)$$

für alle b_0 und b_1, welche der Gleichung

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1$$

genügen, da alle Werthe von b_0 und b_1, wenn sie dem ersten Transformationsfalle angehören sollen, in der Form enthalten sind

$$b_0 - 2k a_0 \qquad b_1 - 2k a_1,$$

vorausgesetzt, dass b_1 und b_0 selbst jene Zähler und Nenner des vorletzten Näherungsbruches $\frac{a_1}{a_0}$ bedeuten. Genau ebenso folgt die allgemeine Gültigkeit der Gleichungen (23) bis (27). Es bleibt somit nur noch die Frage zu erledigen, welche Form der Ausdruck für die transformirte φ-Function annimmt, wenn Zähler und Nenner des vorletzten Näherungsbruches von $\frac{a_1}{a_0}$ nicht in den ersten Transformationsfall gehören; unter dieser Annahme müssen jedoch die vier Transformationszahlen, da b_1 nicht gerade sein kann, den fünften Fall der linearen Transformationen ergeben und es wird daher für diese die Gleichung statthaben

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{8}} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} .$$

Wird nun hierin $\tau - (2k-1)$ statt τ gesetzt, so erhält man

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0[\tau-(2k-1)]}{a_1[\tau-(2k-1)] - b_1}\right) = e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{8}} \frac{\varphi[\tau-(2k-1)]}{\psi[\tau-(2k-1)]} = e^{\frac{-i\pi a_0 b_0}{8} - \frac{(2k-1)i\pi}{8}} \varphi(\tau)$$

oder da

$$-(2k-1) \equiv a_0^2 - 1 - (2k-1)\, a_0^2 \pmod{16},$$

$$\varphi\left(\frac{[b_0 + (2k-1)\, a_0] - a_0\tau}{a_1\tau - [b_1 + (2k-1)\, a_1]}\right) = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{-i\pi}{8} a_0[b_0 + (2k-1) a_0]} \varphi(\tau);$$

nun sind aber offenbar alle in der Form

$$b_0 + (2k-1)\, a_0 \quad , \quad b_1 + (2k-1)\, a_1$$

enthaltenen Zahlen sämmtliche Lösungen der Gleichung

$$a_0 b_1 - a_1 b_0 = 1,$$

welche dem ersten Transformationsfalle zugehören, und es ist somit die allgemeine Gültigkeit der Gleichung

$$\varphi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{a_0}\right) e^{\frac{-i\pi}{8} a_0 b_0} \varphi(\tau)$$

erwiesen, und dasselbe folgt für die übrigen Ausdrücke (23) bis (27).

Ich füge schliesslich noch die Transformationsformeln der ψ-Function bei, die aus den Gleichungen (22) bis (27) mit Hülfe der Formel

$$\varphi\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \psi(\tau)$$

unmittelbar abgeleitet werden können; sie lauten nach den oben näher bezeichneten Transformationsfällen geordnet folgendermaassen:

$$\psi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{b_1}\right) e^{\frac{i\pi}{8} a_1 b_1} \psi(\tau)$$

$$\psi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{a_1}\right) e^{\frac{-i\pi}{8} a_1 b_1} \varphi(\tau)$$

$$\psi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = e^{\frac{i\pi}{8} a_1 b_1} \frac{\psi(\tau)}{\varphi(\tau)}$$

$$\psi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{a_1}\right) e^{\frac{i\pi}{8} a_1 b_1} \frac{1}{\varphi(\tau)}$$

$$\psi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = \left(\frac{2}{b_1}\right) e^{\frac{-i\pi}{8} a_1 b_1} \frac{1}{\psi(\tau)}$$

$$\psi\left(\frac{b_0 - a_0\tau}{a_1\tau - b_1}\right) = e^{\frac{-i\pi}{8} a_1 b_1} \frac{\varphi(\tau)}{\psi(\tau)} .$$

Die mehrdeutige Beziehung zweier ebenen Gebilde aufeinander.

Von Chr. Wiener in Carlsruhe.

Die *eindeutige Beziehung* zweier ebenen Gebilde aufeinander, bei welcher einem Punkte der einen Ebene im Allgemeinen wiede nur ein Punkt der andern entspricht, bietet den einfachsten Fall in der Collineation, einer Verwandtschaft ersten Grades, bei welcher einer Geraden der einen Ebene wieder eine Gerade der andern entsprechend gegenübersteht. Daran schliesst sich, als zweiter Fall, die Verwandtschaft zweiten Grades an, bei welcher einer Geraden der einen Ebene ein Kegelschnitt der andern entspricht. Dieser Fall wurde von Steiner,*) Magnus,**) Seydewitz,***) Hirst,†) Reye,††) und Anderen behandelt. Cremona†††) dehnte die Theorie der eindeutigen Beziehung am weitesten aus, indem er einer Geraden in der einen Ebene eine Curve von beliebiger Ordnung in der andern Ebene entsprechen liess.

Was die Art anbelangt, auf welche die Punkte der beiden Ebenen aufeinander bezogen wurden, so ist es entweder die rein analytische — so bei Magnus —, oder es wurden projicirende Geraden nach gewissen Leitlinien gelegt, welche beide von einander getrennte Ebenen in entsprechenden Punkten schnitten — so von Steiner und Cremona in seiner ersten Abhandlung —, oder es wurden in einer Ebene zwei Punkte entsprechend genannt, welche auf demselben Strahle aus einem festen Punkte liegen und einander in Bezug auf einen festen Kegelschnitt harmonisch zugeordnet sind — so von Hirst —, oder es wurden die Punkte einer Fläche zweiter Ordnung von zwei verschie-

---

*) Systematische Entwicklung u. s. w. S. 251—295.

**) Crelle's Journal, Bd. VIII., 1832, S. 51—63.

***) Grunert's Archiv, Bd. VII., S. 113—148.

†) Proceedings of the royal society, 1865, S. 92—106.

††) Zeitschrift für Mathem. u. Physik, 11. Bd. S. 280—310.

†††) Memorie dell' Academie di Bologna. 2. serie, tom II., S. 621—630 und tom. V. S. 3—35.

denen Punkten derselben Fläche aus auf zwei Ebenen projicirt — so von Reye —, oder es wurden die Punkte jeder Ebene als Durchschnitte der Strahlen je zweier Strahlenbüschel betrachtet und die Punkte beider Ebenen durch Projectivität der Büschel aufeinander bezogen — so von Seydewitz —, oder es wurden die Curven eines Curvennetzes in der einen Ebene den gesammten Geraden in der anderen Ebene entsprechend gesetzt, das Netz aber durch Annahme von mehrfachen Punkten in der Basis so gebildet, dass zwei Curven desselben ausser in den Basispunkten nur noch einen Punkt gemein hatten, und dieser dann entsprechend genannt zu dem Schnittpunkte der Geraden in der anderen Ebene, welche jenen beiden Curven des Netzes entsprechen — so von Cremona in seiner zweiten Abhandlung —.

Im Folgenden beabsichtige ich eine *mehrdeutige Beziehung* zweier ebenen Gebilde aufeinander herzustellen und zu untersuchen, wobei jedem Punkte in der einen Ebene und allen ihm zugeordneten Punkten, die ein System bilden, ein eben solches bestimmtes System einander zugeordneter Punkte der andern Ebene entspricht. Ein System von Punkten soll als die Gesammtheit oder ein irgendwie begrenzter Theil der Schnittpunkte zweier Curven angesehen werden, wovon jede einem Curvenbüschel angehört. Die Schnittpunktsysteme der beiden Ebenen sollen aber dadurch aufeinander bezogen werden, dass durch Projectivität ein Entsprechen der Curven der Curvenbüschel in beiden Ebenen hergestellt wird.

Ein festes Punktsystem in einer Ebene.

1. *Ein System von n Punkten in einer Ebene*, welche zusammengehörig sind und einander *zugeordnet* oder *conjugirt* heissen sollen, kann als die Gesammtheit, oder als ein Theil der Schnittpunkte zweier Curven betrachtet werden.

Bilden sie die *Gesammtheit der Schnittpunkte*, so besteht, wenn p und q die Ordnung der einen und der andern Curve ausdrückt, die Bedingung

$$n = pq, \tag{1}$$

wobei n, p, q ganze positive Zahlen bedeuten. Wenn die n Punkte des Systems *willkürlich* gegeben sind, muss ausserdem die Bedingung erfüllt sein, dass n gleich oder kleiner ist, als die Anzahl der Punkte, welche eine Curve vom p^{ten} und eine vom q^{ten} Grade bestimmt, oder es muss

$$n \leqq \tfrac{1}{2} p\,(p+3) \quad \text{und} \quad n \leqq \tfrac{1}{2} q\,(q+3). \tag{2}$$

Um durch diese Ausdrücke die möglichen Fälle zu bestimmen, unterscheiden wir, ob p und q gleich oder ungleich sind. Für den Fall $p = q$

$= \sqrt{n}$ dürfen die n Punkte eine Curve der p^{ten} Ordnung nicht vollständig bestimmen, damit beide Curven nicht zusammenfallen und die Schnittpunkte nicht unbestimmt bleiben. Es muss daher

(3) $\quad n < \frac{1}{2} p\,(p+3), \quad$ wenn $\quad p = \sqrt{n}.$

Daraus folgt $\quad p^2 < \frac{1}{2} p\,(p+3)$

oder $\quad p < 3.$

Für den Fall, dass p und q ungleich, sei p die kleinere beider Zahlen. Es ist nach (2)

$$n \overline{\overline{<}} \frac{1}{2} p\,(p+3), \quad \text{wenn} \quad p < \sqrt{n}.$$

Daraus folgt wieder $\quad p^2 < \frac{1}{2} p\,(p+3)$

oder $\quad p < 3.$

Also in beiden Fällen muss $p < 3$, oder es kann nur $p = 2$ oder $p = 1$ sein. Weiter ergiebt sich aus (1) und (2)

$$pq \overline{\overline{<}} \frac{1}{2} p\,(p+3)$$

oder $\quad q \overline{\overline{<}} \frac{p+3}{2}.$

Daraus folgt für $\quad p = 2,\ q \overline{\overline{<}} \frac{5}{2},$

für $\quad p = 1,\ q \overline{\overline{<}} 2.$

Und da $q \overline{\overline{>}} p$, so ergeben sich nur folgende 3 möglichen Fälle:

$$\begin{aligned} &p = 2, \quad q = 2, \quad n = 4, \\ &p = 1, \quad q = 2, \quad n = 2, \\ &p = 1, \quad q = 1, \quad n = 1. \end{aligned}$$

Das heisst: *Damit n willkürliche Punkte in einer Ebene als die gesammten Schnittpunkte zweier Curven angesehen werden können, muss n einen der Werthe 1, 2, 4 besitzen.*

Sollen die n Punkte des Systems *nicht willkürlich* sein, so ergeben sie sich auf so viele Arten als die Schnittpunkte zweier Curven, als es Arten giebt, n in zwei ganzzahlige Factoren p und q zu zerlegen. Ist n eine Primzahl, so muss $p = 1$, $q = n$ werden, oder die Punkte müssen auf einer Geraden liegen.

Wird *nicht* gefordert, dass n Punkte die *sämmtlichen Schnittpunkte* beider Curven sind, so lege man durch die n Punkte eine Curve von der p^{ten} und eine von der q^{ten} Ordnung, welche aber auch für den Fall $p = q$ nicht zusammenfallen. Von ihren pq Schnittpunkten nehme man nun m aus, so dass $n = pq - m$ ist. p und q können dabei beliebig hohe Werthe annehmen, indem m mit ihnen wächst. Bei beweglichen Punktsystemen wird dieser Fall wichtig; es können dabei die m Punkte dadurch von den pq Schnittpunkten ausgenommen werden, entweder dass sie fest bleiben, oder dadurch, dass sie eine bezeichnete Curve beschreiben.

Ein veränderliches Punktsystem in einer Ebene.

2. Ein System von n Punkten in einer Ebene, welches als das Schnittpunktsystem zweier Curven bestimmt ist, ändert sich nach einem gewissen Gesetze, wenn sich die bestimmenden Curven nach einem gegebenen Gesetze ändern. Dieses letztere kann eindeutig oder mehrdeutig sein. Eindeutig ist es, wenn durch einen gegebenen Punkt des Systems die $n - 1$ zugeordneten Punkte eindeutig bestimmt sind; mehrdeutig, wenn zu jedem gegebenen Punkte mehrere Gruppen von $n - 1$ zugeordneten Punkten gehören. Wir wollen nur von eindeutiger Bestimmung sprechen und erreichen dieselbe, indem wir sowohl die Curven von der p^{ten}, als die von der q^{ten} Ordnung schon von vornherein so weit bestimmen, dass jede derselben durch die zugefügte Bedingung, sie solle durch einen gegebenen Punkt gehen, vollständig und eindeutig festgestellt wird. Um solches zu erreichen, mögen alle jene Curven von der p^{ten} Ordnung durch eine Anzahl gegebener fester Punkte gehen, welche um 1 kleiner ist, als zur Bestimmung nothwendig, d. i. durch $\frac{1}{2} p (p + 3) - 1$ Punkte; mit andern Worten, sie mögen ein *Curvenbüschel* p^{ter} Ordnung bilden. Desgleichen mögen die Curven von der q^{ten} Ordnung alle durch $\frac{1}{2} q (q + 3) - 1$ gegebene feste Punkte gehen, d. i. ein Curvenbüschel q^{ter} Ordnung bilden.

Die $\frac{1}{2} p (p + 3) - 1$ festen Punkte, durch welche alle Curven des Büschels p^{ter} Ordnung gehen, heissen die *Basis* dieses Büschels und mögen durch A bezeichnet sein. Zwei Curven des Büschels haben aber p^2 Punkte gemein, und es ist bekannt, dass auch die übrigen Curven des Büschels durch dieselben p^2 Punkte gehen. Daher wird die vollständige Basis durch p^2 Punkte gebildet, von denen $\frac{1}{2} p (p + 3) - 1$ willkürlich, die übrigen $\frac{1}{2} p (p - 3) + 1$ aber durch diese bestimmt sind. Durch jeden Punkt der Ebene, der nicht zur Basis gehört, geht eine, aber auch nur eine Curve des Büschels. Kommt ein zweites Curvenbüschel q^{ter} Ordnung mit der Basis B hinzu, so bestimmt eine beliebige Curve des ersten mit einer beliebigen des zweiten ein System von $n = pq$ *Schnittpunkten*. Die $n - 1$ Punkte, welche einem beliebigen Punkte D zugeordnet sind, liegen auf den durch D gehenden Curven beider Büschel.

Kommen in der Basis mehrfache Punkte vor, so beachte man, dass ein gegebener $k$facher Punkt ebenso bestimmend auf eine Curve wirkt, als $\frac{1}{2} k (k + 1)$ einfache Punkte. Es besteht daher für die Summe dieser Werthe, genommen über alle willkürlich gewählten Basispunkte, der Ausdruck

$$\Sigma \tfrac{1}{2} k (k + 1) = \tfrac{1}{2} p (p + 3) - 1.$$

Da ferner in einem $k$fachen Punkte der Basis zwei Curven k^2 Punkte

gemein haben, so besteht für die Summe der k^2 genommen über alle, nicht nur die willkürlich gewählten, Basispunkte der Ausdruck

$$\Sigma\, k^2 = p^2.$$

3. Ein besonderer Fall eines Punktsystemes tritt ein, wenn der beliebige Punkt D, zu dem die zugeordneten Punkte gesucht werden, in einen Punkt einer Basis fällt, z. B. in den Punkt A_1 der Basis A. Dann gehen alle Curven des Büschels A durch A_1, während die durch A_1 gehende Curve des Büschels B eine bestimmte b_1 ist. Alle Curven des Büschels A mit b_1 bestimmen aber alle Punkte der b_1, so dass *einem Punkte A_1 der einen Basis A alle Punkte derjenigen Curve b_1 des andern Büschels B zugeordnet sind, welche durch A_1 geht.* Dagegen sind einem bestimmten Punkte von b_1 nur bestimmte andre Punkte dieser Curve, zu denen stets A_1 gehört, zugeordnet.

Das durch einen Punkt D bestimmte Punktsystem wird zu einer ganzen Curve, wenn die durch D bestimmten Curven beider Büschel ganz zusammenfallen, wozu es nöthig ist, dass $p = q$ und dass jede durch D gehende Curve des einen Büschels auch durch alle Punkte der Basis des andern geht. In diesem Falle sind jedem Punkte dieser Curve alle andern derselben zugeordnet.

Fällt ein Punkt der einen Basis mit einem Punkte der andern zusammen, so ist das diesem Punkte zugehörende Punktsystem offenbar die ganze Ebene beider Büschel; und umgekehrt, zu dem Punktsysteme jedes Punktes der Ebene gehört der gemeinsame Punkt beider Basen.

4. Wenn das Punktsystem nicht aus allen Schnittpunkten zweier Curven besteht, also *n kleiner als pq ist*, so kann man die übrigen Schnittpunkte, deren Anzahl

$$m = pq - n \tag{4}$$

ist, dadurch bestimmt ausnehmen, dass man sie zu festen Schnittpunkten macht, sie also den beiden Basen angehören lässt.

Betrachten wir zuerst den Fall, in welchem die Curven in allen Punkten der Basen einfache Punkte besitzen, oder wie wir uns kürzer ausdrücken wollen — *alle Punkte der Basen einfach* sind, so ergiebt sich die Bedingung, dass m nicht grösser ist, als die Anzahl der Punkte derjenigen Basis, welche die geringere Punktezahl besitzt, oder welche zum Curvenbüschel der niederen Ordnung gehört. Hierdurch wird die Anzahl der Arten, auf welche man Systeme von n Punkten herstellen kann, beschränkt, und die Grenzen wollen wir feststellen, und zwar vorerst ohne die Bedingung, dass n Punkte eines Systems willkürlich angenommen werden dürfen.

Es können aber *p und q gleich* oder ungleich sein. Im ersteren Falle ist nach (4), indem $m \geqq 0$,

$$q = p \quad , \quad p^2 \geqq n. \tag{5}$$

Da in diesem Falle beide Basen gleich viele Punkte besitzen, aber sachgemäss nicht alle zusammenfallen dürfen, muss m oder $pq - n$ oder $p^2 - n$ kleiner als die Anzahl der willkürlichen Punkte der Basis sein; oder es gilt

$$p^2 - n < \tfrac{1}{2} p (p + 3) - 1 . \tag{6}$$

Löst man diese Ungleichung nach p auf, so erhält man

$$p < \tfrac{1}{2} (3 + \sqrt{8n + 1}).$$

Das negative Vorzeichen bei der Wurzelausziehung aus einer Ungleichung muss selbstverständlich wegbleiben.

Wir können daher die Ansätze (5) und (6) auch so schreiben:

$$q = p , \quad p \leqq \sqrt{n}, \tag{5a}$$

$$p < \tfrac{1}{2} (3 + \sqrt{8n + 1}) . \tag{6a}$$

Durch dieselben ist p für $p = q$ zwischen zwei Grenzen eingeschlossen. Den höchsten in (6a) zulässigen Werth wollen wir mit p_1 bezeichnen.

Im andern Falle, dass p *und* q *ungleich* sind, mag durch p der kleinere beider Werthe bezeichnet sein. Dann können alle Punkte der Basis des Curvenbüschels von der p^{ten} Ordnung mit Punkten der andern Basis zur Deckung gelangen, oder es kann m oder $pq - n \leqq \tfrac{1}{2} p (p + 3) - 1$ sein.

Es gelten dann die Ansätze

$$q > p , \quad pq \geqq n , \tag{7}$$

$$pq - n \leqq \tfrac{1}{2} p (p + 3) - 1 ; \tag{8}$$

oder

$$q > p , \quad q \geqq \frac{n}{p} , \tag{7a}$$

$$q \leqq \tfrac{1}{2} (p + 3) + \frac{n - 1}{p} . \tag{8a}$$

Wir wollen zuerst zeigen, dass die obere Grenze für p im Falle $p < q$ nicht höher als im Falle $p = q$, nämlich p_1. Setzen wir in (6) $p = p_1 + a$, worin a eine ganze positive Zahl, grösser als Null, so kann der Ungleichung nicht mehr Genüge geleistet werden, weil p_1 der grösste Werth von p ist, der ihr genügt. Es ergiebt sich daher

$$(p_1 + a) (p_1 + a) - n > \tfrac{1}{2} (p_1 + a) (p_1 + a + 3) - 1.$$

Setzt man andrerseits $p = p_1 + a$ in (8) ein, so wird $(p_1 + a) q - n < \tfrac{1}{2} (p_1 + a) (p_1 + a + 3) - 1$. Die Verbindung beider Ungleichungen liefert

$$q \leqq p_1 + a \quad \text{oder} \quad q \leqq p.$$

Es besteht aber schon die Bedingung $q > p$. Da sich beide widersprechen, so ist es unzulässig $p > p_1$ für den Fall $q > p$ zu nehmen.

Untersuchen wir sodann, ob mit dem Maximalwerthe p_1 von p ein q verbunden sein kann, das $> p_1$ oder ein $q = p_1 + b$, wobei

b eine positive ganze Zahl. Da p_1 der grösste zulässige Werth von p in (6), so genügt $p = p_1 + 1$ nicht mehr und es wird

$$(p_1 + 1)^2 - n \leqq \tfrac{1}{2}(p_1 + 1)(p_1 + 4) - 1 .$$

Ferner gilt, sobald wie hier p_1 und b positive Zahlen, stets

$$bp_1 - 2p_1 - 1 > -p_1 - 2 .$$

Die zwei letzten Ungleichungen addirt, liefern

$$p_1(p_1 + b) - n > \tfrac{1}{2} p_1(p_1 + 3) - 1 .$$

Setzt man andrerseits $p = p_1$ und $q = p_1 + b$ in (8) ein, so erhält man

$$p_1(p_1 + b) - n \leqq \tfrac{1}{2} p_1(p_1 + 3) - 1 .$$

Die beiden letzten Formeln widersprechen sich; es ist also unzulässig, mit dem grössten Werthe p_1 von p einen Werth von q zu verbinden, der grösser als p_1 ist.

Mit Werthen von p dagegen, die kleiner als p_1 sind, können Werthe von q, die grösser als p_1, verbunden sein.

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen und sagen:

Sollen n Punkte in einer Ebene als die beweglichen Schnittpunkte der Curven eines Curvenbüschels von der p^{ten} und eines von der q^{ten} Ordnung angesehen werden, welche nur einfache Punkte in den Basen besitzen, ist $p \leqq q$ und fallen m Paare von Punkten beider Basen zusammen, so sind die genannten Grössen durch die Ausdrücke (4, 5, 6, 7, 8) *begrenzt. Insbesondere kann p keinen grösseren Werth, als den in* (6) *oder* (6^a) *zulässigen p_1 erhalten, und der mit $p = p_1$ z_u verbindende grösste Werth von q ist $= p_1$. Nur für $p < p_1$ kann $q > p_1$ werden.*

Durch diese Grenzbedingungen stellen sich beispielsweise für $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ folgende einzigen Möglichkeiten heraus:

n	p	q	m
1	1	1	0
„	1	2	1
„	2	2	3
2	1	2	0
„	1	3	1
„	2	2	2
„	2	3	4
„	3	3	7
3	1	3	0
„	1	4	1
„	2	2	1
„	2	3	3
„	3	3	6

Die Fälle für $n = 1$ drücken aus, dass ein einfaches Punktsystem, wenn die Basen der Curvenbüschel einfache Punkte sind, nur auf 3 Arten hervorgebracht werden kann, nämlich 1) durch zwei Strahlenbüschel mit auseinander liegenden Basen; 2) durch ein Kegelschnittbüschel und ein Strahlenbüschel, dessen letztere Basis in einen der Basispunkte des erstern fällt; 3) durch zwei Kegelschnittbüschel, deren Basen drei Punkte gemein haben. Bei $n = 3$, wofür $p_1 = 3$, zeigt der Fall $p = 1$, $q = 4$, dass für $p < p_1$, $q > p_1$ werden kann.

Sollen die n Punkte eines Systems *willkürlich* angenommen werden dürfen, so muss durch sie eine Curve p^{ter} und eine q^{ter} Ordnung gelegt werden können. Ist $p < q$, so ist die letztre Bedingung erfüllt, wenn die erstre es ist. Daher ergiebt sich bei $p < q$ für die untre Grenze von p noch folgende Bedingung

$$\tfrac{1}{2} p (p + 3) \geqq n \qquad \text{oder} \qquad p \geqq \tfrac{1}{2} (-3 + \sqrt{8n + 9}).$$

Für $p = q$ dagegen darf eine Curve p^{ter} Ordnung durch die n Punkte nicht bestimmt sein, weil sonst die von der q^{ten} mit ihr zusammenfiele; es muss dann

$$\tfrac{1}{2} p (p + 3) - 1 \geqq n \qquad \text{oder} \qquad p \geqq \tfrac{1}{2} (-3 + \sqrt{8n + 17}).$$

5. *Die Vielfältigkeit der Arten, ein System von n veränderlichen Punkten durch zwei Curvenbüschel zu erzeugen, wird ins Unbegrenzte gesteigert, wenn man mehrfache Punkte in die Basen der Büschel legt.* Da ein gegebener $k$facher Punkt ebenso viele Bedingungen liefert als $\frac{1}{2} k (k + 1)$ gegebene einfache Punkte, durch welche eine Curve gehen soll, so muss die für alle willkürlich angenommenen einfachen oder mehrfachen Basispunkte gebildete Summe jener Ausdrücke in k der Anzahl der willkürlich angenommenen Basispunkte gleich sein, wenn diese alle nur einfache wären, oder es muss

$$\Sigma \tfrac{1}{2} k (k + 1) = \tfrac{1}{2} p (p + 3) - 1. \tag{9}$$

Wird dann durch l der Grad der Vielfachheit eines Punktes der Basis des andern Curvenbüschels ausgedrückt, so gilt ebenso

$$\Sigma \tfrac{1}{2} l (l + 1) = \tfrac{1}{2} q (q + 3) - 1. \tag{10}$$

Kommt nun ein $k$facher Punkt der ersten Basis mit einem $l$fachen der zweiten zur Deckung, so sind darin kl Schnittpunkte vereinigt, daher gilt, entsprechend der Gleichung (4)

$$m = \Sigma kl = pq - n. \tag{11}$$

Hierin erstreckt sich die Summe auf alle Punkte, welche beiden Basen zugleich angehören. Damit eine solche Deckung möglich ist, müssen im allgemeinen diese Punkte solche sein, welche wenigstens in der einen Basis willkürlich angenommen werden können. Zugleich ist die Anzahl der mehrfachen Punkte durch die betreffenden Sätze begrenzt. So kann bekanntlich eine Curve von p^{ter} Ordnung nicht

mehr als $\frac{1}{2}(p-1)(p-2)$ Doppelpunkte besitzen, oder eine solche mit einem $(p-1)$ fachen Punkte ausserdem keinen mehrfachen Punkt aufweisen.*) Es ist nun leicht nachzuweisen, dass für jedes beliebige n die p und q einer Grenze nicht unterworfen sind. Die Art der mehrfachen Punkte kann eine sehr mannichfaltige sein; führen wir jenen Nachweis für einen bestimmten Fall, so ist er überhaupt geführt. Es sei dies der Fall, in welchem die Basis des Curvenbüschels von der p^{ten} Ordnung einen $(p-1)$ fachen Punkt besitze, während die übrigen Punkte derselben einfach sind. Sei x die Anzahl der willkürlich anzunehmenden, so liefert die Gleichung (9)

$$\tfrac{1}{2}(p-1)p + x = \tfrac{1}{2}p(p+3) - 1,$$

oder

$$x = 2p - 1.$$

Die Basis des Curvenbüschels q^{ter} Ordnung besitze entsprechend einen $(q-1)$ fachen Punkt, so ist die Anzahl der übrigen einfachen Punkte derselben $2q-1$, oder grösser als die des erstern Büschels, wenn wir $q > p$ annehmen. Bringt man nun die beiden vielfachen Punkte und ausserdem ε Paare einfacher Punkte der Basen zur Deckung, so liefert die Gleichung (11)

$$(p-1)(q-1) + \varepsilon = pq - n,$$

oder

$$\varepsilon = p + q - 1 - n.$$

Da nun jedenfalls x solcher Paare möglich sind (im Allgemeinen noch mehr), so ist es zulässig zu setzen $x \geqq \varepsilon$ oder

$$2p - 1 \geqq p + q - 1 - n,$$

oder

$$n \geqq q - p.$$

Man überschreitet also nicht die Grenze der Zulässigkeit, wenn man p und q beliebig gross macht, dabei aber ihre Differenz nicht grösser als n werden lässt.

Für andre Arten von Deckungen vielfacher Punkte würde man ebenso die Möglichkeit der unbegrenzten Grösse von p und q erkannt haben.

In diesen Fällen können n zugeordnete Punkte stets *willkürlich* gegeben sein, indem man nur p und q so gross zu wählen hat, dass eine Curve jedes Büschels durch diese Punkte geht.

Als *Beispiel* sei der Fall angeführt, in welchem ein einfaches Punktsystem ($n=1$) durch zwei Curvenbüschel 3^{ter} Ordnung ($p=q=3$) erzeugt wird. Der willkürliche Theil der Basis jedes Büschels besitze einen Doppel- und 5 einfache Punkte ($k=l=2, 1, 1, 1, 1, 1$)

*) Salmon, treatise on the higher plane curves. 1852. S. 31.

und es sei ein Doppelpunkt der einen Basis je mit einem einfachen der andern und ausserdem die übrigen einfachen Punkte zur Deckung gebracht, so dass sich decken

$$k = 2\ ,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1$$
$$\text{mit } l = 1\ ,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1\ .$$

Daraus ergiebt sich

$$\begin{aligned}
&\Sigma \tfrac{1}{2} k\,(k+1) = 3+1+1+1+1+1 = 8,\\
&\Sigma \tfrac{1}{2} l\,(l+1) = 1+3+1+1+1+1 = 8,\\
&\Sigma kl = 2+2+1+1+1+1 = 8,\\
&\tfrac{1}{2} p\,(p+3) - 1 = \tfrac{1}{2} q\,(q+3) - 1 = 8,\\
&pq - n = 3\cdot 3 - 1 = 8.
\end{aligned}$$

Diese Werthe in die Gleichungen (9), (10), (11) eingesetzt, leisten denselben Genüge. Zugleich ist bei einer Curve 3^{ter} Ordnung ein Doppelpunkt, wie angenommen wurde, wirklich möglich.

Einer ganzen Reihe von Punkten oder einer Curve ist ein andre *Curve zugeordnet.* Dieselbe bedarf aber keiner besonderen Untersuchung, da sie später als besondre Art einer entsprechenden Curve erscheinen wird.

Mehrdeutige Beziehung zweier ebenen Gebilde aufeinander.

6. Sollen zwei ebene Gebilde α und α' mehrdeutig aufeinander bezogen werden, so wollen wir darunter verstehen, das Bildungsgesetz eines veränderlichen Systems von n Punkten in der Ebene α und dasjenige von n' Punkten in der Ebene α' festzustellen und beide derart miteinander zu verbinden, dass jedem Punkte in α und damit auch dem durch diesen Punkt bestimmten Systeme von n Punkten ein bestimmtes System von n' Punkten in α' und umgekehrt als entsprechend zugeschrieben wird.

Indem nun das System von n Punkten durch ein Curvenbüschel A von p^{ter} und eines B von q^{ter} Ordnung, und ebenso das System von n' Punkten durch ein Curvenbüschel A' von p'^{ter} und eines B' von q'^{ter} Ordnung festgestellt wird, muss, wenn die ganzen Punktsysteme eindeutig aufeinander bezogen werden sollen, eine eindeutige Beziehung der erzeugenden Curven angegeben werden. Dies geschieht, indem das Curvenbüschel A in α auf dasjenige A' in α' und B auf B' eindeutig durch *Projectivität* bezogen wird. Dabei können drei Curvenpaare von A und A' und drei solche von B und B', oder es können drei Paare von Punktsystemen, oder drei Paare von einzelnen Punkten in α und α' willkürlich als entsprechend angenommen werden; jedem vierten Punktsysteme in der einen Ebene entspricht dann ein einziges bestimmtes in der andern.

Zwei in der genannten Weise aufeinander bezogene ebene Systeme α und α' wollen wir mit $\alpha\ (Ap,\ Bq)$ und $\alpha'\ (A'p',\ B'q')$ bezeichnen.

7. *Einem Punkte A_1 der Basis A des einen Büschels in α entspricht diejenige Curve b_1' des Büschels B' in α', welche der durch A_1 gehenden Curve b_1 des Büschels B entspricht.* Denn durch A_1 geht die einzige Curve b_1 des Büschels B und alle Curven des Büschels A. Diesen entsprechen die einzige Curve b_1' des Büschels B' und alle Curven des Büschels A', welche durch ihre Schnitte alle Punkte der b_1' als dem A_1 entsprechend bestimmen. Das Uebereinstimmende gilt von den Punkten aller Basen.

Solche Curven, welche Punkten in der andern Ebene entsprechen, heissen *Hauptcurven*, und Punkte, denen Curven in der andern Ebene entsprechen, heissen *Hauptpunkte*. Die Basispunkte sind Hauptpunkte, jedoch, wie wir sogleich sehen werden, in manchen Fällen nicht die einzigen.

Kommen zwei Curven a_1 und b_1 der beiden Büschel A und B zur Deckung, wofür $p = q$ sein muss, und bezeichnen wir diese Doppelcurve mit c, so entspricht der c in α ein Punktsystem C' in α', welches der Durchschnitt der jenen Curven a_1 und b_1 entsprechenden Curven a_1' und b_1' ist. Da das Punktsystem C' einer Curve c entspricht, so *sind C' Hauptpunkte, wenn auch keine Basispunkte, und c ist eine Hauptcurve.*

Fällt ein Punkt einer Basis mit einem der andern in D zusammen, so gehen alle Curven beider Büschel durch D; diesen entsprechen alle Curven der Büschel A' und B', welche alle Punkte der Ebene α' als dem D entsprechend bestimmen. *Einem gemeinsamen Punkte D der beiden Basen entspricht daher die ganze andre Ebene.*

Entsprechen von Curven.

8. *Satz. Einer Curve d von der r^{ten} Ordnung in einem ebenen Gebilde $\alpha\ (Ap,\ Bq)$ entspricht in einem auf α bezogenen ebenen Gebilde $\alpha'\ (A'p', B'q')$ eine Curve d' von der $r\ (pq' + qp')^{\text{ten}}$ Ordnung.*

Beweis. Derselbe stützt sich auf den *Satz der Correspondenz von Chasles*,*) welcher so lautet: „Wenn man auf einer Geraden zwei Reihen von Punkten P und P' hat, derart, dass einem Punkte P, α Punkte P' entsprechen, und einem Punkte P', β Punkte P, so ist die Anzahl der Punkte P, welche mit entsprechenden P' zusammenfallen, gleich $\alpha + \beta$." Der entsprechende Satz gilt auch von zwei concentrischen Strahlenbüscheln in einer Ebene. Unter „Entsprechen" ist hier eine Abhängigkeit von einander durch *algebraische* Formeln oder durch Construction vermittelst *algebraischer* Curven verstanden.

*) Comptes rendus, t. 58, p. 1175 (1864).

In unserm Falle wähle man auf einer beliebigen Geraden in α' einen beliebigen Punkt und lege durch denselben eine Curve a'; derselben entspricht eine a, welche die d in rp Punkten schneidet. Durch jeden derselben geht ein b, und diesen rp Curven entsprechen ebenso viele b', welche die beliebige Gerade in $rp \,.\, q'$ Punkten schneiden. Somit entsprechen vermittelst d jedem Punkte einer a', rpq' Punkte von Curven b', und ebenso jedem Punkte einer b' auf jener Geraden rqp' Punkte von a'. Es decken sich daher nach dem Satze der Correspondenz $rpq' + rqp' = r(pq' + qp')$ Paare entsprechender Punkte; dieselben sind aber Punkte der d'. Daher drückt jene Zahl die Ordnung von d' aus.

9. *Satz. Geht eine Curve d in einem ebenen Gebilde α (Ap, Bq) durch Hauptpunkte, so zerfällt die in einem auf α bezogenen ebenen Gebilde α' $(A'p', B'q')$ ihr entsprechende Curve d' in Curven niedrer Ordnung; und zwar gehört für einen der d angehörigen $k$fachen Punkt A_1 der Basis A die $k$fach zu zählende entsprechende Hauptcurve b_1' als Bestandtheil der d' an, für einen solchen $l$fachen Punkt B_1 der Basis B die $l$fach zu zählende entsprechende Hauptcurve a_1', für einen Hauptpunkt C die entsprechende Hauptcurve c'.*

Beweis. Indem der laufende Punkt von d durch A_1 geht, nimmt b die durch A_1 gehende Lage b_1 und b' die entsprechende Lage der Hauptcurve b_1' ein. Die Curve a dagegen nimmt Lagen ein, deren Tangente in A_1, indem der laufende Punkt von d nach A_1 rückt, mit der Tangente von d zusammenfällt, dann unbestimmt ist, so dass ihr die Lage jeder durch A_1 gehenden Geraden zukommt, während sie bei dem Austritt des laufenden Punktes von d aus A_1 wieder mit der von d zusammenfällt. Wie oft sie jede dieser Lagen einnimmt, bleibt unbestimmt, wenn wir nicht d als die Grenzlage einer Curve betrachteten, welche ursprünglich nicht durch A_1 geht und dann stetig hineinrückt. Dann nimmt jene Tangente eine Drehung bis zur Umkehr ihrer Richtung vor, oder sie nimmt jede Lage einer durch A_1 gehenden Geraden einmal ein. Dabei wird aber, weil A_1 ein $k$facher Punkt von a ist und daher jeder Lage von a, k Tangenten in A_1 zukommen, jene Richtung der beweglichen Tangente nach und nach die Lagen der k Tangenten an jede a annehmen, wobei jedesmal die dadurch bestimmte a eine und dieselbe Lage einnimmt. Es wird daher die Curve a, k mal jede ihrer Lagen einnehmen, ebenso die entsprechende a', so dass die letztre k mal durch jeden Punkt der Ebene α', also auch k mal durch jeden Punkt der Hauptcurve b_1' geht. Daher entspricht dem A_1 die k mal gezählte Hauptcurve b_1' als Bestandtheil von d', und zählt als Curve von der $k.\ q'^{\text{ten}}$ Ordnung. — Bestimmt man nach dem Verfahren der vorigen Nummer die Ordnungszahl des Bestandtheiles von d', welcher der d mit Ausschluss des Punktes A_1 entspricht, so erhält man

$r(pq' + qp') - kq'$, was mit der obigen Ordnungszahl zusammen wieder $r(pq' + qp')$ für die gesammte Curve d' giebt, gemäss der vorigen Nr.

Ebenso entspricht einem $l$fachen Punkte B_1 von B, durch den d geht, die $l$fach zu zählende Hauptcurve a_1', als Curve der lp'^{ten} Ordnung.

Geht d durch einen Hauptpunkt C (Nr. 7), durch welchen also zwei Curven a und b gehen, deren entsprechende a' und b' in der Hauptcurve c' sich decken, so gehört c', dem C entsprechend, als Bestandtheil zu d', deren Ordnung im Ganzen nicht geändert wird. Die Eigenthümlichkeit, welche hier eintritt, ist nur die, dass auf der im Beweise der vorigen Nr. benutzten willkürlichen Geraden, auf der eine Reihe von Punktsystemen von je p' Schnittpunkten mit einer a' einer Reihe von Systemen von je q' Schnittpunkten mit einer b' entspricht, für $p' = q'$ alle p'' Punkte eines Systems der einen Reihe mit den q' $(= p')$ Punkten des entsprechenden Systemes der andern Reihe zusammenfallen, wodurch sich natürlich die Gesammtzahl der sich deckenden Paare entsprechender Punkte nicht ändert.

10. *Satz. Geht eine Curve d in einem ebenen Gebilde α (Ap, Bq) durch einen Punkt D, welcher ein $k$facher der Basis A und zugleich ein $l$facher der Basis B ist, so zerfällt die in einem auf α bezogenen ebenen Gebilde α' $(A'p', B'q')$ ihr entsprechende Curve d' in einen linearen Theil von der $[r(pq' + qp') - (kq' + lp')]^{\text{ten}}$ Ordnung und in die ganze Ebene α', welche als Bestandtheil von d' wie eine Curve von der $(kq' + lp')^{\text{ten}}$ Ordnung zählt.*

Beweis. Dem Punkte D der d entspricht nach Nr. 7 die ganze Ebene α', welche daher einen Bestandtheil der d' bildet. Die Ordnung des übrigen linearen Bestandtheils von d' ist dadurch erniedrigt; um aber die Ordnung der gesammten Curve d' nach Nr. 8 angeben zu können, kann man die Ebene α' wie eine Curve zählen, deren Ordnung durch die Zahl angegeben wird, um welche sich die Ordnungszahl des linearen Theiles von d' erniedrigt. Wir bestimmen die Ordnung dieses linearen Theils, der also der d mit Ausschluss von D entspricht, indem wir durch einen beliebigen Punkt einer beliebigen Geraden in α' eine a' legen; ihr entspricht eine a, welche d ausser in D in $rp - k$ Punkten schneidet. Durch diese gehen eben so viele b, denen eben so viele b' entsprechen, und diese schneiden jene Gerade in $(rp - k)q'$ Punkten. Andrerseits entsprechen auf jener Geraden einem Punkte einer b', $(rq - l)p'$ Punkte von a'. Daher kommen $(rp - k)q' + (rq - l)p' = r(pq' + qp') - (kq' + lp')$ Paare entsprechender Punkte zur Deckung, und dies ist die Ordnungszahl des linearen Theiles von d'. Die Ebene α' zählt daher wie eine Curve von der $(kq' + lp')^{\text{ten}}$ Ordnung.

Zusatz. Geht die Curve d ursprünglich nicht durch D und rückt dann durch stetige Verschiebung nach D, so besteht die Grenzgestalt der entsprechenden d' in zwei Curven, wovon die eine in obigem Satze als linearer Theil von d' bezeichnet wurde, während *der andre eine Curve von der* $(kq' + lp')^{\text{ten}}$ *Ordnung ist und allen unendlich nahen Punkten bei* D *entspricht.* Diese letztre Curve gehört jeder d' an, welche als Grenzgestalt der Entsprechenden irgend einer durch D gehenden d betrachtet wird, und sie ist von dem Grade und der Gestalt von d ganz unabhängig. Um dieselbe zu bestimmen, beachte man, dass hier, während der laufende Punkt von d durch D geht, die entsprechenden Curven a und b, welche durch jede Lage des laufenden Punktes zugleich gehen, gemeinschaftliche Tangentenrichtungen haben müssen. Man nehme nun in α' auf einer beliebigen Geraden einen beliebigen Punkt an, lege dadurch eine a'; ihr entspricht eine a, die in D, k Tangenten besitzt. Daher giebt es k entsprechende b, d. h. solche mit gemeinschaftlicher Tangente in D. Diesen entsprechen k Curven b', welche kq' Punkte auf jener Geraden bestimmen, die einem Punkte einer a' entsprechen. Ebenso entsprechen einem Punkte einer b', lp' Punkte einer a'. Daher giebt es $kq' + lp'$ Paare sich deckender entsprechender Punkte und so hoch ist auch der Grad der Curve, welche allen unendlich nahen Punkten bei D entspricht.

An die Stelle dieser Curve tritt die Ebene, wenn man d und d' nicht als eine Grenzlage betrachtet. Bei dem Hereinrücken von d nach D tritt dann eine Unterbrechung der Stetigkeit ein.

11. *Satz. Einer Curve* d *von der* r^{ten} *Ordnung in einem ebenen Gebilde* α (Ap, Bq) *entspricht in einem auf* α *bezogenen ebenen Gebilde* α' $(A'p', B'q')$ *eine Curve* d', *welche durch alle Hauptpunkte geht und dabei in einem* k'*fachen Punkte* A_1' *der Basis* A' *einen* $k'rq$*fachen Punkt besitzt, in einem* l'*fachen* B_1' *der Basis* B' *einen* $l'rp$*fachen, in einem Punkte* D', *der zugleich ein* k*facher der Basis* A' *und ein* l'*facher der Basis* B' *ist, einen* $r(k'q + l'p)$*fachen, und in einem Hauptpunkte* C' *einen* rp $(= rq)$*fachen.*

Die Tangenten an d' *in einem Punkte* A_1' *sind zugleich die Tangenten an diejenigen Curven* a' *in* A_1', *welche der durch* A_1' *gehenden* b_1' *vermittelst* d *entsprechen; in einem Punkte* B_1' *der Basis* B' *sind es die Tangenten an diejenigen Curven* b' *in* B_1', *welche der durch* B_1' *gehenden* a_1' *vermittelst* d *entsprechen; und in einem gemeinsamen Punkte* D' *beider Basen diejenigen Geraden, in welchen Paare von Tangenten an* a' *und* b', *die sich vermittelst* d *entsprechen, zur Deckung gelangen.*

Beweis. Der Erzeugenden b_1', welche durch A_1' geht, entspreche b_1. Dieselbe schneidet die d in rq Punkten, und durch diese gehen eben so viele a, welchen eben so viele a' entsprechen. Es sind dies die jener b_1' vermittelst d entsprechenden a'. Jede der a' hat in A_1'

einen k' fachen Punkt, wird also daselbst von b_1' in k' Punkten, alle a' daher in $k'rq$ Punkten geschnitten. Daher ist A_1' ein $k'rq$ facher Punkt von d'; und die $k'rq$ Tangenten an d' sind offenbar dieselben wie diejenigen an jene rq Curven a'.

Ein Punkt D' entspricht zunächst nach Nr. 7 der ganzen Ebene α, also jedem Punkte von d. Um aber zu bestimmen, wie oft die der d entsprechende Curve d' durch D' hindurchgeht, muss man untersuchen, wie oft der ausserhalb D' laufende Punkt der d' durch D' hindurchgeht, d. h. wie oft die sich auf Punkten von d' schneidenden Curven a' und b' einen dem D' unendlich nahen Punkt bestimmen, oder wie oft diese a' und b' gemeinschaftliche (reelle oder imaginäre) Tangenten in D' besitzen. Dieselben sind dann auch Tangenten an d'.

Nun bilden alle Tangenten an die Curven a' in D' ein Strahlenbüschel A_1' und alle Tangenten an die Curven b' in D' ein mit jenem concentrisches Strahlenbüschel B_1'. Zu jedem Strahle aus A_1' gehört eine einzige von ihm berührte Curve a'; dieser entspricht eine a, welche d in rp Punkten schneidet. Durch diese sind rp Curven b bestimmt, denen eben so viele Curven b' entsprechen; und diese bestimmen — da D' ein l' facher Punkt einer jeden b' ist — $l'rp$ Strahlen des Büschels B_1', welche vermittelst der Curve d dem erstgewählten Strahle aus A_1' entsprechen. Andererseits entsprechen vermittelst d einem Strahle aus B_1', $k'rq$ Strahlen aus A_1'. Daher haben nach dem Satze der Correspondenz (Nr. 8) beide Büschel $k'rq + l'rp = r(k'q + l'p)$ einander vermittelst d entsprechender Strahlen gemein. Ein eben so vielfacher Punkt der Curve d' ist D'.

Kommt für $p = q$ eine Curve a mit einer b in c zur Deckung, so entsprechen der c die Hauptpunkte C' (Nr. 7). Jeder derselben wird so oft von d' durchlaufen, als c von d geschnitten wird, nämlich $rp\ (= rq)$ mal. Ein so vielfacher Punkt von d' ist C'.

12. *Satz. Einer Curve d von der r^{ten} Ordnung in einem ebenen Gebilde α (Ap, Bq), welche durch einen Punkt D geht, der zugleich ein k facher der Basis A und ein l facher der Basis B ist, entspricht in einem auf α bezogenen ebenen Gebilde α' $(A'p', B'q')$ eine Curve d', deren linearer Theil in einem k' fachen Punkte der Basis A' einen $k'(rq - l)$ fachen, in einem l' fachen Punkte der Basis B' einen $l'(rp - k)$ fachen, und in einem Punkte, der zugleich k' facher von A' und l' facher von B' ist, einen $[r(k'q + l'p) - (k'l + l'k')]$ fachen Punkt besitzt.*

Beweis. Der Curve b', welche durch einen k' fachen Punkt der A' geht, entspricht die Curve b, welche d in rq Punkten schneidet. l dieser Punkte sind in D vereinigt, und diesen entspricht die Ebene α' (Nr. 7 und 10). Die übrigen $rq - l$ Schnittpunkte bestimmen eben

so viele Curven a, denen eben so viele a' entsprechen, und diese schneiden b' in jenem ihnen allen zugehörigen k' fachen Punkte der Basis A' zusammen in $k'(rq - l)$ Punkten. So viele Punkte besitzt daher auch der lineare Theil von d' in D'.

In einem zugleich k' fachen Punkte von A' und l' fachen von B' bestimmt eine Tangente an eine a' eine a'. Dieser entspricht eine a, welche die d ausser k mal in D noch $(rp - k)$ mal trifft und dadurch eben so viele Curven b bestimmt; diesen entsprechen eben so viele Curven b', welche in D', $l'(rp - k)$ Tangenten besitzen, die der gewählten Tangente an eine a' vermittelst d entsprechen. Ebenso entsprechen einer Tangente an eine b', $k'(rq - l)$ Tangenten an a'. Daher giebt es nach dem Satze der Correspondenz (Nr. 8) $l'(rp - k) + k'(rq - l) = r(k'q + l'p) - (k'l + l'k)$ Paare sich deckender Tangenten an Entsprechende a' und b', und da diese nach Nr. 12 auch Tangenten an d' sind, eben so viele an die d', welche in D' einen so vielfachen Punkt besitzt.

13. *Zwei ebene Systeme α und α' sind dann bestimmt auf einander bezogen*, wenn in α die Basen A und B und in α' die Basen A' und B' von Curvenbüscheln gegeben sind, sowie drei Paare sich entsprechender Curven der projectivischen Büschel A und A', und ebenso drei Paare der B und B'. Die letztre Bedingung wird auch erfüllt, wenn drei Punkte E, F, G in der einen Ebene und drei diesen entsprechende E', F', G' in der andern angenommen sind, derart dass E' zu demjenigen Punktsysteme in α' gehört, welches dem Punkte E in α entspricht, und ebenso bei F und G; jedoch mit der Rücksicht, dass keine 2 von den 3 Punkten in einer Ebene demselben Systeme angehören.

Soll ferner eine Curve d' bestimmt sein, welche einer solchen d von gegebener Ordnung r entspricht, so müssen ausser jener allgemeinen Beziehung der Ebenen auf einander zunächst $s = \frac{1}{2}r(r + 3)$ Punkte der d' gegeben werden. Diesen entsprechen nämlich eben so viele Punktsysteme in α, wovon jedes aus n Punkten besteht. Durch s Punkte, zu denen aus jedem der s Systeme einer gehört, ist dann die Curve d von der r^{ten} Ordnung bestimmt, und durch diese d' nach dem Gesetze der Beziehung. Es leuchtet nun ein, dass nur für $n = 1$ die s Punkte in α auf eine einzige Weise bestimmt sind; sonst aber ist dies auf mehrerlei Art möglich und die Anzahl der Weisen wird durch n^s ausgedrückt. Dann muss, damit d' bestimmt ist, eine der n^s möglichen Curven d, welcher d' entspricht, bezeichnet sein, etwa dadurch, dass ein weiterer Punkt dieser d und ihr entsprechender in α' als der d' angehörig bestimmt wird. Dieser Punkt in α' ist natürlich nicht beliebig, sondern der Bedingung unterworfen, dass sein entsprechender in α auf einer jener n^s möglichen Curven d liegt.

Will man die Projectivität der Curvenbüschel A und A', sowie der B und B' sogleich *durch angenommene Punkte der* d *und* d' *feststellen*, so kann dies nie durch weniger als drei Paare entsprechender Punkte geschehen. Ist d oder d' eine Gerade, so genügen drei Paare; die drei Punkte sind aber in α oder α' nicht willkürlich, sondern müssen auf einer Geraden liegen.

14. Unter der *mehrdeutigen Beziehung* zweier ebenen Gebilde ist die *eindeutige* als besonderer Fall einbegriffen. Das einfachste Beispiel wird gebildet, wenn man $p=q=p'=q'=1$ setzt, so dass $n=n'=1$ wird und einem $r=1$ ein $r'=2$, sowie einem $r'=1$ ein $r=2$ entspricht, d. h. einer Geraden in der einen Ebene ein Kegelschnitt in der andern. Es ist dann ein Strahlenbüschel A mit dem A', und ein Strahlenbüschel B mit dem B' projectivisch. Den zusammenfallenden Strahlen in $AB=c$ entspricht ein Hauptpunkt C', der Geraden $A'B'=c'$ ein Hauptpunkt C. Jede Curve d', die einer solchen d entspricht, geht durch die drei Hauptpunkte A', B', C', und jede d, die einer d' entspricht, durch die drei Hauptpunkte A, B, C. Wir verlassen diesen Fall, denn er ist von den in der Einleitung genannten Mathematikern als geometrische Verwandtschaft zweiten Grades oder als schiefe Projection oder unter einem anderen Namen untersucht worden.

Betrachten wir etwas näher den *einfachsten Fall einer wirklich mehrdeutigen Beziehung*. Es sei $p=q=1$, $p'=1$, $q'=2$, so ist $n=1$, $n'=2$; d. h. einem Punkte in α entsprechen zwei Punkte in α', und einem Punkte in α' entspricht ein Punkt in α. A und B sind Strahlenbüschel, deren Basen je ein Punkt bildet; A' ist ein Strahlenbüschel mit einem Punkte, B' ein Kegelschnittbüschel mit 4 Punkten in der Basis. Nach Nr. 7 entspricht nun dem Basispunkte A ein *Hauptkegelschnitt* b_1', nämlich derjenige, welcher dem Strahle $BA=b_1$ aus B entspricht; und dem Basispunkte B die *Hauptgerade* a_1', nämlich diejenige, welche dem Strahle $AB=a_1$ aus A entspricht. Da diese Strahlen a_1 und b_1 aber in $AB=c$ zusammenfallen, so tritt der besondre Fall der Nr. 7 ein, dass c eine Hauptgerade ist, welcher *Hauptpunkte* C' entsprechen, nämlich das Paar von Schnittpunkten des Hauptkegelschnittes b_1' mit der Hauptgeraden a_1'. Jede Curve d' in α', welche einer Curve d in α entspricht, geht durch 7 Hauptpunkte, nämlich durch A' (1 Punkt), B' (4 Punkte) und C' (2 Punkte). Diese 7 Punkte haben jedoch keine willkürliche Lage gegen einander, sondern die beiden C' liegen mit dem einen A' auf einer Geraden und mit den $4\,B'$ auf einem Kegelschnitte.

Ist $r=1$, so ist $r'=1\cdot 1+1\cdot 2=3$, d. h. *einer Geraden in* α *entspricht eine Curve dritter Ordnung in* α', welche durch 7 feste Punkte geht. Da die beiden Strahlenbüschel A und B, welche die Gerade d

erzeugen, projectivisch sind, so sind es auch das Strahlenbüschel A' und das Kegelschnittbüschel B' untereinander, und wir kommen dadurch auf diese bekannte Erzeugungsweise von Curven dritter Ordnung.*) Die Basispunkte A' und B' bestimmen sich aber nach Nr. 11 als einfache Punkte der Curve dritter Ordnung. Jedem Punkte E der Geraden d entspricht ein Punktepaar E' der Curve d', welches mit dem Punkte A_1 auf einer Geraden und mit den 4 Punkten B' auf einem Kegelschnitte liegt, so dass, wenn ein Punkt eines solchen Paares willkürlich angenommen wird, der andre dadurch bestimmt ist.

Einem Strahlenbüschel in α, dessen Mittelpunkt E, entspricht ein Curvenbüschel dritter Ordnung in α', dessen Basis durch die 9 Punkte der A', B', C' und E' gebildet wird. Jene 9 Punkte bestimmen also eine Curve dritter Ordnung nicht, was auch schon daran ersichtlich, dass man durch dieselben auf 2 Arten eine solche Curve legen kann, die in eine Gerade und einen Kegelschnitt zerfällt: 1) die Gerade $A'C'$, den Kegelschnitt $B'E'$ und 2) die Gerade $A'E'$, den Kegelschnitt $B'C'$. Wechselt der Punkt E, so wechselt das Punktepaar E', wie denn auch zwei verschiedene Curvenbüschel dritter Ordnung stets 2 Paare der Basispunkte verschieden und nur 7 Punkte gemeinschaftlich besitzen.

Einer bestimmten Geraden d in α, welche durch 2 Punkte E und F bestimmt ist, entspricht eine bestimmte Curve dritter Ordnung d' in α', welche ausser durch die 7 festen Punkte A', B', C' noch durch 2 Punktepaare E' und F'' bestimmt ist. Wird von jedem dieser beiden Punktepaare ein Punkt willkürlich angenommen, welche beide aber weder mit A' auf einer Geraden, noch mit B' auf einem Kegelschnitte liegen dürfen, so ist dadurch sowohl jeder zugeordnete Punkt, als auch die Curve dritter Ordnung d', als auch die ihr entsprechende Gerade d bestimmt.

Geht die Gerade d durch die Basis A, ist sie also ein Strahl a, so zerfällt d' in die entsprechende Gerade a' und in den Hauptkegelschnitt $b_1' = B'C'$. Geht d durch B, ist also ein Strahl b, so zerfällt d' in den dem b entsprechenden Kegelschnitt b' und in die Hauptgerade $a_1' = A'C'$. Geht d durch A und B, ist also die Hauptgerade $c = AB$, so zerfällt d' in die Hauptgerade $a_1' = A'C'$ und in den Hauptkegelschnitt $b_1' = B'C'$.

15. *Umgekehrt entspricht einer Geraden d' in α' eine Curve dritter Ordnung d in α* (Nr. 8). Dieselbe hat in A einen Doppelpunkt (Nr. 11), der 3 Bestimmungsstücke liefert. Jedem Strahle a entspricht vermit-

*) Ueber die Erzeugung von Curven durch projectivische Curvenbüschel niedrer Ordnung siehe: Essai sur la génération des courbes géométriques, par E. de Jonquières. Mémoire de l'académie des sciences. Tome 16.

telst d' ein Strahl b, es befindet sich daher auf demselben ausser dem Doppelpunkte noch ein Punkt von d. Dem Strahle b entsprechen vermittelst d' zwei Strahlen a, es befinden sich daher auf demselben ausser dem einfachen Punkte B noch 2 Punkte von d. Nimmt man einen Punkt E in α willkürlich als Punkt der d an, so ist dadurch in α ein Strahl aus A und einer aus B bestimmt, denen in α' ein Strahl aus A' und ein Kegelschnitt durch B' willkürlich als entsprechend zugewiesen werden kann, wenn — wie wir annehmen wollen — die Beziehung beider Ebenen nicht vorher durch drei Paare entsprechender Curven A und A' und dreier eben solcher B und B' festgestellt ist. Jener Strahl aus A' und der Kegelschnitt durch B' bestimmen zwei Punkte E', deren jeder dem E entspricht. Alle Curven dritter Ordnung durch die Punkte A, B, E, welche $3+1+1=5$ Bestimmungsstücke liefern, entsprechen daher einem der beiden Strahlenbüschel aus dem beiden Punkten E'. Nimmt man einen weiteren Punkt F von d willkürlich an, so sind dadurch zwei weitere zusammengehörige Strahlen aus A und B bestimmt, denen wieder ein beliebiger Strahl aus A' und ein beliebiger Kegelschnitt aus B' als entsprechend zugewiesen werden können; ihren beiden Durchschnittspunkten F' entspricht F. Jede Curve dritter Ordnung durch A, B, E, F entspricht nun einer der 4 Geraden, welche einen der beiden Punkte E' mit einem der beiden F' verbindet. Wählt man eine derselben als d' aus und nimmt auf ihr einen willkürlichen Punkt G' an, den man als den entsprechenden eines in α willkürlich als auf d gelegen angenommenen Punkt G ansieht, so ist jetzt die Curve dritter Ordnung bestimmt. Denn zunächst sind 2 mal 3 Paare von Curven der Büschel als entsprechend einander zugewiesen, also die Beziehung beider Ebenen festgestellt. Ferner schneidet die Gerade d' jeden der drei durch E', F', G' gehenden Kegelschnitte aus B' noch in einem zweiten Punkte E_1', F_1', G_1', wodurch die 3 entsprechenden Punkte E_1, F_1, G_1 von d bestimmt sind, die auf den Strahlen BE, BF, BG liegen. Von d' sind daher durch A 3 Bestimmungsstücke und durch B, E, F, G, E_1, F_1, G_1 deren 7, zusammen 10 gegeben, wodurch die Curve dritter Ordnung überschüssig bestimmt ist. Man bemerke aber, dass die Punkte nicht alle willkürlich gewählt wurden. Die willkürlich gewählten A, B, E, F, G enthalten $3+1+1+1+1=7$ Bestimmungsstücke und diese mit dem Bildungsgesetze stellen die Curve fest.

Zugeordnete Curven.

16. Die am Ende der Nr. 5 erwähnten zugeordneten Curven bedürfen keiner neuen Untersuchung, indem sie als besonderer Fall der entsprechenden Curven in aufeinander bezogenen ebenen Gebilden angesehen werden können. Man erhält nämlich in α die einem Punkte

D zugeordneten Punkte, wenn man von den Schnittpunkten der durch D gehenden erzeugenden Curven a und b den Punkt D selbst ausnimmt. Bezieht man nun α' auf α derart, dass die Curvenbüschel A' und A, sowie die B' und B unter einander congruent sind und beide dieselbe Lage gegeneinander besitzen, so kann man α' mit α derart zur Deckung bringen, dass die übereinstimmenden Basen sich decken, wodurch dann jeder Punkt D von einem Punkte des entsprechenden Punktsystems D' gedeckt wird. Einer Curve d entspricht dann eine solche d', welche aus d und ihrer *zugeordneten Curve*, die mit d_1 bezeichnet sein mag, besteht.

Durch unsre Annahme haben wir $p' = p$ und $q' = q$ gesetzt; ist daher d von der r^{ten} Ordnung, so ist nach Nr. 8 die Ordnung von d', $2rpq$, und daher die von $-d_1$, $r(2pq-1)$. *Die in einem ebenen Gebilde* α (Ap, Bq) *einer Curve* d *von der* r^{ten} *Ordnung zugeordnete Curve* d_1 *ist daher von der* $r(2pq-1)^{\text{ten}}$ *Ordnung.* Dieselbe zerfällt nach Nr. 9 und 10 in Curven von niedrer Ordnung, wenn d durch Punkte der Basen geht. Nach Nr. 11 und 12 geht d_1 durch alle Punkte der Basen A und B und besitzt in einem $k$fachen Punkte von A einen krq, und in einem $l$fachen von B einen lrpfachen Punkt.

Dadurch ist ein einfaches Mittel zur *Construction von Curven von beliebiger Ordnung* gegeben. Indem man einen der Schnittpunkte zweier Curven, wovon die eine einem Büschel p^{ter}, die andre einem solchen q^{ter} Ordnung angehört, auf einer Curve r^{ter} Ordnung hingleiten lässt, erzeugen die übrigen Schnittpunkte eine Curve von der r_1^{ten} Ordnung, wobei $r_1 = r(2pq-1)$. Soll z. B. $r_1 = 3$ werden, so kann man $p = 1$, $q = 2$, $r = 1$ setzen und erhält eine Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte in dem Mittelpunkte des Strahlenbüschels.

Anwendung auf die Auffindung geometrischer Sätze.

17. *Aus bekannten Sätzen über Curven niedrer Ordnung lassen sich durch die mehrdeutige Beziehung von ebenen Gebilden auf einfache Weise Sätze über Curven von beliebig höherer Ordnung ableiten.*

Als Beispiel wollen wir den Satz wählen, dass die Tangenten an einen Kegelschnitt auf zwei festen Tangenten desselben projectivische Punktreihen bilden. Es mag daraus ein Satz über Curven dritter Ordnung hergestellt werden.

Nehmen wir die Beziehung von Nr. 14 an, setzen also $p = 1$, $q = 1$, $p' = 1$, $q' = 2$, so entspricht einer Geraden d in α eine Curve dritter Ordnung d' in α', welche durch den Punkt A', die 4 Punkte B' und das Hauptpunktepaar C' geht. Einem Kegelschnitte c in α entspricht eine Curve sechster Ordnung c' in α'. Geht aber c durch

die beiden Basen A und B, so zerfällt (Nr. 9) e' in die Hauptgerade a_1' (Nr. 14), in den Hauptkegelschnitt b_1' und in eine Curve dritter Ordnung e_1'. Da die aus a_1', b_1' und e_1' zusammengesetzte e' in A und B (Nr. 11) Doppelpunkte, a_1' und b_1' daselbst einfache Punkte besitzen, so muss auch e_1' daselbst einfache Punkte haben. Sodann geht e_1' nicht durch das Punktepaar C' $(= a_1' b_1')$; vielmehr enthält e_1' von dem Kegelschnitte b_1' ausser der Basis B' diejenigen beiden Punkte, die auf dem Strahle aus A' liegen, welcher der Tangente an e in A entspricht; und auf dem Strahle a_1' enthält e_1' diejenigen beiden Punkte, die auf dem Kegelschnitte aus B' liegen, welcher der Tangente an e in B entspricht. Denkt man sich den Kegelschnitt e in die Punkte A und B und den übrigen Theil zerlegt, so entspricht dem A der Kegelschnitt b_1', dem B die Gerade a_1' und dem übrigen Theile die Curve dritter Ordnung e_1', welche durch A' und B', aber nicht durch C' geht.

Andererseits entsprechen allen Tangenten d an den Kegelschnitt e Curven dritter Ordnung d', welche die e' der Reihe nach in allen ihren Punkten berühren. Alle d' gehen aber (Nr. 14) durch A', B' und C', d. i. durch $1 + 4 + 2 = 7$ Punkte; diese nebst 2 Punkten an der Berührungsstelle mit e' bestimmen jedesmal eine d'. Je zwei d schneiden sich in einem Punkte F, daher schneiden sich je zwei d' ausser in den 7 allen d' gemeinsamen Punkten in einem dem F entsprechenden Punktepaare F', welches mit A' auf einer Geraden und mit den 4 Punkten B' auf einem Kegelschnitte liegt. Weil ferner die Punktreihen der F auf zwei festen Tangenten, also auch die Strahlenbüschel aus A und B, welche sie projiciren, projectivisch sind, so sin dauch die Strahlenbüschel aus A', welche die Punktepaare auf zwei festen Curven d' projiciren, unter einander projectivisch, ebenso wie die Kegelschnittbüschel aus B', welche durch die Punktepaare gehen, projectivisch sind.

Man kann sich ferner leicht überzeugen, dass e_1' jede beliebige Curve dritter Ordnung sein kann. Denn sei eine solche e_1' gegeben, so wähle man darauf 4 beliebige Punkte als Basis B', lege durch dieselben 2 Kegelschnitte, welche e_1' ausser in jenen 4 Punkten in 2 Punktepaaren F', G' schneiden. Die 2 Verbindungsgeraden f', g' der beiden Punkte eines Paares müssen sich aber in einem Punkte der e_1' schneiden. Denn treffen sich f' und g' in A', so betrachte A' als Basis eines Strahlenbüschels, das mit dem Kegelschnittbüschel B' projectivisch sei, und zwar derart, dass die Strahlen f', g' den Kegelschnitten durch F' und G' entsprechen und ein dritter Strahl aus A' nach einem weiteren Punkte H' der e_1', dem Kegelschnitte durch H'. Die Projectivität ist dann festgestellt und dadurch eine Curve dritter Ordnung bestimmt, welche mit e_1' die 4 Punkte B', die beiden Paare

F' und G' und einen Punkt H', also im Ganzen 9 Punkte gemein hat, daher mit ihr zusammenfällt, sobald diese 9 Punkte nicht die vollständige Basis eines Curvenbüschels dritter Ordnung bilden. Und wirklich gehört zu den 8 Punkten B', F', G', welche eine Basis bestimmen, A' als neunter Punkt, da man durch diese 9 Punkte und einen beliebig gewählten zehnten (wie vorhin H') eine Curve dritter Ordnung legen kann. Da also die aus den Büscheln A' und B' entstandene Curve mit e_1' zusammenfällt, so geht auch e_1' durch A', wie behauptet wurde. Diese beliebige Curve dritter Ordnung kann daher durch ein Strahlenbüschel und ein damit projectivisches Kegelschnittsbüschel erzeugt werden, und man kann sie daher zweideutig entsprechen lassen einem beliebigen Kegelschnitte, auf welchem man die Mittelpunkte A und B zweier Strahlenbüschel und drei jenen Punkten F', G', H' entsprechende Punkte F, G, H beliebig annimmt.

Wir können nun folgenden Satz aussprechen. *Nimmt man auf einer Curve dritter Ordnung e* 4 *Punkte B an, legt durch dieselben zwei Kegelschnitte, welche e noch in den Punktepaaren* F, F_1 *und* G, G_1 *schneiden, so treffen sich die Geraden* FF_1 *und* GG_1 *in einem Punkte A der e. Nimmt man noch ausserhalb der Curve e ein Punktepaar* C, C_1 *so an, dass es mit A auf einer Geraden und mit den* 4 *Punkten B auf einem Kegelschnitte liegt, und legt durch die* 7 *Punkte A, B, C,* C_1 *Curven dritter Ordnung d, welche e der Reihe nach in allen ihren Punkten berühren, und schneidet eine derselben mit allen übrigen in den Punktepaaren J, K, L . . . und eine andre in den Punktepaaren* J_1, K_1, L_1 . . ., *wobei die Paare J,* J_1, *sowie K,* K_1 *u. s. w., welche auf derselben d liegen, entsprechend heissen sollen, so liegt jedes solche Paar mit A auf einer Geraden und mit B auf einem Kegelschnitte, und der Büschel dieser Geraden nach J, K, L . . . ist projectivisch mit demjenigen nach J', K', L' . . ., ebenso ist der Kegelschnittbüschel nach J, K, L . . . projectivisch mit demjenigen nach J', K', L' . . ., und endlich sind diese Kegelschnittbüschel mit jenen Strahlenbüscheln projectivisch.*

Ebenso kann man entsprechend dem Pascal'schen Satze, nach welchem die 3 Durchschnittspunkte der 3 Paare gegenüberliegender Seiten eines in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsecks auf einer Geraden liegen, folgenden Satz aufstellen:

Wenn man unter Giltigkeit der Bezeichnungen des vorigen Satzes auf einer Curve dritter Ordnung e 6 *Punktepaare* 1, 2, 3, 4, 5, 6 *annimmt, von denen jedes auf einem Strahle aus A liegt und man legt* 6 *Curven dritter Ordnung d durch A, B, C und durch* (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 6), (6, 1), *so schneiden sich je zwei d ausserdem in einem Punktepaare, das mit A auf einer Geraden und mit B auf*

einem Kegelschnitte liegt, und es liegen, wenn wir durch (1, 2), (4, 5) *das Punktepaar bezeichnen, welches den durch* (1, 2) *und* (4, 5) *gehenden d gemein ist, die* 3 *Punktepaare* (1, 2) (4, 5), (2, 3) (5, 6), (3, 4) (6, 1) *und A, B, C, also zusammen* 13 *Punkte auf einer Curve dritter Ordnung.*

Carlsruhe, im Juni 1869.

Erzeugung algebraischer Curven durch projectivische Involutionen.

Von Emil Weyr in Prag.

§ 1.

Involutionen höherer Ordnung.

1. Sind a, b zwei feste Elemente eines Grundgebildes erster Stufe also zwei Punkte einer Punktreihe oder zwei Strahlen eines ebenen Strahlbüschels, so wird ein variables Element x durch das Theilverhältniss $\frac{a\,x}{b\,x}$ resp. $\frac{\sin a\,x}{\sin b\,x}$, welches wir kurz auch mit x bezeichnen wollen, eindeutig bestimmt. Es ist speciell das Theilverhältniss von a gleich Null und jenes von b gleich $\pm\infty$.

Zwei harmonische Elemente bezüglich des Grundpaares a, b besitzen gleiche, jedoch entgegengesetzt bezeichnete Theilverhältnisse.

2. Ist $f(x)$ eine ganze rationale Function in x vom Grade n und $\varphi(x)$ eine ähnliche von demselben Grade, so stellt die Gleichung:

$$f(x) - \lambda\,\varphi(x) = 0 \tag{1}$$

in welcher λ einen veränderlichen Parameter bedeutet, eine Elementeninvolution n^{ten} Grades vor.

Jedem besonderen Werthe von λ entsprechen n Elemente des Grundgebildes, nämlich jene, deren Theilverhältnisse x_1, $x_2 \ldots\ldots x_n$ die Wurzeln der Gleichung (1) sind. Diese, eine Gruppe bildende, n Elemente kann man sich wechselseitig entsprechen lassen und die Gesammtheit aller, den sämmtlichen Werthen von λ entsprechenden Elementengruppen nennt man eine Involution n^{ten} Grades.

3. Eine Involution ist bestimmt, sobald man zwei ihrer Elementengruppen kennt. In der That, bildet man aus den Theilverhältnissen der einen Gruppe die Function $f(x)$, d. i. eine Function, deren Wurzeln die erwähnten Theilverhältnisse sind, und aus den Theilverhältnissen der zweiten Gruppe ebenso die Function $\varphi(x)$, so stellt:

$$f(x) - \lambda\,\varphi(x) = 0 \tag{1}$$

jede andere Gruppe der Involution dar, welche auch die zwei gegebe-

nen Gruppen enthält. Die Gruppe $f(x) = 0$ entspricht dann dem Werthe $\lambda = 0$ und die Gruppe $\varphi(x) = 0$ dem Werthe $\lambda = \pm\infty$.

4. Fallen von den n Elementen einer Gruppe zwei zusammen, so entsteht ein Doppelelement der Involution und wir können sehr leicht die Zahl der Doppelelemente bestimmen, indem wir ausdrücken, dass Gleichung (1) eine doppelte Wurzel besitzt. Der Ausdruck hiefür ist das Verschwinden der Discriminante von (1), welche in λ vom Grade $2(n-1)$ ist, woraus wir den bekannten Schluss ziehen, dass eine Involution n^{ten} Grades $2(n-1)$ Doppelelemente besitzt.

5. Wir wollen zwei Elemente, welche einer und derselben Gruppe angehören, als zwei einander involutorisch entsprechende oder schlechtweg einander entsprechende Elemente bezeichnen.

Jedem Elemente des Grundgebildes, in welchem eine Involution n^{ten} Grades auftritt, sind $(n-1)$ Elemente involutorisch zugeordnet, nämlich jene, welche mit ihm eine Elementengruppe bilden. Es ist klar, dass dieses Entsprechen innerhalb einer Gruppe vertauschungsfähig auftritt.

Wenn also x und y die Theilverhältnisse zweier entsprechender Elemente der Involution sind, so muss zwischen ihnen eine Gleichung:

$$F(x, y) = 0 \tag{2}$$

bestehen, welche in x sowohl als auch in y vom Grade $(n-1)$ ist und in beiden Variablen symmetrisch.

Es ist nicht schwer, diese Gleichung aufzustellen, wenn man von der Involutionsgleichung (1) ausgeht. Daraus, dass x und y einer und derselben Gruppe angehören, fliesst:

$$f(x) - \lambda\varphi(x) = 0$$
$$f(y) - \lambda\varphi(y) = 0$$

und nach Elimination von λ:

$$f(x)\varphi(y) - f(y)\varphi(x) = 0. \tag{3}$$

Die linke Seite muss, wie schon die Form anzeigt, den Factor $(x-y)$ enthalten, nach dessen Unterdrückung man sofort zur Gleichung (2) gelangt.

6. Die Gleichung (2), welche die Beziehung zwischen zwei entsprechenden Elementen darstellt, liefert sofort die $2(n-1)$ Doppelelemente, wenn man $x = y$ setzt, so dass also die Theilverhältnisse dieser Doppelelemente sich als die Wurzeln der Gleichung

$$F(x, x) = 0$$

darstellen.

Man erhält z. B. für die quadratische Involution:

$$(a_2 x^2 + a_1 x + a_0) - \lambda(b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = 0$$

als Beziehungsgleichung zwischen zwei entsprechenden Elementen die folgende:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} x\,y + \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} (x+y) + \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Für die zwei Doppelelemente ergiebt sich hieraus, wenn man $x = y$ setzt, die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a_2 & a_1 \\ b_2 & b_1 \end{vmatrix} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ b_2 & b_0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ b_1 & b_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die cubische Involution:

$$(a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) - \lambda (b_3 x^3 + b_2 x^2 + b_1 x + b_0) = 0$$

liefert folgende Beziehung zwischen x und y:

$$\begin{vmatrix} a_3 a_2 \\ b_3 b_2 \end{vmatrix} x^2y^2 + \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix} x\,y\,(x+y) + \begin{vmatrix} a_3 a_0 \\ b_3 b_0 \end{vmatrix} (x^2 + xy + y^2) + \begin{vmatrix} a_2 a_1 \\ b_2 b_1 \end{vmatrix} x\,y + \begin{vmatrix} a_2 a_0 \\ b_2 b_0 \end{vmatrix} (x+y) + \begin{vmatrix} a_1 a_0 \\ b_1 b_0 \end{vmatrix} = 0$$

woraus die Gleichung für die Doppelelemente resultirt:

$$\begin{vmatrix} a_3 a_2 \\ b_3 b_2 \end{vmatrix} x^4 + 2 \begin{vmatrix} a_3 a_1 \\ b_3 b_1 \end{vmatrix} x^3 + \left\{ 3 \begin{vmatrix} a_3 a_0 \\ b_3 b_0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 a_1 \\ b_2 b_1 \end{vmatrix} \right\} x^2 + 2 \begin{vmatrix} a_2 a_0 \\ b_2 b_0 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} a_1 a_0 \\ b_1 b_0 \end{vmatrix} = 0.$$

7. Fallen sämmtliche n Elemente einer Gruppe zusammen, so bezeichnen wir diese als ein n faches Element der Involution. Ein n faches Element vertritt $(n-1)$ Doppelelemente, so dass ausser ihm nur noch $(n-1)$ Doppelelemente auftreten.

Denn verlegen wir das Grundelement a, dessen Theilverhältniss Null ist, in dieses n fache Element, so wird die Involutionsgleichung (1) folgende Gestalt annehmen

$$x^n - \lambda \varphi(x) = 0.$$

Die Beziehungsgleichung (2) zwischen zwei entsprechenden Elementen der Involution, welche die Doppelelemente liefert, erhält die Form:

$$\{b_{n-1}(x^n y^{n-1} - x^{n-1} y^n) + b_{n-2}(x^n y^{n-2} - x^{n-2} y^n) - \ldots\ldots b_0 (x^n - y^n)\} \frac{1}{(x-y)} = 0$$

oder

$$b_{n-1} x^{n-1} y^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} y^{n-2} (x+y) + b_{n-3} x^{n-3} y^{n-3} (x^2 + xy + y^2) + \ldots\ldots b_0 (x^{n-1} + x^{n-2} y + \ldots\ldots y^{n-1}) = 0,$$

wobei die b_r die Coefficienten von x^r in $\varphi(x)$ sind.

Setzt man in der letzten Gleichung $x = y$, so erhält man für die $2(n-1)$ Doppelemente der Involution die Gleichung:

$$x^{n-1} \{b_{n-1} x^{n-1} + 2 b_{n-2} x^{n-2} + 3 b_{n-3} x^{n-3} + \ldots\ldots n a_0\} = 0,$$

aus welcher hervorgeht, dass $x = 0$ ein $(n-1)$ faches Doppelelement

der Involution darstellt, wie behauptet wurde. Der zweite Factor liefert die übrigen $(n-1)$ Doppelelemente.

8. Eine Involution, für welche α und β zwei $n$fache Elemente sind, besitzt die Gleichung

$$(x-\alpha)^n - \lambda (x-\beta)^n = 0$$

und wird ausser den beiden $n$fachen Elementen keine weiteren Doppelelemente enthalten.

Für solche Involutionen ergiebt sich der interessante Satz, dass sich in ihnen die Elemente zu projectivischen d. h. doppelverhältnissgleichen Gebilden gruppiren, für welche die beiden $n$fachen Elemente die gemeinschaftlichen Doppelelemente sind. *)

§ 2.

Projectivische Involutionen.

1. Zwei Involutionen:

$$f(x) - \lambda \varphi(x) = 0 \tag{1}$$

$$F(y) - \mu \psi(y) = 0 \tag{2}$$

beziehlich vom Grade n und m heissen projectivisch, wenn jeder Elementengruppe der einen eine Elementengruppe der andern eindeutig zugeordnet ist.

Es wird also auch jedem Werthe von λ ein Werth von μ und umgekehrt eindeutig zugeordnet sein, d. h. zwischen den beiden Parametern muss eine Gleichung von der Form:

$$A\lambda\mu + B\lambda + C\mu + D = 0 \tag{3}$$

bestehen.

Aus der Gleichung (3) kann man umgekehrt auf die Projectivität der beiden Involutionen (1) und (2) schliessen.

2. Da durch drei Paar entsprechender Werthe der Parameter λ, μ die Beziehung (3) zwischen ihnen festgestellt ist, so wird zwischen zwei Involutionen die projectivische Beziehung festgestellt sein, wenn man drei Gruppen der einen Involution irgend drei Gruppen der anderen Involution zuweiset.

Dies wird offenbar schon dadurch geschehen sein, wenn man zwei Gruppenpaare und überdies ein Elementenpaar einander zuweiset, weil zwei Gruppen einer Involution und dann jedes weitere Element gleich eine ganze Gruppe bestimmen.

Zwei Elemente, je eines aus einer Involution, heissen entsprechende

---

*) Die n strahligen Gruppen eines ebenen Strahlenbüschels, welche den vollen Winkel an seinem Scheitel in $2n$ gleiche Theile theilen, bilden eine solche Involution n^{ten} Grades. Die nach den imaginären Kreispunkten gehenden zwei Strahlen sind die beiden $n$fachen Strahlen der Involution.

Elemente, wenn sie entsprechenden Gruppen angehören. Es entsprechen demnach jedem Elemente der Involution n^{ten} Grades m Elemente der zweiten Involution und jedem Elemente der letzteren entsprechen n Elemente der ersteren.

3. Treten die beiden Involutionen in einem und demselben Grundgebilde erster Stufe auf, so geschieht es $(m+n)$ mal, dass ein Element der einen Involution mit einem der ihm in der zweiten Involution entsprechenden Elemente zusammenfällt, d. h. zwei projectivische Involutionen auf demselben Träger beziehlich vom m^{ten} und n^{ten} Grade besitzen $(m+n)$ gemeinschaftliche Elemente.*)

Um zwischen den Theilverhältnissen x, y zweier entsprechenden Punkte eine Relation aufzustellen, hat man nur nöthig, aus (1) und (2) λ und μ zu bestimmen und in (3) einzusetzen; dies liefert die Gleichung:

$$A f(x) F(y) + B f(x) \psi(y) + C F(y) \varphi(x) + D \varphi(x) \psi(y) = 0.$$

Befinden sich nun beide Involutionen auf demselben Träger, so kann man beide Theilverhältnisse auf dieselben zwei Grundelemente beziehen und erhält aus der letzten Gleichung offenbar die gemeinschaftlichen Elemente, wenn man $x = y$ setzt. Die Gleichung geht dadurch in die folgende über:

$$(4)\quad A f(y) F(y) + B f(y) \psi(y) + C F(y) \varphi(y) + D \varphi(y) \psi(y) = 0,$$

welche in y vom Grade $(m+n)$ ist und deren Wurzeln die Theilverhältnisse der gemeinschaftlichen Elemente beider Involutionen sind.

4. Befinden sich zwei projectivische Involutionen, beide vom n^{ten} Grade, auf demselben Träger und besitzen beide ein gemeinschaftliches sich selbst entsprechendes $n$faches Element, so gilt dasselbe für n gemeinschaftliche Elemente beider Involutionen.

Nimmt man nämlich dieses besondere Element an Stelle des Grundelementes, dessen Theilverhältniss Null ist, so werden die Gleichungen beider Involutionen die Gestalt:

$$x^n - \lambda \varphi(x) = 0$$
$$y^n - \mu \psi(y) = 0$$

annehmen.

Da sich überdies die beiden Gruppen $x^n = 0$, $y^n = 0$ projectivisch entsprechen sollen und denselben die Werthe $\lambda = 0$, $\mu = 0$ der Parameter zukommen, so müssen die letzteren Werthe der Gleichung (3) Genüge leisten, d. h. es muss $D = 0$ sein, wodurch diese Gleichung in:

$$A \lambda \mu + B \lambda + C \mu = 0$$

übergeht.

*) Siehe Cremona's ebene Curven pag. 32 der deutschen Uebersetzung.

Die Gleichung (4), welche die gemeinschaftlichen Elemente beider Involutionen liefert, erhält die Form:

$$A\,y^{2n} + B\,y^n\,\psi(y) + C\,y^n\,\varphi(y) = 0,$$

woraus sofort erhellet, dass $y = 0$ eine $n$fache Wurzel der Gleichung ist.

Hiemit ist unsere aufgestellte Behauptung erwiesen.

Die beiden Involutionen haben somit ausser dem sich selbst entsprechenden gemeinschaftlichen $n$fachen Elemente $y = 0$ noch n weitere gemeinschaftliche Elemente, welche sich aus der Gleichung:

$$A\,y^n + B\,\psi(y) + C\,\varphi(y) = 0$$

ergeben.

5. Folgende Sätze dürften ohne weiteres als wahr erkannt werden:

Eine Strahleninvolution n^{ten} Grades wird durch jede Transversale in einer Punktinvolution n^{ten} Grades geschnitten; und umgekehrt projicirt sich eine Punktinvolution n^{ten} Grades aus jedem Punkte in einer Strahleninvolution desselben Grades.

Speciell projiciren sich die Doppelelemente der einen Involution in Doppelelementen der anderen.

Schneidet man zwei projectivische Strahleninvolutionen mit einer Transversalen, so erhält man auf dieser zwei projectivische Punktinvolutionen. U. s. w.

§ 3.

Algebraische Curven als Erzeugnisse projectivischer Involutionen.

1. Seien S_m und S_n die Scheitel zweier Strahleninvolutionen bezüglich vom Grade m und n, welche projectivisch auf einander bezogen sind. Zwei entsprechende Strahlengruppen schneiden sich gegenseitig in $m \,.\, n$ Punkten, deren Gesammtheit eine Curve $(m + n)^{\text{ter}}$ Ordnung bildet, für welche S_m ein $m$facher und S_n ein $n$facher Punkt ist.

Denn auf einer beliebigen Transversale bestimmen die beiden projectivischen Strahleninvolutionen S_m, S_n zwei projectivische Punktinvolutionen, deren $(m + n)$ gemeinschaftliche Punkte die Schnittpunkte der erwähnten Curve mit der Transversalen sind. Die Curve ist somit wirklich vom Grade $(m + n)$. Da für jede durch S_m gehende Gerade m von den Schnittpunkten in S_m zusammenfallen, so ist S_m ein $m$facher Punkt der Curve; aus demselben Grunde ist S_n ein $n$facher Punkt.

Rechnet man den Strahl $\overline{S_m S_n}$, welcher beiden Büscheln gemeinschaftlich ist, zum Büschel S_n, so entspricht ihm im Büschel S_m eine

m strahlige Gruppe, deren Strahlen die Tangenten der erzeugten Curve im Punkte S_m sind. Ebenso entspricht diesem gemeinschaftlichen Strahle im Büschel S_n eine n strahlige Gruppe, deren Strahlen die Tangenten der Curve im Punkte S_n sind.

Als Classenzahl der erzeugten Curve ergiebt sich der beiden vielfachen Punkte wegen die Zahl $2mn$. In der That entspricht jedem der $2(n-1)$ Doppelstrahlen des Büschels S_n in S_m eine m strahlige Gruppe, deren Strahlen Tangenten der erzeugten Curve sind. Es gehen somit durch S_m $2m(n-1)$ Tangenten an die Curve und da jede der m Tangenten des Punktes S_m für zwei durch ihn gehende Tangenten gilt, so ist die Gesammtzahl der durch S_m gehenden Tangenten $2mn$, was auch die Classenzahl der erzeugten Curve ist.

2. Wir wollen nun annehmen, dass die beiden Involutionen von gleichem, n^{ten} Grade sind, und wollen ihre Scheitel mit S_n und S'_n bezeichnen.

Enthalten beide Involutionen je einen n fachen Strahl g_n, g'_n, welche sich projectivisch entsprechen, so wird deren Durchschnittspunkt $(g_n g'_n)$ ein n facher Punkt der erzeugten Curve C_{2n}, welche von der $2n^{\text{ten}}$ Ordnung ist und in S_n und S'_n ebenfalls n fache Punkte besitzt.

Dass $(g_n g'_n)$ ein n facher Punkt von C_{2n} ist, folgt sofort aus § 2 Art. 4, wenn man den dort ausgesprochenen und bewiesenen Satz auf jede durch $(g_n g'_n)$ gehende Transversale anwendet. Auf einer solchen Transversalen bestimmen die beiden Involutionen S_n, S'_n zwei projectivische Punktinvolutionen, für welche der Punkt $(g_n g'_n)$ ein sich selbst entsprechender n facher Punkt ist und daher für n von den $2n$ gemeinschaftlichen Punkten beider Involutionen gilt. Jede durch $(g_n g'_n)$ gehende Gerade schneidet also die Curve C_{2n} in n mit $(g_n g'_n)$ zusammenfallenden Punkten und somit ist dieser Punkt wirklich ein n facher Punkt des Erzeugnisses.

3. Besitzen die beiden Involutionen ausser den zwei n fachen Strahlen $g_n g'_n$ überdies zwei weitere sich entsprechende n fache Strahlen $h_n h'_n$, so wird deren Schnittpunkt $(h_n h'_n)$ gleichfalls ein n facher Punkt des Erzeugnisses sein. Hieraus folgt jedoch sofort, dass das Erzeugniss C_{2n} aus n durch die vier Punkte S_n, S'_n, $(g_n g'_n)$, $(h_n h'_n)$ gehenden Kegelschnitten bestehen muss, weil jeder Kegelschnitt, welcher durch diese vier Punkte und einen Punkt von C_{2n} hindurch geht, mit C_{2n} $(4n+1)$ Punkte gemein hat also ein Bestandtheil von C_{2n} ist. Die am Schlusse des § 1 befindliche Andeutung erhält hiemit die Bestätigung.

4. Ein besonders bemerkenswerther Fall tritt ein, wenn beide Involutionen S_n, S'_n je einen n fachen Strahl g_n, g'_n enthalten, welche

Strahlen einander projectivisch entsprechen und mit dem gemeinschaftlichen Strahle $\overline{S_n S_n'}$ zusammenfallen. In diesem Falle zerfällt nämlich das Erzeugniss C_{2n} in den n fach zu zählenden Strahl $\overline{S_n S_n'}$ und eine Curve C_n n^{ter} Ordnung. Denn von den $2n$ Punkten, die irgend eine Transversale mit dem Erzeugniss C_{2n} gemein hat, fallen n in ihren Schnittpunkt mit dem Strahle $\overline{S_n S_n'}$. Auch folgt dies daraus, dass man nach Art. 2 dieses Paragraphen jeden Punkt von $\overline{S_n S_n'}$ als einen n fachen Punkt des Erzeugnisses C_{2n} betrachten kann.

Wir können somit folgenden Satz aussprechen:

Zwei projectivische Strahleninvolutionen n^{ten} Grades, in deren gemeinschaftlichem Strahle zwei einander entsprechende $n$fache Strahlen beider Involutionen vereinigt sind, erzeugen eine Curve C_n n^{ter} Ordnung.

Es ist klar, dass die Scheitel der beiden Involutionen der Curve C_n nicht angehören werden, weil sie bereits $n$fache Punkte des Gesammterzeugnisses sind, indem sie auf dem n mal zu zählenden Strahle $\overline{S_n S_n'}$ liegen.

Jede Involution enthält ausser dem $n$fachen Strahle noch $(n-1)$ Doppelstrahlen, deren jedem in der zweiten Involution n Tangenten der Curve C_n entsprechen. Es gehen somit durch jeden der beiden Büschelscheitel S_n und S_n' $n(n-1)$ Tangenten an die Curve C_n, woraus folgt, dass C_n keine Doppelpunkte oder Spitzen (im Allgemeinen) besitzen könne.

5. Den Satz des letzten Artikels kann man in folgender Weise umkehren:

Gehen durch einen Punkt S_n n Strahlen A und durch einen zweiten Punkt S_n' n Strahlen A', so stellt sowohl das $n$strahlige Büschel A als auch das $n$strahlige Büschel A' eine Curve n^{ter} Ordnung dar. Durch die n^2 Schnittpunkte σ dieser zwei Büschel werden sich daher unendlich viele Curven n^{ten} Grades hindurchlegen lassen. Ist C_n eine von diesen Curven, so kann man C_n durch zwei projectivische Involutionen n^{ten} Grades erzeugen, für welche die Büschel A, A' zwei entsprechende Gruppen sind und der Strahl $\overline{S_n S_n'}$ zwei sich entsprechende $n$fache Strahlen darstellt.

Man braucht nämlich nur den Strahl $\overline{S_n S_n'}$ wirklich als einen sich entsprechenden $n$fachen Strahl beider Involutionen zu betrachten, ferner der Strahlengruppe A die Strahlengruppe A' zuzuordnen und überdies einen willkürlichen Punkt p von C_n mit S_n und S_n' zu verbinden und dem Strahle $\overline{S_n p}$ den Strahl $\overline{S_n' p}$ als entsprechend zuzuordnen.

Hiedurch ist die projectivische Beziehung beider Involutionen fest-

gestellt, welche nach Art. 5. eine Curve n^{ter} Ordnung erzeugen. Diese hat nun mit C_n $(n^2 + 1)$ Punkte gemein; nämlich die n^2 Punkte σ und den Punkt p und ist daher mit C_n identisch.

Wir erhalten somit den Satz:

Jede durch die n^2 Schnittpunkte zweier n strahligen Büschel gehende Curve n^{ter} Ordnung kann als das Erzeugniss zweier projectivischen Involutionen n^{ten} Grades angesehen werden; für diese Involutionen sind die beiden n strahligen Büschel zwei entsprechende Strahlengruppen und der gemeinschaftliche Strahl beider Büschel ist ein sich selbst entsprechender n facher Strahl.

Legt man also durch den einen Büschelscheitel einen Strahl, und verbindet seine n Schnittpunkte mit dem zweiten Scheitel, so liegen die Schnittpunkte dieser n Verbindungslinien und der Curve $(n - 1)$ mal zu n auf Geraden, die durch den ersten Scheitel hindurchgehen.

6. Es wirft sich die Frage auf, ob wenn eine Curve C_n n^{ter} Ordnung vorliegt, sich zwei Punkte S_n, S_n' finden lassen, welche man als Scheitel zweier die Curve in der angegebenen Weise erzeugenden projectivischen Involutionen n^{ten} Grades ansehen könnte.

Bezeichnet man die Coordinaten der beiden fraglichen Punkte mit $x_1\ y_1$, $x_2\ y_2$ und ist $U = 0$ die Gleichung der gegebenen Curve, so kommt es darauf an, durch die beiden Punkte zwei n strahlige Büschel zu legen, deren n^2 Schnittpunkte auf der Curve liegen. Seien $A_1 = 0$ $A_2 = 0 \ldots . A_n = 0$ die Gleichungen von n durch den Punkt $(x_1\ y_1)$ gehenden Geraden, wobei also $A_\varkappa = y - y_1 + \alpha_\varkappa (x - x_1)$ gesetzt werden kann; ebenso seien $B_1 = 0$ $B_2 = 0 \ldots . B_n = 0$ die Gleichungen von n durch $(x_2\, y_2)$ gehenden Geraden und $B_\varkappa = (y - y_2) + \beta_\varkappa (x - x_2)$, so ist die Gleichung irgend einer Curve n^{ter} Ordnung, welche durch die n^2 Schnittpunkte der Strahlen A und B hindurchgeht:

$$A_1 A_2 A_3 \ldots A_n - \lambda B_1 B_2 B_3 \ldots . B_n = 0.$$

Es handelt sich nun darum, die $(2n + 5)$ Grössen $x_1, y_1, x_2, y_2, \lambda, \alpha, \beta$ so zu bestimmen, dass die letzte Gleichung mit $U = 0$ identisch wird. Da $U = 0$ im Allgemeinen $\left\{\frac{n(n+3)}{2} + 1\right\}$ Glieder enthält, so erhält man für die $(2n + 5)$ Grössen $\left\{\frac{n(n+3)}{2} + 1\right\}$ Bedingungsgleichungen und wird also im Allgemeinen nur dann der Anforderung genügen können, wenn:

$$2n + 5 \geqq \frac{n(n+3)}{2} + 1$$

oder:

$$8 \geqq n\ (n - 1).$$

Dieser Bedingung kann nur für $n = 1, 2, 3$ genügt werden.

Man wird also auch noch eine beliebige Curve dritten Grades durch projectivische Involutionen erzeugen können. Bei Curven vierten und höheren Grades ist dies im Allgemeinen nicht mehr möglich.

7. Für $n = 1$ sind beide Involutionen vom ersten Grade, das heisst einfache perspectivische Strahlenbüschel, deren Durchschnitt die erzeugte Gerade ist. Umgekehrt kann man jede Gerade auf unendlich viele Arten durch zwei perspectivische Strahlenbüschel erzeugen, deren Scheitel willkürlich gewählt werden können.

8. Für $n = 2$ erhält man zwei quadratische Involutionen, deren gemeinschaftlicher Strahl sich selbst entspricht und für beide ein Doppelstrahl ist. Da der zweite Doppelstrahl in jeder Involution durch die Berührungspunkte der zwei vom Scheitel der anderen Involution an den erzeugten Kegelschnitt C_2 gehenden Tangenten hindurchgeht, so folgt, dass die beiden Scheitel zwei, bezüglich C_2 conjugirte Punkte sind.

Umgekehrt kann man jeden Kegelschnitt auf unendlich viele Arten durch zwei projectivische quadratische Involutionen erzeugen, deren Scheitel zwei conjugirte Punkte in Bezug auf den Kegelschnitt sind. Die entsprechenden Strahlenpaare beider Involutionen bilden dem Kegelschnitte eingeschriebene Vierecke.

9. Setzt man $n = 3$, so gelangt man zur Erzeugung der Curven dritter Ordnung durch projectivische cubische Involutionen. Jede von den beiden Involutionen hat ausser dem, beiden gemeinschaftlichen dreifachen Strahl noch zwei Doppelstrahlen; jeder dieser Doppelstrahlen schneidet die ihm in den anderen Involutionen entsprechenden drei Strahlen in drei Paar zusammenfallender Punkte; diese drei Strahlen sind also drei Tangenten der Curve, deren Berührungspunkte auf dem Doppelstrahle liegen. Wir können dies in folgender Weise aussprechen:

Wird eine Curve dritter Ordnung durch die neun Durchschnittspunkte zweier dreistrahligen Büschel S, S' hindurchgelegt, so lässt sie sich durch zwei projectivische cubische Involutionen erzeugen, für welche S und S' die Scheitel und $\overline{SS'}$ ein sich selbst entsprechender dreifacher Strahl ist. Es giebt demnach unendlich viele dreistrahlige Büschelpaare an den Punkten S und S', deren neun Durchschnittspunkte auf der Curve liegen. Die zwei in einer der beiden Involutionen auftretenden Doppelstrahlen bilden die conische Polare des Scheitels der zweiten Involution und folglich sind die beiden Scheitel S, S' zwei correspondirende Punkte der Hesse'schen Curve unserer Curve.

Ebenso leicht erkennt man die Richtigkeit des folgenden Zusatzes:

Die mit den beiden Doppelstrahlen einer der zwei Involutionen zu denselben Gruppen gehörigeu zwei Strahlen bilden den beigeordneten Kegelschnitt des Scheitels der zweiten Involution.

10. Schliesslich mag gezeigt werden, dass:
jede zwei correspondirenden Punkte der Hesse'schen Curve einer Curve dritter Ordnung zu Scheiteln zweier projectivischen cubischen Strahleninvolutionen angenommen werden können, welche die Curve erzeugen.

Sei S ein Punkt der Hesse'schen Curve und A_1, A_2, A_3 drei durch ihn gehende Tangenten unserer Curve, deren Berührungspunkte a_1, a_2, a_3 auf einer Geraden D_{12}*) liegen. Die drei Tangenten schneiden die Curve in drei Punkten $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$, welche nach einem bekannten Satze wieder auf einer Geraden D_3 liegen müssen. Der Schnittpunkt von D_{12} und D_3 sei S'. Nun stellen wir in folgender Weise zwei projectivische cubische Involutionen an den Punkten S und S' her. Der Strahl $\overline{SS'}$ soll sich als dreifacher Strahl beider Involutionen selbst entsprechen, der Strahlengruppe $A_1\,A_2\,A_3$ soll die den Doppelstrahl D_{12} enthaltende Gruppe $D_{12}\,D_3$ entsprechen. Schliesslich verbinden wir einen willkürlichen Punkt p unserer Curve mit S und S' und ordnen die Strahlen $\overline{S_p}$ und $\overline{S'_p}$ einander als entsprechend zu. Hiedurch ist die projectivische Beziehung festgestellt und es werden beide Involutionen eine Curve dritter Ordnung erzeugen, welche mit unserer Curve zehn Punkte gemein hat, also mit ihr identisch ist.

Denn die erzeugte Curve berührt in $a_1\,a_2\,a_3$ resp. die Strahlen $A_1\,A_2\,A_3$ (dies gibt sechs Punkte), geht ferner durch $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3$ und schliesslich durch p, wodurch unsere Behauptung bewiesen ist.

Prag, im Februar 1870.

---

*) Diese Gerade ist ein Theil der conischen Polaren von S.

Ueber den Zusammenhang einer Klasse von Flächenabbildungen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Die Flächen, welche bisher auf einer Ebene eindeutig haben abgebildet werden können, lassen sich in zwei Klassen sondern. In die erste Klasse gehören solche, deren Abbildung ohne Weiteres gelingt, und von denen es im Wesentlichen nur *eine* Art von Abbildung giebt. Hierher gehören die Flächen n^{ter} Ordnung mit einem $(n-1)$fachen Punkte (z. B. Steiner'sche Fläche), die windschiefen Flächen 3^{ter} und 4^{ter} Ordnung (letztere sobald sie eine Doppelcurve 3^{ten} Grades besitzen), und die Flächen 5^{ter} Ordnung, welche eine Doppelcurve 3^{ten} Grades oder zwei sich nicht schneidende Doppelgerade besitzen.

Dagegen gehören zur zweiten Klasse solche Flächen, welchen eine bestimmte Anzahl gleichberechtigter Abbildungen zukommt, und deren Abbildung erst gelingt, nachdem durch Auflösung einer bestimmten höhern Gleichung gewisse ausgezeichnete Elemente auf der Fläche ermittelt sind. Hierher gehören die allgemeinen Flächen 3^{ter} Ordnung, auf welchen die 27 Geraden nachgewiesen werden müssen. Es gehören ferner hierher die Flächen 4^{ter} Ordnung mit einer Doppelcurve 1^{ten} oder 2^{ten} Grades; bei erstern sind ausser Geraden gewisse einzelne Kegelschnitte, bei den letztern ist ein System von 16 Geraden nachzuweisen. Von Flächen 5^{ter} Ordnung gehören hierher diejenigen, welche eine Doppelcurve 4^{ten} Grades besitzen, und bei denen wiederum ausser Geraden gewisse Kegelschnitte nachzuweisen sind; Flächen deren Theorie ich im 15. Band der Abhandlungen der Göttinger Societät behandelt habe.

Diese Flächen haben sämmtlich das Gemeinsame, dass sie augenblicklich auf einer Doppelebene abgebildet werden können, und dass die Aufsuchung jener ausgezeichneten Elemente immer auf die Zweitheilung der Abel'schen Functionen führt, welche der Uebergangscurve, längs welcher die Blätter der Doppelebene zusammenhängen, zugeordnet sind.

Es ist leicht sich über den innern Zusammenhang der Abbildung solcher Flächen mit der Zweitheilung der Abel'schen Functionen Rechenschaft abzulegen. Ich werde diesen Zusammenhang zunächst entwickeln, und sodann in den bekannten Fällen die Form des auftretenden Theilungsproblemes angeben.

§ 1.

Eindeutige Beziehung zwischen einer einfachen und einer Doppelebene.

Seien x_1, x_2, x_3, x_4 Coordinaten eines Punktes einer Fläche, welche sowohl auf einer Doppelebene als auf einer einfachen Ebene eindeutig abgebildet werden kann. Seien ferner y_1, y_2, y_3 die Coordinaten eines Punkts der Doppelebene, welcher in einem Blatte dem Punkte x entspricht, und seien endlich z_1, z_2, z_3 die Coordinaten des zu x gehörigen Punktes der einfachen Ebene. Man hat dann

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3) + \psi_i(y_1, y_2, y_3)\sqrt{\Omega} = \chi_i(z_1, z_2, z_3),$$

wo die φ, ψ, χ ganze rationale Functionen sind, und Ω eine solche ganze rationale Function der y bedeutet, dass die Dimension von φ_i derjenigen von $\psi_i\sqrt{\Omega}$ gleich ist. Es wird endlich vorausgesetzt, dass im Allgemeinen jedem Punkte x nur *ein* Punkt y mit gegebenem Vorzeichen von $\sqrt{\Omega}$, und ebenso nur *ein* Punkt z entspricht; dass man also die Verhältnisse der y und $\sqrt{\Omega}$ durch die x, so wie die Verhältnisse der z durch die x ausdrücken könne. Man kann dann auch die z durch die y ausdrücken, und die Gleichungen, welche dies bewerkstelligen, müssen die Quadratwurzel $\sqrt{\Omega}$ enthalten, sodass sie die Form annehmen:

$$\sigma z_i = M_i + N_i\sqrt{\Omega}, \tag{1}$$

wo die M, N ganze rationale Functionen der y sind. Die Gleichungen (1) vermitteln den Uebergang von der Doppelebene zur einfachen, und wir können daher, indem die Fläche auf der erstern bereits abgebildet vorausgesetzt wird, die Fläche selbst ganz entbehren.

Die Curve $\Omega = 0$ in der Ebene der y enthält diejenigen Punkte, für welche einem Punkte y nur *ein* Punkt z entspricht. Längs dieser Curve hängen daher die Blätter der Doppelebene zusammen; ich nenne sie die *Uebergangscurve**). Diese Curve muss, damit die Ausdrücke

*) Es bedarf wohl kaum der Erwähnung, dass die hier benutzte Doppelebene wesentlich anderer Natur ist, als diejenige, welche Riemann bei den hyperelliptischen Integralen benutzt. Die letztere enthält lauter reelle Punkte, repräsentirt nur ein doppelt unendliches Werthgebiet, und ihre Blätter können nur in Punkten zusammenhängen. Dagegen enthält die oben benutzte Doppelebene Punkte mit,

rechts in (1) homogen sein können, von gerader Ordnung sein; sie kann zerfallen, was jedoch zunächst nicht angenommen werden soll.

Den Geraden der einfachen Ebene

$$u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0 \tag{2}$$

entsprechen nun gewisse in der Doppelebene liegende Curven, deren Aufsuchung die Aufgabe des Abbildungsproblems ist. Für diese Curven folgt aus (1)

$$(u_1 M_1 + u_2 M_2 + u_3 M_3) + (u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3)\sqrt{\Omega} = 0,$$

oder, wenn der Kürze wegen

$$\mathsf{M} = u_1 M_1 + u_2 M_2 + u_3 M_3$$
$$\mathsf{N} = u_1 N_1 + u_2 N_2 + u_3 N_3$$

gesetzt wird:

$$\mathsf{M}^2 - \mathsf{N}^2\Omega = 0. \tag{3}$$

Dieses Curvensystem hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass die Schnittpunkte zweier Curven des Systems in zwei Gruppen zerfallen. Denn wenn durch M', N' die Ausdrücke bezeichnet werden, in welche M, N übergehen, sobald die u_i durch Grössen u_i' ersetzt werden, so finden wir die Durchschnitte zweier Curven des Systems aus den Gleichungen

$$\mathsf{M}^2 - \mathsf{N}^2\Omega = 0 \quad , \quad \mathsf{M}'^2 - \mathsf{N}'^2\Omega = 0.$$

Es ist daher

$$\mathsf{M}^2\mathsf{N}'^2 - \mathsf{N}^2\mathsf{M}'^2 = 0,$$

und die Schnittpunkte sondern sich also in solche, für die

$$\mathsf{M}\mathsf{N}' - \mathsf{N}\mathsf{M}' = 0,$$

und in solche, für welche

$$\mathsf{M}\mathsf{N}' + \mathsf{N}\mathsf{M}' = 0.$$

Unter den erstern muss sich ein ausgezeichneter befinden, nämlich der, welcher dem Schnittpunkt der zugehörigen Geraden

$$u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0, \qquad u_1' z_1 + u_2' z_2 + u_3' z_3 = 0$$

entspricht. In der That ist für diesen wegen (1):

$$\mathsf{M} + \mathsf{N}\sqrt{\Omega} = 0 \quad , \quad \mathsf{M}' + \mathsf{N}'\sqrt{\Omega} = 0, \quad \text{also} \quad \mathsf{M}\mathsf{N}' - \mathsf{N}\mathsf{M}' = 0.$$

Die Gleichung (3) kann nicht allgemein in zwei für die u lineare Factoren zerfallen; denn sonst wären die Ausdrücke

$$\mathsf{M} + \mathsf{N}\sqrt{\Omega} \quad , \quad \mathsf{M} - \mathsf{N}\sqrt{\Omega}$$

an und für sich bis auf einen von den u unabhängigen Factor rational, also auch die Verhältnisse der z, und daher $\sqrt{\Omega}$ rational; es wäre in

---

im Allgemeinen, complexen Coordinaten; dieselbe repräsentirt also ein vierfach unendliches Werthgebiet, und die Blätter derselben können durch ein doppelt unendliches, die Uebergangscurve, zusammenhängen.

diesem Falle eine wirkliche Doppelebene nicht vorhanden, die Blätter hätten keine Verbindung mit einander.

Dagegen ist es möglich, dass die Gleichung (3) einen von den u unabhängigen Factor φ hat, und dass also identisch

$$M^2 - N^2\Omega = \varphi \Sigma P_{ik} u_i u_k = \varphi \cdot \Pi \tag{4}$$

Es ist dann das System der Curven $\Pi = 0$ allein, welches der Geraden der einfachen Ebene entspricht.

§ 2.

Ueber die Curven, durch welche die eindeutige Beziehung vermittelt wird.

Wir wollen jetzt den Schnitt einer Curve des Systems $\Pi = 0$ mit der Uebergangscurve untersuchen. In den Schnittpunkten ist $\Omega = 0$, also auch $M = 0$. Bilden wir jetzt das Differential von (4):

$$2M dM - 2N dN \cdot \Omega - N^2 d\Omega = \varphi d\Pi + \Pi d\varphi,$$

so haben wir für $\Pi = 0$, $\Omega = 0$, $M = 0$:

$$- N^2 d\Omega = \varphi d\Pi,$$

und es können nun folgende Fälle eintreten:

1. Man hat zugleich $N = 0$, $\varphi = 0$; d. h. einige dieser Schnittpunkte fallen in einige der festen Schnittpunkte von $\varphi = 0$ mit $\Omega = 0$.

2. Man hat $\varphi = 0$, $d\Omega = 0$, d. h. einige Punkte des Schnittpunktsystems fallen in vielfache Punkte von $\Omega = 0$, also abermals in feste Punkte.

3. Man hat $N = 0$, $d\Pi = 0$. Entweder ist abermals $\varphi = 0$, und man hat also feste vielfache Punkte von $\Pi = 0$ vor sich, oder es ist φ von Null verschieden. Auch wenn Ω in höherer Ordnung verschwindet, hat man feste Punkte vor sich, da doch vielfache Punkte von Ω nur in endlicher Anzahl vorhanden sein können. Es bleibt also nur der Fall zu untersuchen, wo φ endlich bleibt und Ω in der ersten Ordnung verschwindet. Mag nun M in der μ^{ten}, N in der ν^{ten} Ordnung verschwinden. Ist $\mu \gtrless \nu$, so wird wegen der Gleichung (4) Π in diesen Punkten mit M^2 proportional, hat also auf Ω einen beweglichen 2μfachen Punkt. Ist dagegen $\mu > \nu$, so wird Π mit $N^2\Omega$ proportional, hat also einen $2\nu + 1$fachen Punkt, dessen einer Zweig die Curve $\Omega = 0$ berührt. Immer hat also $\Pi = 0$ mit $\Omega = 0$ hier eine gerade Anzahl gemeinsamer Punkte.

4. Man hat $d\Omega = 0$, $d\Pi = 0$, also einen vielfachen Punkt von $\Pi = 0$ in einem vielfachen Punkte von $\Omega = 0$.

5. Tritt keiner dieser Fälle ein, so wird $d\Pi$ mit $d\Omega$ proportional, die Curven berühren einander.

Fassen wir alles zusammen, so finden wir, dass die Schnittpunkte theils fest sind, theils Berührungspunkte, theils vielfache Punkte von $\Pi = 0$ von gerader Ordnung, welche auch mit Berührungspunkten vereinigt sein können.

Hieraus erkennt man, dass die Curven $\Pi = 0$ immer den Curvenschaaren angehören müssen, welche die Curve $\Omega = 0$, abgesehen von festen Punkten, überall in Paaren zusammenfallender Punkte schneiden. Sind $u_1, u_2 \ldots u_p$ die Abel'schen Integrale erster Gattung, welche zu $\Omega = 0$ gehören, und bezieht sich das Summenzeichen auf Integrale, welche die beweglichen Schnittpunktpaare zu obern Grenzen haben, setzen wir dagegen v_i für u_i bei festen Schnittpunkten, so bestehen immer die Gleichungen

$$\sum_k u_i^{(k)} + \sum_k v_i^{(k)} = \tfrac{1}{2} P_i \quad , \quad (i = 1, 2 \ldots p) \tag{5}$$

wo die P_i ein System von Periodicitätsmoduln bezeichnen. Von den $u^{(k)}$ können wiederholt einige (in den beweglichen vielfachen Punkten der $\Pi = 0$) zusammenfallen.

Da ferner die Curven $\Pi = 0$ durch stetige Aenderung der u in einander übergehen, so müssen die Periodicitätsmoduln P_i für alle Curven des Systems dieselben sein. Die Curven $\Pi = 0$ gehören also alle zu demselben System von Berührungscurven.

Hält man die Punkte fest, welche den Integralen $v^{(k)}$ zugeordnet sind, so liefern die Gleichungen (5) im Allgemeinen 2^{2p} Systeme von Berührungscurven, welche den 2^{2p} Systemen von Periodicitätsmoduln P_i zugeordnet sind. Die übrigen Bedingungen, welche die Curven $\Pi = 0$ noch erfüllen müssen, werden es im Allgemeinen zur Folge haben, dass in einem dieser Systeme eine grössere Anzahl von Systemen $\Pi = 0$ existirt. Existiren aber solche Systeme $\Pi = 0$ in einem der Systeme von Berührungscurven, so müssen auch in allen andern Systemen solche existiren, die von einer Wurzel desselben irreducibeln Factors der zu (5) gehörigen Theilungsgleichung abhängen*). Und man hat also den Satz:

Jede Zahl gleichberechtigter Arten, die Doppelebene, wenn es möglich ist, auf der einfachen Ebene abzubilden, ist gleich einem Multiplum des Grades, welchen ein gewisser irreducibler Factor einer Zweitheilungsgleichung der zur Uebergangscurve gehörigen Abel'schen Functionen besitzt.

Durch diesen Satz sind eine Reihe von merkwürdigen Gleichungen, welche sich bei der Abbildung von Flächen ergeben haben, auf eine gemeinsame Quelle, die Zweitheilung der Abel'schen Functionen, zurückgeführt.

*) Ueber die Art wie die Theilungsgleichung unter Umständen reducibel werden kann, vergl. auch meine Abhandlung über die Anwendung der Abel'schen Funct., Crelles Journal. Bd. 63.

§ 3.

Fall, wo die Uebergangscurve ein Kegelschnitt ist.

Der einfachste Fall ist der, in welchem die Uebergangscurve $\Omega = 0$ ein Kegelschnitt ist. Nehmen wir in diesem Falle in einem der beiden Blätter einen Punkt an; er ist durch y_1^0, y_2^0, y_3^0 und das Vorzeichen von $\sqrt{\Omega^0}$ gegeben. Ich lege nun einen Kegelschnitt, welcher durch diesen Punkt geht und $\Omega = 0$ doppelt berührt; ist

$$A = u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 \quad , \quad A^0 = u_1 y_1^0 + u_2 y_2^0 + u_3 y_3^0,$$

so die Gleichung einer solchen in der Form ausdrückbar:

$$A^2 \Omega^0 - A^{0\,2} \Omega = 0, \tag{1}$$

und das Vorzeichen von $\sqrt{\Omega}$ ist für einen Punkt desselben durch die Gleichung

$$\sqrt{\Omega} - \frac{A}{A^0} \sqrt{\Omega^0} = 0 \tag{2}$$

bestimmt, so dass an jeder Stelle des Kegelschnitts (ausser in seinen Berührungspunkten mit $\Omega = 0$) derselbe sich nur auf *einem* Blatte befindet. Die Abbildung der Doppelebene auf der einfachen geschieht durch Vergleichung der Formeln

$$A\sqrt{\Omega^0} - A^0 \sqrt{\Omega} = 0, \qquad u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0,$$

also indem man setzt:

$$\begin{cases} \varrho z_1 = y_1 \sqrt{\Omega^0} - y_1^0 \sqrt{\Omega} \\ \varrho z_2 = y_2 \sqrt{\Omega^0} - y_2^0 \sqrt{\Omega} \\ \varrho z_3 = y_3 \sqrt{\Omega^0} - y_3^0 \sqrt{\Omega}. \end{cases} \tag{3}$$

Die Curven (1) und (2) können geraden Linien der einfachen Ebene entsprechen, indem zwei derselben einen ausgezeichneten beweglichen Schnittpunkt erhalten. Sind B, B^0 die Ausdrücke in welche A, A^0 übergehen, wenn sich die u in v verwandeln, so schneiden sich die Kegelschnitte

$$A^2 \Omega^0 - A^{0\,2} \Omega = 0 \quad , \quad B^2 \Omega^0 - B^{0\,2} \Omega = 0$$

erstens im Punkte y^0,

zweitens in einem weitern Punkte für den $AB^0 - BA^0 = 0$,

drittens in zwei Punkten für welchen $AB^0 + BA^0 = 0$.

Die zweite entspricht dem Schnitt der Geraden $u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 = 0$ und $v_1 z_1 + v_2 z_2 + v_3 z_3 = 0$ in der einfachen Ebene, indem für ihn auch

$$\sqrt{\Omega} = \frac{A}{A^0} \sqrt{\Omega^0} = \frac{B}{B^0} \sqrt{\Omega^0}$$

beiderseits denselben Werth hat. Dieser Schnittpunkt liegt auf der Geraden $AB^0 - BA^0 = 0$, d. h. auf derjenigen Geraden, welcher den Punkt y^0 mit dem Durchschnitte der Berührungssehnen $A = 0$, $B = 0$ verbindet.

Es giebt in diesem Falle nur eine Art solcher Abbildungen, welche durch Aenderung des Punkts y^0 stetig abgeändert werden können. Fasst man die Doppelebene als Projection einer Fläche 2ter Ordnung von einem ausserhalb liegenden Punkt auf, so entspricht die Abbildung auf der einfachen Ebene einer Chasles'schen Abbildung, bei welcher der zu y^0 gehörige Punkt der Fläche den Projectionspunkt bildet. — Es ändert sich nichts Wesentliches, wenn auch der Kegelschnitt $\Omega = 0$ in zwei Gerade zerfällt.

§ 4.

Uebergangscurve von der 4ten Ordnung. Eine Klasse von Berührungscurven.

Ich gehe jetzt zu dem Falle über, wo die Uebergangscurve von der 4ten Ordnung ist, und werde ein System von Arten angeben, die Doppelebene auf einer einfachen abzubilden. Bezeichnen wir durch y_1, y_2, y_3 die Coordinaten eines Punktes (bezüglich Punktpaares) der Doppelebene. Nach Hesse kann man die Gleichung einer Curve 4ter Ordnung $\Omega(y_1 y_2 y_3) = 0$ auf 36 Arten in die Gestalt einer Determinante von 4 Reihen linearer Ausdrücke $u_{ik} = u_{ik}$ bringen (Hesse in Crelles Journal, Bd. 49):

$$(1) \qquad \Omega = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{vmatrix}.$$

Diesen 36 Factorenklassen von Ω entsprechen 36 Schaaren von Curven 3ter Ordnung, deren jede die Curve $\Omega = 0$ in 6 Punkten berührt, und welche einem im Allgemeinen irreducibeln Factor 36ten Grades der Zweitheilungsgleichung zugeordnet sind (vergl. meine Abhandlung in Crelles Journal Bd. 63, p. 211). Die Gleichung des der Form (1) entsprechenden Systems von Berührungscurven ist

$$(2) \qquad \Phi(y, \alpha) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & \alpha_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} & \alpha_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} & \alpha_3 \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

wobei die α willkürliche Parameter bedeuten.

In dieser Schaar giebt es 8 doppelt unendliche Schaaren, welche Doppelpunkte besitzen, und zwar so, dass in jedem beliebig gewählten Punkt y je eine Curve jeder dieser Schaar einen Doppelpunkt hat.

Um dieses einzusehen, gehen wir auf die Hesse'sche Interpretation der Gleichung (1) zurück. Nach Hesse kann man die y als Parameter eines Systems

(3) $F(y, X) = \Sigma\Sigma u_{ik} X_i X_k = 0 = F_1 y_1 + F_2 y_2 + F_3 y_3$

von Flächen zweiter Ordnung ansehen, welche dieselben 8 Schnittpunkte haben. Die α kann man als Coordinaten einer Ebene im Raum betrachten; die Gleichung $\Phi(y, \alpha) = 0$ stellt dann die Fläche $F(y, X) = 0$ in Ebenencoordinaten dar.

Dass die Curve (2) in einem gegebenen Punkte b_1, b_2, b_3 einen Doppelpunkt habe, wird ausgedrückt durch die 3 Gleichungen:

(4) $$\frac{\partial \Phi(b, \alpha)}{\partial b_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Phi(b, \alpha)}{\partial b_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \Phi(b, \alpha)}{\partial b_3} = 0.$$

Sie geben 8 Werthsysteme der α, also 8 Berührungscurven, welche jene Bedingung erfüllte. *Aber die Werthe der α sind keine andern, als die 8 Werthsysteme, welche die Coordinaten der Tangentenebene der Fläche $F(b, X) = 0$ in den 8 gemeinsamen Punkten des Flächensystems* (3) *annehmen.* In der That, sei ξ_1, ξ_2, ξ_3, ξ_4 ein solcher Schnittpunkt, also

$$\Sigma u_{ik} \xi_i \xi_k = 0$$

unabhängig von den Werthen der y. Setzt man dann für die α die Werthe

(5) $$\alpha_i = u_{i1}^{(b)} \xi_1 + u_{i2}^{(b)} \xi_2 + u_{i3}^{(b)} \xi_3 + u_{i4}^{(b)} \xi_4,$$

und bezeichnet man durch U_{ik} die Unterdeterminanten von Ω, so ist

$$\frac{\partial \Phi(b, \alpha)}{\partial b_m} = -\sum_{ik} \frac{\partial U_{ik}^{(b)}}{\partial b_m} \alpha_i \alpha_k = -\sum_{ikh} \frac{\partial U_{ik}^{(b)}}{\partial b_m} \alpha_i u_{kh}^{(b)} \xi_h$$

$$= -\sum_{ih} \frac{\partial \cdot \Sigma_k U_{ik}^{(b)} u_{kh}^{(b)}}{\partial b_m} \alpha_i \xi_h + \sum_{ikh} U_{ik}^{(b)} \frac{\partial u_{kh}^{(b)}}{\partial b_m} \alpha_i \xi_h.$$

Im ersten Gliede rechts hat $\Sigma_k U_{ik}^{(b)} u_{kh}^{(b)}$ den Werth Ω, wenn $h = i$, sonst den Werth Null; im zweiten Gliede ist

$$\sum_i U_{ik}^{(b)} \alpha_i = \sum_{in} U_{ik}^{(b)} u_{in}^{(b)} \xi_n = \Omega \xi_k.$$

Es ist also

$$\frac{\partial \Phi(b, \alpha)}{\partial b_m} = -\frac{\partial \Omega(b)}{\partial b_m} \Sigma \alpha_i \xi_i + \Omega \sum_{kh} \frac{\partial u_{kh}^{(b)}}{\partial b_m} \xi_k \xi_h$$

$$= -\frac{\partial \Omega(b)}{\partial b_m} F(b, \xi) + \Omega \frac{\partial F(b, \xi)}{\partial b_m} = 0.$$

Die Gleichungen (4) sind also wirklich erfüllt.

Man sieht hieraus, dass die 8 Schaaren von Berührungscurven mit Doppelpunkten völlig getrennt sind; die Parametersysteme entsprechen den Ebenenbündeln, welche die 8 Schnittpunkte des Flächensystems (3) zu Scheiteln haben.

§ 5.

Die Doppelebene wird für diesen Fall auf einem Strahlbüschel im Raum und dann auf einer einfachen Ebene abgebildet.

Ich werde nun zeigen, *wie mit Hülfe jeder dieser Curvenschaaren die Abbildung der Doppelebene auf der einfachen geleistet wird, so dass in dieser Weise* 8 . 36 = 288 *gleichberechtigte Abbildungsarten existiren.*

Nach der Hesse'schen Interpretation entspricht einem Punkte y eine gewisse Fläche 2^{ter} Ordnung, deren Parameter die y sind. Der Curve 4^{ter} Ordnung entspricht die Gesammtheit aller durch die 8 festen Punkte gelegten Kegel, deren Spitzen die (nicht durch die 8 Punkte gehende) Hesse'sche Raumcurve 6^{ter} Ordnung bilden. Eine Berührungscurve 3^{ter} Ordnung, $\Phi(y, \alpha) = 0$ entspricht die Gesammtheit der Flächen, welche eine gegebene Ebene α berühren; einem der 8 Systeme mit Doppelpunkt entsprechen insbesondere die Schaaren von Flächensystemen, bei denen die feste Ebene α durch einen der 8 Punkte ξ geht, und dem Doppelpunkt b selbst entspricht jedesmal diejenige Fläche, welche die Ebene α im Punkte ξ selbst berührt. Der Büschel der Ebenen α ist den Doppelpunkten b durch die Formel (5) projectivisch zugeordnet.

Betrachten wir nun zwei derselben Schaar angehörige Berührungscurven mit den Doppelpunkten b, b'. Ihnen entsprechen zwei Schaaren von Flächen 2^{ter} Ordnung, welche durch die 8 Punkte gehen, und zwei durch ξ gehende Ebenen α, α' berühren. Den Schnittpunkten der beiden Curven entsprechen diejenigen 9 Flächen, welche gleichzeitig beide Ebenen α und α' berühren. Aber unter diesen zeichnet sich eine besonders aus; nämlich diejenige völlig bestimmte Fläche, welche durch die Schnittlinie der Ebenen α, α' hindurchgeht. Man sieht also, *dass die Schnittpunkte zweier mit Doppelpunkten begabten Berührungscurven* $\Phi(y, \alpha) = 0$, $\Phi(y, \alpha') = 0$ *in einen einzelnen Punkt und in* 8 *andere zerfallen.*

Dieser einzelne Schnittpunkt y hat eine leicht zu definirende Lage Bemerken wir, dass jeder Geraden ein einfaches Büschel von Flächen 2^{ter} Ordnung entspricht. Der Geraden, welche die Doppelpunkte b, b' verbindet, entspricht ein solches, dessen Grundcurve durch die 8 Punkte und durch die Richtung der Tangente in einem dieser Punkte gegeben ist; diese Tangente, im Punkte ξ, ist die Schnittlinie der Ebenen α, α'. Diesem Büschel gehört auch jene ausgezeichnete Fläche an, welche diese Tangente ganz enthält; der ihr entsprechende Punkt y muss also auf der Verbindungslinie b, b' liegen. Und so haben wir den Satz:

Wenn wir die Doppelpunkte zweier Berührungscurven derselben

Schaar verbinden, so geht die Verbindungslinie durch einen Schnittpunkt der Curven.

Es entspringt hieraus eine zweite Beziehung der durch den Punkt ξ gehenden Elementargebilde zu den Punkten y der Ebene. Vorhin war jedem Punkte der letztern, als Doppelpunkt b einer Curve der Schaar, eine *Ebene* α des Bündels ξ projectivisch zugeordnet. Jetzt ist es ein *Strahl* s des Bündels ξ, der Durchschnitt zweier Ebenen $\alpha\alpha'$, welcher dem Punkte y zugeordnet ist. Denn jeder solche Strahl bestimmt eine Fläche 2^{ter} Ordnung; und ihr entspricht ein bestimmter Punkt y. Construiren wir alle Ebenen durch s, so ist jeder eine Fläche zugeordnet, welche dieselbe im Punkte ξ berührt, und dieser entspricht in der Ebene der Doppelpunkt b einer gewissen Berührungscurve. Alle solche Flächen bilden ein Büschel, welches, wie oben gezeigt, bestimmt ist; die zugehörigen Doppelpunkte b bilden also eine Gerade. Auf ihr liegt ein Punkt y, welcher der durch s gelegten Fläche entspricht. In diesem Punkte schneiden sich also alle Berührungscurven der betrachteten Schaar, welche auf der Geraden ihren Doppelpunkt haben.

Wird aber so jedem Strahl s ein Punkt y eindeutig zugeordnet, so ist das Umgekehrte keineswegs der Fall. Denn einem Punkte y entspricht eine durch ξ gehende Fläche, und diese enthält *zwei* Strahlen, s, s'. *Jedem y entsprechen also zwei Strahlen, die durch ξ gehenden Erzeugenden der zugehörigen Fläche, jedem Strahl s ein Punkt y. Nur dann fallen ss' zusammen, wenn die Fläche ein Kegel wird, also für Punkte der Curve 4^{ter} Ordnung. Das Bündel der Strahlen ss' repräsentirt also die Zurückführung der Doppelebene mit einer Uebergangscurve 4^{ter} Ordnung auf ein einfaches Gebilde. Wir erhalten die Abbildung auf einer einfachen Ebene, wenn wir das Strahlenbündel mit einer beliebigen, nicht durch ξ gehenden Ebene durchschneiden.*

Zugleich sieht man noch Folgendes. Das Bündel s ist dem System der Geraden bb' projectivisch zugeordnet. Man kann also als Träger der Abbildung auch die Doppelebene selbst ansehen, indem man ihre Geraden einerseits und ihre Punkte andrerseits betrachtet. Denn jedem Punkte y entsprechen zwei Gerade β (bb'), welche durch y gehen; dagegen jeder Geraden β nur *ein* auf ihr liegender Punkt y.

§ 6.

Untersuchung der Abbildung. Den Geraden der Doppelebene entsprechen Curven 3^{ter} Ordnung mit 7 festen Punkten.

Den Zusammenhang der auf einer beliebigen Ebene B durch das Strahlenbündel s hervorgerufenen Abbildung mit der Doppelebene selbst untersuchen wir nun genauer. Einer Geraden in B entsprechen die

in einer Ebene α liegenden Strahlen s, also alle Flächen 2^{ter} Ordnung, welche in ξ diese Ebene α berühren, mithin eine Berührungscurve 3^{ter} Ordnung; und umgekehrt, ist eine solche gegeben, so bedingt sie, jenachdem man sich in dem einen oder dem andern Blatte der Doppelebene bewegt, eine von zwei bestimmten Ebenen α, α', welche von den zugehörigen Flächen 2^{ter} Ordnung berührt wird; die Ebenen $\alpha\alpha'$ entstehen durch Bewegung der zu den Punkten der Berührungscurve gehörigen Strahlenpaare ss'. Einer Geraden in B entspricht also eine Curve 3^{ter} Ordnung in der Doppelebene, und zwar immer nur in einem Blatt.

Um nun zu finden, was einer Geraden der Doppelebene in B entspricht, müssen wir zunächst bemerken, dass die Gerade im Allgemeinen in beiden Blättern ein zusammenhängendes Gebilde darstellt*), dessen übereinander liegende Theile algebraisch nicht getrennt werden können. Dieser Geraden in ihrer Gesammtheit entspreche eine Curve k^{ter} Ordnung in B. Die Gerade der Doppelebene trifft die nur jedesmal in einem Blatt zu nehmende Berührungscurve 3^{ter} Ordnung in 3 Punkten; in ebenso vielen Punkten, den Bildern derselben, muss also die Curve k^{ter} Ordnung von dem Bilde der Berührungscurve, einer Geraden, getroffen werden. Man hat also $k = 3$. *Den Geraden der Doppelebene entsprechen also in der einfachen Ebene Curven 3^{ter} Ordnung.*

Unter den Strahlen s giebt es 7 ausgezeichnete, die nämlich, welche von ξ nach den 7 andern festen Punkten des Büschels gehen. Sehen wir, was diesen entspricht.

Legen wir durch einen dieser 7 Strahlen s eine Ebene α, so zerfällt die Gesammtheit der sie berührenden Flächen 2^{ter} Ordnung in zwei Theile. Denn s zusammen mit der durch die andern 6 festen Punkte gelegten Raumcurve 3^{ter} Ordnung bildet die Axe eines Flächenbüschels, von welchem jede Fläche α berührt. Aus der Curve 3^{ter} Ordnung $\Phi(y, \alpha) = 0$ sondert sich also in diesem Falle eine diesem Flächenbüschel entsprechende Gerade ab; die Curve zerfällt in Gerade und Kegelschnitt. Variirt man α, so ändert sich nur der letztere. Das Zerfallen einer Berührungscurve kann auf zwei Arten geschehen; entweder zerfällt sie in Doppeltangente und Berührungskegelschnitt; oder in eine Tangente und einen Kegelschnitt, der durch die andern beiden Schnittpunkte der Tangente mit der Curve 4^{ter} Ordnung geht, und dieselbe ausserdem 3mal berührt. Hier tritt, da der Kegelschnitt variiren kann, ohne dass die Gerade sich ändert, der erste Fall ein.

---

*) Eine Curve stellt nur dann zwei getrennte Gebilde dar, je nachdem sie in einem oder dem andern Blatt verläuft, wenn durch ihre Gleichung $\sqrt{a}$ rational wird. Vgl. meine Abh. im 15. Bande der Abh. der Göttinger Gesellsch. d. Wiss. „über die Abbildung einer Classe von Flächen 5^{ter} Ordnung."

Man erkennt dies auch auf anderm Wege. Einer Geraden der Ebene, welche Trägerin der Doppelebene ist, entspricht nach der Hesse'schen Interpretation die Gesammtheit aller Flächen, welche eine gewisse durch die 8 Punkte gehende Raumcurve 4^{ter} Ordnung und 1^{ter} Sp. zur Grundcurve haben. Den 4 Schnittpunkten der Geraden der Ebene mit der Curve 4^{ter} Ordnung entsprechen die 4 Kegel, welche dieses Flächenbüschel enthält. Ist die Gerade Tangente der ebenen Curve 4^{ter} Ordnung, so müssen zwei dieser Kegel zusammenrücken, die Raumcurve 4^{ter} Ordnung erhält einen Doppelpunkt. Soll die Gerade aber Doppeltangente sein, so müssen zweimal zwei Kegel zusammenfallen, d. h. die Raumcurve 4^{ter} Ordnung muss sich auflösen. Dies kann nun, da beliebig 8 Punkte derselben gegeben sind, nur so geschehen, dass sie in eine Gerade zerfällt, welche zwei der Punkte verbindet, und in eine Raumcurve 3^{ter} Ordnung, welche durch die 6 übrigen geht. Ein Büschel mit solcher Grundcurve repräsentirt also eine Doppeltangente, wie oben.

Die zwei der 8 Punkte verbindende Gerade wird von der Curve 3^{ter} Ordnung in 2 Punkten getroffen, und diese sind Spitzen von Kegeln. Daher ergiebt sich beiläufig, *dass die* 28 *Verbindungslinien der* 8 *Punkte Sehnen der Hesse'schen Curven* 6^{ter} *Ordnung sind.*

Wenn die Berührungscurve auf diese Weise zerfällt, so liegt der Doppelpunkt b auf der Doppeltangente und rückt, während der Berührungskegelschnitt variirt, auf derselben fort. Betrachtet man zwei solcher Curven, welche dieselbe Doppeltangente enthalten, so ist die Linie β (vgl. § 5. am Ende) jedesmal dieselbe, nämlich die Doppeltangente selbst, und der ausgezeichnete Schnittpunkt y der Curven wird ein völlig unbestimmter Punkt der Doppeltangente. Dieser Geraden β entsprechen also unendlich viele Punkte y, nämlich alle Punkte der Doppeltangente; also auch dem zugehörigen s. Und wir haben den Satz:

Die 7 *Strahlen, welche durch Verbindung von* ξ *mit den* 7 *andern festen entstehen, geben* 7 *Punkte in B, welche nicht Punkten der Doppelebene entsprechen, sondern welche die Bilder von gewissen* 7 *Doppeltangenten sind.*

Aber nur für das eine Blatt gilt dies. Denn wählen wir einen bestimmten Punkt y der Doppeltangente, so liefern seine Coordinaten eine bestimmte Fläche 2^{ter} Ordnung, deren Parameter sie sind. Diese hat in ξ zwei Erzeugende, und nur die eine derselben fällt mit der von ξ nach einem der 7 andern festen Punkte gezogenen Geraden zusammen.

Jede andere in der Doppelebene gezogene Gerade trifft die Doppeltangente auch in dem Blatt, wo diese durch einen Punkt abgebildet wird. *Die entsprechenden* 7 *Punkte in B sind also allen Curven* 3^{ter} *Ordnung, welche Gerade abbilden, gemeinsam.*

Einem Punkt einer Doppeltangente, welche nicht zu jenen 7 gehört, entsprechen die durch ξ gehenden Erzeugenden einer Fläche in einem Büschel, dessen Axe die durch zwei andre der 8 Punkte gelegte Gerade g zusammen mit einer Curve 3^{ter} Ordnung durch ξ und die 5 übrigen Punkte ist. Eine der Erzeugenden schneidet dann g, und die Abbildung dieser Doppeltangente in einem Blatt wird also durch die Projection der Geraden g, also durch die Verbindungslinie zweier der 7 festen Punkte von B dargestellt.

Nach dem Obigen sind die 288 Abbildungsarten der Doppelebene 7 Doppeltangenten zugeordnet, in der Weise, dass eine solche immer, soweit sie in einem Blatte liegt, durch einen Fundamentalpunkt abgebildet wird. Er ist nicht als neue Abbildung gezählt, wenn man bei jeder Doppeltangente den im andern Blatt liegenden Theil durch einen Fundamentalpunkt abbilden wollte. Dies würde nämlich nichts weiter bedeuten, als eine Vertauschung der Blätter der Doppelebene unter sich, während diese doch an und für sich unterschiedslos sind. Will man dies berücksichtigen, so muss man die Anzahl der Abbildungen verdoppeln.

§ 7.

Beweis, dass jedes System von 7 Punkten der Ebene mit den durch sie gelegten Curven 3^{ter} Ordnung die Abbildung einer solchen Doppelebene begründet.

Wir sind hier auf die Betrachtung eines Systems von ebenen Curven 3^{ter} Ordnung mit 7 festen Punkten geführt, welches die Abbildung der Doppelebene ist. Es ist leicht zu zeigen, dass jedes solche System als derartige Abbildung aufgefasst werden kann; mit andern Worten, dass die 7 Fundamentalpunkte eine beliebige Lage haben. Sie entstehen aus 8 Punkten im Raume, welche die Grundpunkte eines Flächenbündels zweiter Ordnung waren, und deren einer mit den 7 übrigen verbunden wurde; diese 7 Verbindungsstrahlen schnitten die Bildebene in jenen 7 Punkten. Es entsteht die Aufgabe, aus den 7 Punkten von B wieder ein System von 8 Grundpunkten eines Flächenbündels 2^{ter} Ordnung abzuleiten, welches mit jenen 7 Punkten in dem gedachten Zusammenhang steht. Hierzu führt folgende Untersuchung.

Jedem Punkt P in B ist ein anderer Q reciprok zugeordnet, indem P mit den 7 festen Punkten (R) ein Curvenbüschel 3^{ter} Ordnung bestimmt, welches noch einen 9^{ten} Punkt Q zum Grundpunkte hat. Wählen wir nun einen beliebigen Punkt O im Raum, und verbinden ihn durch Gerade mit den Punkten R und einem Punktepaar PQ. Sodann legen wir eine Fläche 2^{ter} Ordnung, welche die Strahlen OP, OQ ganz enthält. Sie wird von den Strahlen OR in 7 Punkten ge-

schnitten (R'), welche zusammen mit O die 8 Grundpunkte eines Flächenbüschels 2^{ter} Ordnung bilden, und welche also die obige Aufgabe lösen. Denn da durch P, Q, und die R unendlich viele Curven 3^{ter} Ordnung gehen, so giebt es unendlich viele Kegel 3^{ter} Ordnung, welche O zur Spitze haben, und die Strahlen OP, OQ, so wie die 7 Strahlen OR enthalten. Jeder dieser Kegel schneidet die oben construirte Fläche 2^{ter} Ordnung in den Geraden OP, OQ und in einer Raumcurve 4^{ter} Ordnung und 1^{ter} Sp., welche durch O und die 7 Punkte R' gehen. Diese 8 Punkte sind also Grundpunkte eines auf der Fläche liegenden Büschels von Raumcurven 4^{ter} Ordnung und 1^{ter} Sp., und sind also auch die Grundpunkte eines Flächenbündels, q. e. d.

Betrachten wir nun irgend eine Fläche dieses Bündels. Ihre beiden durch O gehenden Erzeugenden entsprechen einerseits zwei über einanderliegenden Punkten der Doppelebene, aber zugleich schneiden sie B in einem Punktepaar PQ. Denn es giebt auf dieser Fläche wieder unendlich viele Curven 4^{ter} Ordnung und 1^{ter} Sp., welche die R' und O zu Grundpunkten haben; jede der beiden von O ausgehenden Erzeugenden werden von einer solchen Curve noch einmal getroffen. Projicirt man also die Curven 4^{ter} Ordnung von O aus auf die Ebene B, so gehen sie in ein Büschel von Curven 3^{ter} Ordnung über, deren Grundpunkte die R und die beiden Punkte sind, in welchen B von jenen Erzeugenden getroffen wird. Daher bilden diese letzten ein Punktepaar PQ.

Man sieht also, *dass die Punktepaare PQ die Bilder der auf einanderliegenden Punkte der Doppelebene sind.*

Die Punkte PQ fallen zusammen, wenn sie einen Punkt der Uebergangscurve abbilden. In diesem Fall wird die Fläche 2^{ter} Ordnung ein Kegel, die Erzeugenden fallen in die Verbindungslinie der Kegelspitze mit O zusammen. Daher ist die Curve der zusammenfallenden Punktepaare PQ nichts anderes als die Projection der Hesse'schen Curve, also eine Curve 6^{ter} Ordnung. Aber oben wurde gezeigt, dass die 7 Geraden OR' Sehnen der Curve der Kegelspitzen seien. Daher hat die Projection die 7 Punkte R zu Doppelpunkten. Sie kann keine weitern haben, da sie eine eindeutige Abbildung einer Curve 4^{ter} Ordnung ist, und also $p = 3$ sein muss. Man hat also den Satz:

Wenn 7 Punkte der Ebene gegeben sind, so giebt es unendlich viele Büschel von Curven 3^{ter} Ordnung, welche durch sie gehen und sich ausserdem in einem Punkte P berühren. Der Ort der Punkte P ist eine Curve 6^{ter} Ordnung, welche die 7 Punkte zu Doppelpunkten hat.

Der von O ausgehende Büschel von Strahlen war nach dem Früheren den Geraden der ursprünglichen Ebene der y so zugeordnet, dass zwei durch O gehende Erzeugende einer Fläche den Geraden $\beta\beta'$ entsprachen, deren Schnittpunkt der zu jener Fläche gehörige Punkt y ist. Die

Punktepaare PQ sind also ebenso dem Geradenpaare $\beta\beta'$ projectivisch zugeordnet, und es folgen daraus ohne weiteres folgende Sätze über Curven 4ter Ordnung:

Betrachten wir eine der 288 *doppelten endlichen Schaaren von Berührungscurven* 3ter *Ordnung mit Doppelpunkt, welche eine gegebene Curve* 4ter *Ordnung zulässt. Durch jeden Punkt der Ebene gehen dann zwei Gerade* $\beta\beta'$, *welche die Eigenschaft haben, dass y immer ein Schnittpunkt zweier Curven des Systems ist, welche ihre Doppelpunkte auf einer solchen Geraden haben. Das System ist* 7 *Doppeltangenten t zugeordnet, welche Theile von Berührungscurven des Systems werden können. Diese* 7 *Doppeltangenten bestimmen die Geradenpaare* $\beta\beta'$ *dadurch, dass die t und* $\beta\beta'$ *die gemeinsamen Tangenten eines Büschels von Curven* 3ter *Classe sind; wodurch jedem* β *ein* β' *zugeordnet wird. Der geometrische Ort, welcher von den zusammenfallenden Paaren* $\beta\beta'$ *umhüllt wird, ist eine Curve* 6ter *Classe, welche die* 7 *Geraden t zu Doppeltangenten hat.*

Da solchen 7 Tangenten t nach dem Obigen 7 Linien im Raum entsprechen, welche einen der 8 Grundpunkte des Flächenbündels mit den 7 andern verbinden, so liegen nach einem Satze von Hesse niemals die 6 Berührungspunkte von 3 der Doppeltangenten in einem Kegelschnitt; und diese Systeme von Tangenten sind die 8 . 36, welche auf solche Weise zusammengesetzt werden können.

In dieser Form tritt die Verbindung hervor, in welcher diese Untersuchungen mit denen des Herrn Aronhold stehen (Berl. Monatsber. vom 18. Juli 1864), welche ein eben solches System von 7 Doppeltangenten zum Ausgangspunkt nehmen.

§ 8.

Abbildung der Flächen 3ter Ordnung.

Wenn man die Doppelebene aus der Projection einer Fläche 3ter Ordnung, von welcher ein Punkt der Projectionspunkt, ableitet, so erhält man als Uebergangscurve eine Curve 4ter Ordnung; die Doppeltangenten derselben sind immer in einem Blatte Bilder einer Geraden der Fläche; nur eine Doppeltangente ist statt dessen in einem Blatte Bild des Projectionspunktes. Da hierdurch die Blätter der Doppelebene wirklich unterschieden werden, so verdoppelt sich die Zahl der Abbildungen. Sie theilen sich in drei Classen, je nachdem unter den Fundamentalpunkten sich die Abbildung des Projectionspunktes befindet, oder das Bild der in der Doppelebene seinem Bilde zugeordneten Geraden, oder keines von beiden. Im ersten Falle, welcher $\frac{7 \cdot 288}{28} = 72$ mal eintritt, erhält man eine der von Herrn Cremona und mir geschil-

derten Abbildungen, bei welchen ebene Schnitte sich durch Curven 3^{ter} Ordnung mit 6 festen Punkten abbilden. Denn jede Gerade der Doppelebene entspricht zugleich einem durch den Projectionspunkt gehenden ebenen Schnitte; und wenn dieser sich durch Curven 3^{ter} Ordnung mit 7 Fundamentalpunkten abbildet, so hat man nur den dem Projectionspunkte entsprechenden Fundamentalpunkt aufzugeben, um andere ebene Schnitte zu erhalten. Der hierdurch festgestellte Zusammenhang zwischen den Flächen 3^{ter} Ordnung und den oberen Curven 4^{ter} Ordnung ist genau derselbe, welchen Herr Geiser in seiner Note im 1. Bande der mathematischen Annalen behandelt hat. Die Gleichung 36^{ten} Grades bleibt hier bestehen; aber jede der Gleichungen 8^{ten} Grades zerfällt in eine quadratische Gleichung und in eine vom 6^{ten} Grade; nur erstere liefert diese Art von Abbildungen.

Die übrigen 216 Abbildungen haben einen anderen Charakter. Bei ihnen tritt das Bild des Projectionspunktes nicht als Fundamentalpunkt auf. Eine Gerade der Doppelebene entspricht also einem durch den Projectionspunkt gelegten ebenen Schnitt nur, wenn man das Bild des Projectionspunktes hinzufügt. Daher ist auch als Bild eines ebenen Schnittes in der Ebene B nicht eine durch die 7 festen Punkte gehende Curve 3^{ter} Ordnung für sich, sondern nur verbunden mit dem zu einer Linie ausgebreiteten Bilde jenes Punktes zu betrachten. Man erhält also eine Abbildung der Fläche durch höhere Abbildungsfunctionen.

§ 9.

Die Flächen 4^{ter} Ordnung mit einer Doppelcurve 4^{ten} Grades.

Ist $p = 0$ die Ebene des Doppelkegelschnitts, und $p = 0$, $x = 0$, $y = 0$ ein Punkt dieses Kegelschnitts, so hat die Gleichung der Fläche der Form:

$$(1) \qquad (\varphi_1 z + \varphi_2)^2 - p^2 (\psi_0 z^2 + 2 \psi_1 z + \psi_2) = 0,$$

wo φ_1, φ_2, ψ_0, ψ_1, ψ_2 homogene Functionen von x, y, p sind, deren Ordnungen durch die Indices bezeichnet werden. Legt man von $x = 0$, $y = 0$, $p = 0$ einen Tangentenkegel an die Fläche, so ist deren Gleichung:

$$(\varphi_1^2 - \psi_0 p^2)(\varphi_2^0 - \psi_2 p^2) - (\varphi_1 \varphi_2 - \psi_1 p^2)^2 = 0,$$

oder, nach Beseitigung des Factors $-p^2$:

$$(2) \qquad (\varphi_1^2 \psi_2 - 2 \varphi_1 \varphi_2 \psi_1 + \varphi_2^2 \psi_0) - p^2 (\psi_0 \psi_2 - \psi_1^2) = 0.$$

Er ist von der 4^{ten} Ordnung. Die Projection der Fläche von dem Punkte $x = 0$, $y = 0$, $p = 0$ aus giebt also eine Doppelebene mit einer Uebergangscurve 4^{ter} Ordnung.

Die Berührungscurve des Tangentenkegels ist dann gegeben durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \varphi_1(\varphi_1 z + \varphi_2) - p^2(\psi_0 z + \psi_1) &= 0 \\ \varphi_2(\varphi_1 z + \varphi_2) - p^2(\psi_1 z + \psi_2) &= 0, \end{aligned} \tag{3}$$

aus welchen noch die Combination folgt

$$\varphi_2(\psi_0 z + \psi) - \varphi_1(\psi_1 z + \psi_2) = 0. \tag{4}$$

Um die Ordnung der Raumcurve zu bestimmen, schneiden wir sie mit der Ebene

$$z = ax + by + cp.$$

Die erste Gleichung (3) zusammen mit (4) bestimmt, wenn man diesen Werth von z einführt, 6 Punkte; aber unter diesen sind die beiden durch die Gleichungen

$$\varphi_1 = 0, \qquad \psi_0 z - \psi_1 = 0$$

bestimmten abzusondern, da sie der zweiten Gleichung (3) nicht genügen. Die Berührungscurve ist also von der 4^{ten} Ordnung, und muss von der 1^{ten} Sp. sein, da die Gleichung (2) ihrer Projection keinen Doppelpunkt zeigt.

In meiner Abhandlung im 69. Band des Crelle'schen Journals habe ich gezeigt, dass durch jeden Punkt der Fläche eine Schaar von Raumcurven 4^{ter} Ordnung und 1^{ten} Sp. geht, welche diesen Punkt zum Doppelpunkt haben. Eine solche existirt auch für den Projectionspunkt P ($x = 0$ $y = 0$ $p = 0$), insofern er in dem einen Mantel der Fläche und ebenso insofern er im andern liegt. Zieht man die Curven des einen Systems, so geben sie von P aus projicirt Kegelschnitte, und die projicirenden Kegel treffen die Fläche noch immer in einer Raumcurve des 2^{ten} Systems. Es ist also immer eine Curve des einen Systems mit einer des andern conjugirt, indem ihre Projectionen denselben Kegelschnitt auf der Doppelebene geben, nur in verschiedenen Blättern.

Diese Kegelschnitte bilden eines der 63 Systeme von Berührungskegelschnitten für die Uebergangscurve. Sie sind leicht algebraisch auszudrücken; denn schreibt man die Gleichung (1) in der Form (mit ψ_0 multiplicirt):

$$(\varphi_2 \psi_0 - \varphi_1 \psi_1)^2 - (p^2 \psi_0 - \varphi_1^2)(\psi_2 \psi_0 - \psi_1^2) = 0,$$

so ist

$$(\psi_2 \psi_0 - \psi_1^2) - 2\lambda(\varphi_2 \psi_0 - \varphi_1 \psi_1) + \lambda^2(p^2 \psi_0 - \varphi_1^2) = 0 \tag{5}$$

die Gleichung eines solchen Systems von Berührungskegelschnitten. Dass es das gesuchte ist, ergiebt folgende Betrachtung. Die Gleichung (5) stellt zugleich die Gleichung eines Kegels 2^{ter} Ordnung dar. Schneidet man ihn mit der Fläche (1), so findet man, dass diese in z quadratische Gleichung (1) rational lösbar wird, und man erhält:

$$(6) \qquad 0 = (\varphi_1 + p\sqrt{\psi_0})(z\sqrt{\psi_0} - p\lambda) + (\varphi_2\sqrt{\psi_0} + p\psi_1).$$

Der Durchschnitt des Kegels mit der gegebenen Fläche wird also ersetzt durch den Schnitt des Kegels mit zwei (für $+\sqrt{\psi_0}$ und $-\sqrt{\psi_0}$) durch die obige Gleichung gegebene Flächen 2^{ter} Ordnung, welche durch P gehen. Die Schnittcurven sind aber zwei Curven 4^{ter} Ordnung und 1^{ter} Sp., welche P zum Doppelpunkte haben, was zu zeigen war.

In diesem System von Berührungscurven kommen 6 Paare von Doppeltangenten vor, welche dann eine von den übrigen Doppeltangenten der Curve 4^{ter} Ordnung getrennte Gruppe bilden. Man erhält sie, indem man die Determinante des Kegelschnitts (5) gleich Null setzt. Eine Wurzel der Gleichung ist $\lambda = \infty$, denn in diesem Falle hat man aus (5) das Linienpaar:

$$(p\sqrt{\psi_0} + \varphi_1)(p\sqrt{\psi_0} - \varphi_1) = 0,$$

welches mit P verbunden die Tangentenebenen der Fläche in P liefert. Dieses Linienpaar nimmt bei der Abbildung der Fläche auf der Doppelebene eine gewisse Ausnahmsstellung ein. Denken wir uns rechts alles mit ξ, η, ζ, den Coordinaten eines Punktes der Doppelebene, statt mit xyp geschrieben, so kann man die Fläche durch die folgenden Abbildungsgleichungen ausdrücken:

$$\varrho x = \xi(\varphi_1^2 - \psi_0\zeta^2) \quad , \quad \varrho y = \eta(\varphi_1^2 - \psi^0\zeta^2) \quad , \quad \varrho p = \zeta(\varphi_1^2 - \psi_0\zeta^2)$$

$$\varrho z = -(\varphi_1\varphi_2 - \psi_1\zeta^2) + \zeta\sqrt{\Omega},$$

wo Ω den mit ξ, η, ζ geschriebenen linken Theil von z bedeutet. Für $\varphi_1 = \pm p\sqrt{\psi_0}$ verschwinden nun die Ausdrücke von x, y, p, der von z aber nur bei einem bestimmten Vorzeichen von Ω, bei dem andern nicht. Daher stellt im letztern Falle die Doppeltangente nur den Punkt P selbst dar, und man sieht, dass diese Doppeltangenten in je einem Blatt nur Bilder von P, im andern dann jedesmal die Bilder der Curven sind, in welchen die in P gelegten Tangentenebenen die Oberfläche schneiden.

Die 5 andern Paare von Doppeltangenten, welche in dem System (5) auftreten, können, da man die 16 letzten Doppeltangenten in andrer Weise erhält, nur herrühren von den Ebenen, die man aus P an die 5 doppelt berührenden Kegel legen kann, welche die Oberfläche zulässt. Legt man von P die beiden Tangentenebenen an einen dieser Kegel, so schneidet jede in zwei Kegelschnitten, die durch P gehen und daselbst die verschiedenen Mäntel der Fläche berühren. Es gehört immer ein Kegelschnitt einer solchen Ebene der einen, der andere der andern von zwei conjugirten Schaaren an; und da jeder Kegelschnitt einer Schaar von jedem der conjugirten in 2 Punkten getroffen wird,

so bildet immer ein Kegelschnitt der einen Tangentenebene mit einem der andern eine uneigentliche Raumcurve 4^{ter} Ordnung und 1^{ter} Sp., die 4 Kegelschnitte zusammen also einen besondern Fall in dem oben beschriebenen Systeme von Raumcurven 4^{ter} Ordnung, welche sich als Berührungskegelschnitte projiciren.

Die 16 andern Doppeltangenten der Uebergangscurve erhält man, indem man von P Ebenen durch die 16 Geraden der Fläche legt. Den von P gelegten Tangentenkegel trifft eine solche Ebene in vier Strahlen; aber wo die entsprechende Gerade der Fläche dem Kegel begegnet, muss sie in der Tangentenebene der Fläche, also auch des Kegels liegen, und die vier Strahlen müssen sich also paarweise vereinigen, so dass man in der Projection eine Doppeltangente erhält.

Will man nun die so charakterisirte Doppelebene auf einer einfachen abbilden, so sind dabei als Fundamentalpunkte der einfachen Ebene die Bilder von 7 Doppeltangenten (jede nur in einem Blatt genommen) zu Grunde zu legen, von denen nicht 3 ihre Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt haben. Wählen wir zu zweien derselben diejenigen Doppeltangenten, welche in je einem Blatte Bilder von P sind, und zwar auch in dem Blatte, in welchem sie diese Eigenschaft besitzen, so können die übrigen nicht mehr unter den 5 Paaren gewählt werden, die in demselben System von Berührungsschnitten auftreten; die 3 andern müssen also Bilder von 5 der 16 Geraden sein. Man wird so auf die 40 Abbildungen geführt, welche ich im 69. Bande des Crelle'schen Journals gegeben habe, und welche Herr Geiser mit den Abbildungen der Flächen 3^{ter} Ordnung in Verbindung gesetzt hat. Eine solche Verbindung ist hier durch die gemeinsame Quelle beider Abbildungen gegeben.

§ 10.

Die Flächen 4^{ter} Ordnung mit einer Doppelcurve 2^{ten} Grades. Sie werden zurückgeführt auf eine Doppelebene mit einer Uebergangscurve 6^{ten} Grades, welche einen 4fachen Punkt besitzt.

Die Fläche 4^{ter} Ordnung mit einer Doppelcurve ersten Grades kann man ebenfalls auf eine Doppelebene projiciren, indem man einen Punkt der Doppelcurve als Ausgangspunkt wählt. Die Doppelgerade sei durch $x = 0$, $y = 0$ gegeben, $p = 0$ sei eine Ebene, welche durch das Projectionscentrum, aber nicht durch die ganze Doppelgerade geht. Die Gleichung der Fläche ist dann von der Form:

$$(1) \qquad (u_0 z^2 + 2 u_1 z + u_2) x^2 + 2 (v_0 z^2 + 2 v_1 z + v_2) x y + (w_0 z^2 + 2 w_1 z + w_2) y^2 = 0,$$

wo die u, v, w homogene Functionen von x, y, p sind, deren jedes-

malige Ordnung der Index angiebt. Man kann daher die Fläche durch die folgenden Gleichungen darstellen, bei denen rechts immer statt xyp die Argumente $\xi\eta\zeta$ gesetzt werden:

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} \varrho x &= \xi\,(u_0\xi^2 + 2v_0\xi\eta + w_0\eta^2)\\ \varrho y &= \eta\,(u_0\xi^2 + 2v_0\xi\eta + w_0\eta^2)\\ \varrho p &= \zeta\,(u_0\xi^2 + 2v_0\xi\eta + w_0\eta^2)\\ \varrho z &= -(u_1\xi^2 + 2v_1\xi\eta + w_1\eta^2) \pm \sqrt{\Omega}, \end{aligned}\right. \qquad \text{wo}$$

$$(3)\qquad \Omega = -\begin{vmatrix} u_0\xi^2 + 2v_0\xi\eta + w_0\eta^2 & u_1\xi^2 + 2v_1\xi\eta + w_1\eta^2)\\ u_1\xi^2 + 2v_1\xi\eta + w_1\eta^2 & u_2\xi^2 + 2v_2\xi\eta + w_2\eta^2) \end{vmatrix}.$$

Die Gleichungen (2) stellen die Abbildung der Fläche auf der Doppelebene dar, welche eine beliebige von $x = 0$, $y = 0$, $p = 0$ verschiedene Ebene sein kann und in welcher ξ, η, ζ die Coordinaten der aus der Projection von $xyzp$ entstehenden Punkte sind. Die Uebergangscurve ist $\Omega = 0$, eine Curve 6^{ter} Ordnung mit einem 4fachen Punkte bei $\xi = 0$, $\eta = 0$.

Die Aufgabe, auf welche man hier geführt wird, ist also die *Abbildung einer Doppelebene, deren Uebergangscurve eine Curve 6^{ter} Ordnung mit einem 4fachen Punkte ist.* Man löst diese Aufgabe folgendermassen.

Durch den 4fachen Punkt P von $\Omega = 0$ kann man Kegelschnitte legen, welche die Curve überall berühren, wo sie dieselbe ausser P noch treffen, also in 4 Punkten. Sind $u_i^{(1)}$, $u_i^{(2)}$, $u_i^{(3)}$, $u_i^{(4)}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ die Integrale erster Gattung, welche den Berührungspunkten zugehören, $\alpha_i^{(1)}$, $\alpha_i^{(2)}$, $\alpha_i^{(3)}$, $\alpha_i^{(4)}$ die, welche den hier in P vereinigten Punkten der Curve entsprechen, endlich γ_i gewisse Constante, so sind die Berührungspunkte der Kegelschnitte bestimmt durch die Gleichungen

$$(4)\qquad 2\sum_k u_i^{(k)} + \sum_k v_i^{(k)} = 2\gamma_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Die Constanten γ_i bestimmt man, indem man das Abel'sche Theorem für die Schnittpunkte irgend einer Curve zweiter Ordnung mit $\Omega = 0$ aufstellt, z. B. für eine doppelt gerechnete Tangente, welche sich von P an $\Omega = 0$ ziehen lässt. Für diese sei α das dem Berührungspunkt entsprechende Integral; man hat

$$(5)\qquad \sum_k v_i^{(k)} + 2\alpha_i = \gamma_i;$$

daher verwandelt sich (4) in

$$2\sum_k u_i^{(k)} = 4\alpha_i + \sum_k v_i^{(k)},$$

und die einzelnen Berührungskegelschnitte bestimmen sich daher aus den Gleichungen

$$(6) \qquad \sum_k u_i^{(k)} = 2\,\alpha_i + \tfrac{1}{2} \sum_k v_i^{(k)} + \tfrac{1}{2}\, P_i\,,$$

wo die P_i ein System von Periodicitätsmoduln bedeuten. *Es giebt mithin* $2^{2p} = 2^8 = 256$ *solcher Berührungskegelschnitte.*

Fixiren wir einen derselben, $K = 0$. Durch seine 4 Berührungspunkte legen wir nun eine Curve 3^{ter} Ordnung $L = 0$, welche in P einen Doppelpunkt hat, und deswegen noch 2 willkürliche Parameter enthält. Die Curve $\Omega - L^2 = 0$ hat mit $K = 0$ die Berührungspunkte gemein, und hat einen 4 fachen Punkt in P. Bestimmt man also c, d. h. die absoluten Werthe der Coefficienten von L so, dass $\Omega - c\,L^2 = 0$ noch einen weitern Punkt mit $K = 0$ gemein hat, so muss jene Curve den Kegelschnitt ganz enthalten; und indem man also die absoluten Werthe der Coefficienten von L gehörig bestimmt denkt, kann man der Curvengleichung $\Omega = 0$ immer die Form geben:

$$(7) \qquad \Omega = L^2 - KM = 0\,,$$

wo $M = 0$ eine Curve 4^{ter} Ordnung ist, welche P zum dreifachen Punkt hat, und $\Omega = 0$ in 6 Punkten berührt.

Es ist nun leicht auch das ganze System von Curven L, M anzugeben, welches hier auftritt. Ist nämlich m ein linearer Ausdruck in ξ, η, also $m = 0$ eine durch den Punkt P gehende Gerade, so hat man auch

$$\Omega = (L + mK)^2 - K\,(M + 2\,mL + m^2 K).$$

Die zusammengehörigen Systeme der Curven L, M sind also durch die Gleichungen:

$$(8) \qquad \begin{aligned} L' &= L + mK = 0 \\ M' &= M + 2mL + m^2 K = 0 \end{aligned}$$

ausgedrückt, welche die Coefficienten von m zu Parametern hat.

Geometrisch ist das System $L' = 0$ so zu definiren, dass es alle Büschel von Curven 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkten in P enthält, welche durch eine derselben ($L = 0$) einerseits, und die Combination von K mit einer beliebigen durch P gezogenen Geraden ($m = 0$) andrerseits, bestimmt sind.

Wir betrachten nun die Curven $M' = 0$ genauer. Zwei derselben

$$(9) \qquad \begin{aligned} M' &= M + 2\,mL + m^2 K = 0 \\ M' &= M + 2\,\mu\,L + \mu^2 K = 0 \end{aligned}$$

schneiden sich ausser P noch in 7 Punkten; von diesen aber bestimmt sich einer rational, nämlich der Schnittpunkt, in welchem beide Curven sich mit der durch ihren gemeinsamen 3 fachen Punkt gezogenen Geraden

$$(10) \qquad m - \mu = 0$$

treffen. *Hiedurch wird das System der Curven $M' = 0$, welche zwei Parameter enthalten, welche ferner in P einen dreifachen Punkt haben, also dem Geschlecht $p = 0$ angehören, befähigt die Abbildung der Doppelebene auf einer einfachen zu vermitteln und den Geraden der einfachen Ebene zu entsprechen.*

Setzt man nämlich $m = \alpha\,\xi + \beta\,\eta$, so hat man für $M' = 0$:

$$\sqrt{\Omega} = L + (\alpha\,\xi + \beta\,\eta)\,K \tag{11}$$

und man hat also zum Uebergange von der Doppelebene zur einfachen die Formeln (vgl. 1. § 1.):

$$\begin{aligned} \varrho\,X &= \xi\,K \\ \varrho\,Y &= \eta\,K \\ \varrho\,Z &= L - \sqrt{\Omega}. \end{aligned} \tag{12}$$

Jedem ξ, η, ζ entsprechen zwei XYZ, jedem XYZ aber, wenn

$$\begin{aligned} Z + \alpha\,X + \beta\,Y &= 0 \\ Z + \alpha'\,X + \beta'\,Y &= 0 \end{aligned}$$

zwei durch X, Y, Z gehende Gerade sind, der isolirte Schnittpunkt der Curven

$$\begin{aligned} L + (\alpha\,\xi + \beta\,\eta)\,K - \sqrt{\Omega} &= 0 \\ L + (\alpha'\,\xi + \beta'\,\eta)\,K - \sqrt{\Omega} &= 0, \end{aligned} \tag{13}$$

von welchem oben die Rede war. Denn es folgt, da $\sqrt{\Omega}$ hier beide mal dasselbe Zeichen haben muss,

$$[(\alpha\,\xi + \beta\,\eta) - (\alpha'\,\xi + \beta'\,\eta)]\,K = 0$$

Verschwindet der erste Factor hier, also ist K von Null verschieden, so kann man die Gleichungen (13) durch die eine Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= M + 2\,(\alpha\,\xi + \beta\,\eta)\,L + (\alpha\,\xi + \beta\,\eta)^2\,K \\ &= M + 2\,(\alpha'\,\xi + \beta'\,\eta)\,L + (\alpha'\,\xi + \beta'\,\eta)^2\,K \end{aligned}$$

ersetzen, und man erhält den oben gedachten Punkt.

Was $K = 0$ angeht, so nehmen die Punkte dieses Kegelschnitts eine gesonderte Stellung ein. Für $K = 0$ ist entweder $L = \sqrt{\Omega}$ oder $L = -\sqrt{\Omega}$. In dem Blatte, wo das zweite eintritt, hat man $X = 0$, $Y = 0$; der Kegelschnitt $K = 0$, soweit er in diesem Blatt liegt, wird also durch *einen* Punkt abgebildet. Dagegen wenn $K = 0$ und zugleich $L = \sqrt{\Omega}$, kann man die Gleichungen (12) durch folgende ersetzen:

$$\varrho\,X = \xi\,K,\ \varrho\,Y = \eta K,\ \varrho\,Z = \frac{L^2 - \Omega}{L + \sqrt{\Omega}} = \frac{KM}{L + \sqrt{\Omega}},$$

oder durch

$$\sigma\,Y = \xi\,(L + \sqrt{\Omega}), \quad \sigma\,Y = \eta\,(L + \sqrt{\Omega}), \quad \sigma\,Z = M,$$

woraus die für $K = 0$, $\sqrt{\Omega} = L$, wird:

$$\sigma\,X = 2\,\xi\,L, \quad \sigma\,Y = 2\,\eta\,L, \quad \sigma\,Z = M. \tag{14}$$

Nun ist

$$(14^a) \qquad \begin{aligned} K &= K_1\,\xi + K_2 \\ L &= L_2\,\xi + L_3 \\ M &= M_3\,\xi + M_4\,, \end{aligned}$$

wo die K_i, L_i homogene Functionen von ξ, η sind, deren Ordnung der Index anzeigt. Eliminirt man also ξ mit Hülfe von $K = 0$, so erhält man aus (14):

$$(15) \qquad \begin{aligned} \sigma\,X &= 2\xi\,(L_2\,K_2 - L_3\,K_1) \\ \sigma\,Y &= 2\eta\,(L_2\,K_2 - L_3\,K_1) \\ \sigma\,Z &= \quad M_3\,K_2 - M_1\,K_1, \end{aligned}$$

die Gleichungen einer Curve 5^{ter} Ordnung vom Geschlechte $p = 0$, welche das Bild des Kegelschnitts $K = 0$ ist, sofern derselbe dem andern Blatte der Doppelebene angehört. Diese Curve hat einen 4fachen Punkt $X = 0$, $Y = 0$; denn es wird $X = 0$, $Y = 0$, sobald

$$L_2\,K_2 - L_3\,K_1 = 0,$$

was für 4 Werthe von $\frac{\xi}{\eta}$ geschieht. Dieser 4fache Punkt liefert in der That die nöthige Erniedrigung von p.

Einer Geraden der einfachen Ebene entspricht die Curve 4^{ter} Ordnung (11) oder

$$(16) \qquad M' = M + 2\,(\alpha\,\xi + \beta\,\eta)\,L + (\alpha\,\xi + \beta\,\eta)^2\,K = 0,$$

und zwar nur in einem Blatte, indem nach (11) zugleich

$$\sqrt{\Omega} = L + (\alpha\,\xi + \beta\,\eta)\,K.$$

Im andern Blatte stellt $M' = 0$ eine Curve vor, welche nach (12) durch die Gleichungen

$$\varrho X = \xi K \quad , \quad \varrho Y = \eta K \quad , \quad \varrho Z = 2L + (\alpha\xi + \beta\eta)\,K$$

gegeben ist, wenn man wieder ξ mit Hülfe von (16) eliminirt, also durch die Gleichungen:

$$(17) \qquad \begin{cases} \varrho X = \xi\,\{(M_4 K_1 - M_3 K_2) + 2(\alpha\xi + \beta\eta)\,(L_3 K_1 - L_2 K_2)\} \\ \varrho Y = \eta\,\{(M_4 K_1 - M_3 K_2) + 2(\alpha\xi + \beta\eta)\,(L_3 K_1 - L_2 K_2)\} \\ \varrho Z = (\alpha\xi + \beta\eta)\,(M_4 K_1 - M_3 K_2) + 2\,(M_1 L_2 - M_3 L_3); \end{cases}$$

sie stellen eine Curve 6^{ter} Ordnung dar, welche $X = 0$, $Y = 0$ zum 5fachen Punkte hat.

Eine Gerade der Doppelebene stellt ein zusammenhängendes Gebilde dar, und schneidet also die Curve $M' = 0$ in demjenigen Blatte, in welchem sie eine Gerade der einfachen Ebene darstellt, 4 mal. Daher muss einer Geraden der Doppelebene auch eine Curve 4^{ter} Ordnung in der einfachen entsprechen, welche mit der zu $M' = 0$ gehörigen Geraden sich in 4 Punkten trifft.

§ 11.

Umkehrung der Abbildungsgleichung für diesen Fall.

Es ist leicht die Formeln für die Umkehrung der Abbildung aufzustellen. Bezeichnet man durch K, Λ, M das, was aus K, L, M wird, wenn man darin statt der ξ, η, ζ die X, Y, Z setzt, so hat man aus (12):

$$\xi = \sigma X, \qquad \eta = \sigma Y, \qquad \varrho = \sigma^2 (\mathsf{K}_1 \xi - \sigma \mathsf{K}_2). \tag{18}$$

Aus der 3ten Gleichung (12) aber, welcher man die Form

$$\varrho^2 Z^2 - 2\varrho Z L + KM = 0$$

geben kann, folgt dann

$$Z^2 (\mathsf{K}_1 \xi + \sigma \mathsf{K}_2) - 2Z (\Lambda_2 \xi + \sigma \Lambda_3) + (\mathsf{M}_3 \xi + \sigma \mathsf{M}_4) = 0,$$

oder

$$\xi = -\sigma \frac{Z^2 \mathsf{K}_2 - 2Z\Lambda_3 + \mathsf{M}_4}{Z^2 \mathsf{K}_1 - 2Z\Lambda_2 + \mathsf{M}_3}. \tag{19}$$

Man kann also diesen Umkehrungsgleichungen die Form geben:

$$\left\{\begin{aligned} \varrho \xi &= X (Z^2 \mathsf{K}_1 - 2Z\Lambda_2 + \mathsf{M}_3) \\ \varrho \eta &= Y (Z^2 \mathsf{K}_1 - 2Z\Lambda_2 + \mathsf{M}_3) \\ \varrho \zeta &= -(Z^2 \mathsf{K}_2 - 2Z\Lambda_3 + \mathsf{M}_4) \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Die Gleichungen (20) zeigen, dass in der That den Geraden der Doppelebene Curven 4ter Ordnung entsprechen, nämlich das System

$$(uX + vY)(Z^2 \mathsf{K}_1 - 2Z\Lambda_2 + \mathsf{M}_3) - w(Z^2 \mathsf{K}_2 - 2Z\Lambda_3 + \mathsf{M}_4) = 0. \tag{21}$$

Die Curven dieses Systems haben in $X = 0$, $Y = 0$ einen festen Doppelpunkt, und haben ausserdem die Punkte gemein, in denen die Curven

$$\left\{\begin{aligned} Z^2 \mathsf{K}_1 - 2Z\Lambda_2 + \mathsf{M}_3 &= 0 \\ Z^2 \mathsf{K}_2 - 2Z\Lambda_3 + \mathsf{M}_1 &= 0 \end{aligned}\right. \tag{22}$$

sich noch treffen. Das System ist durch diese Eigenschaften vollkommen charakterisirt.

Für die 10 einfachen Fundamentalpunkte hat man die Gleichung 10ten Grades zur Bestimmung von $\frac{X}{Y}$:

$$(\mathsf{K}_1 \mathsf{M}_4 - \mathsf{K}_2 \mathsf{M}_3)^2 - 4(\mathsf{K}_1 \Lambda_3 - \mathsf{K}_2 \Lambda_2)(\Lambda_2 \mathsf{M}_4 - \Lambda_3 \mathsf{M}_3) = 0; \tag{23}$$

alle diese Punkte sowie der Punkt $X = 0$, $Y = 0$ (der doppelte Fundamentalpunkt der Abbildung) liegen auf der Curve 3ter Ordnung

$$N = Z^2 \mathsf{K}_1 - 2Z\Lambda_2 + \mathsf{M}_3 = 0, \tag{24}$$

welche nach (20) das Bild des einfachen Punkts $\xi = 0$, $\eta = 0$ der Uebergangscurve ist.

Bildet man die Ausdrücke K, L, M mit Hülfe der Gleichungen (18), (19), so erhält man, indem der Kürze wegen

$$a = \Lambda_2 M_4 - \Lambda_3 M_3$$

(25) $$2b = K_2 M_3 - K_1 M_4$$

$$c = \Lambda_3 K_1 - \Lambda_2 K_2$$

gesetzt wird:

(26) $$\begin{cases} K = \frac{2\sigma^2}{N}(cZ + b) \\ L = \frac{\sigma^3}{N}(cZ^2 - a) \\ M = -\frac{2\sigma^4}{N}(bZ^2 + aZ); \end{cases}$$

daher wird aus (9), (11):

(27) $$M' = -\frac{2\sigma^4}{N}(Z + \alpha X + \beta Y)\{a + b(Z - \alpha X - \beta Y) - cZ(\alpha X + \beta Y)\}$$

(28) $$\sqrt{\Omega} = \sqrt{L^2 - MK} = \pm\frac{\sigma^3}{N}(a + 2bZ + cZ^2) \,.$$

$$= \pm\frac{\sigma^3}{N}\begin{vmatrix} 1 & K_1 & K_2 \\ Z & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ Z^2 & M_3 & M_4 \end{vmatrix}.$$

Die Gleichung (28) liefert das Bild der Uebergangscurve; eine Curve 6ter Ordnung, welche $X = 0$, $Y = 0$ zum 4 fachen Punkte hat, analog der Uebergangscurve selbst. Durch die 10 einfachen Fundamentalpunkte geht die Curve hindurch, denn aus (22) folgt für diese

(29) $$Z^2 : Z : 1 = a : -b : c,$$

während durch die Bezeichnung (25) sich (23) in

(30) $$ac - b^2 = 0$$

verwandelt. Eben darin aber geht auch die Determinante (28) durch die Gleichungen (9) über, und wird also für die Fundamentalpunkte erfüllt.

Die Gleichung (27) lehrt, wie die Berührungscurven $M' = 0$, als in dem einen Blatt enthalten, sich durch Gerade, als im andern enthalten sich durch Curven 6ter Ordnung abbilden, mit 5 fachem Punkte in $X = 0$, $Y = 0$, wie auch (15) zeigte. Aus (29) sieht man, dass sie durch die Fundamentalpunkte gehen.

Der Kegelschnitt $K = 0$ geht in $cZ + b = 0$ über, eine Curve 5ter Ordnung mit 4 fachem Punkte in $X = 0$, $Y = 0$; es ist die Curve (17). Auch sie geht wegen (29), (30) durch die Fundamentalpunkte.

Dass dem Kegelschnitte K, sofern derselbe in dem andern Blatte liegt, der Punkt $X = 0$, $Y = 0$ entspricht, ist schon oben gezeigt worden. Den 10 einfachen Fundamentalpunkten entsprechen nach den allgemeinen Principien der Abbildungstheorie gerade Linien, welche auf der Doppelebene, immer nur in einem Blatte, liegen. Ihren im

andern Blatte liegenden Ergänzungen entsprechen die Verbindungslinien des Punktes $X=0$, $Y=0$ mit dem zugehörigen einfachen Fundamentalpunkte. Jeder durch $\xi = 0$, $\eta = 0$ gehenden Geraden der Doppelebene entspricht nämlich eine solche, welche durch $X = 0$, $Y = 0$ geht, zusammen mit der Curve $N = 0$, dem Bilde des 4 fachen Punktes der Uebergangscurve. Aber die durch § 2. gehende Gerade hört auf in beiden Blättern der Doppelebene ein zusammenhängendes Gebilde darzustellen, sobald sie zur Tangente der Uebergangscurve wird. Die 10 von ξ, η an die Uebergangscurve zu ziehenden Tangenten erhält man aus dem Verschwinden der nach ζ genommenen Discriminante der Uebergangscurve, also, da

$$\Omega = (L_2 \xi + L_3)^2 - (M_3 \xi + M_4)(K_1 \xi + K_2)$$

ist, aus der Gleichung:

$$(K_1 M_4 - K_2 M_3)^2 - 4 (K_1 L_3 - K_2 L_2)(L_2 M_4 - M_3 L_3) = 0.$$

Durch (18) geht diese in (23) über; den Tangenten entsprechen also die von $X = 0$, $Y = 0$ nach den 10 Fundamentalpunkten gezogenen Geraden, zusammen mit diesen Fundamentalpunkten selbst.

Die 256 verschiedenen Abbildungen, welche den verschiedenen Kegelschnitten K zugeordnet werden, sind also auch diesen Tangenten der Uebergangscurve in gewissem Sinne zugeordnet; die verschiedenen Abbildungen unterscheiden sich nur dadurch von einander, dass die den beiden Blättern angehörigen Theile der Tangente verschieden auf Punkte und Gerade der einfachen Ebene vertheilt sind. Dabei ist es als keine neue Abbildung zu rechnen, wenn in dieser Beziehung *alle* in den Tangenten vereinigten Paare ihre Rollen gewechselt haben; dies involvirt nur eine Vertauschung der an und für sich unterschiedslosen Blätter der Doppelebene, deren Berücksichtigung überhaupt immer eine Verdoppelung der Zahl der Abbildungen liefern würde. Nimmt man die verdoppelte Zahl 2^9, so sieht man, dass von 9 der Tangenten es beliebig sein muss, in welchem Blatte sie genommen werden, bei der zehnten aber nicht mehr.

Wenn man nur auf die Fläche 4^{ter} Ordnung mit einer Doppelcurve 2^{ten} Grades zurückgeht, wie sie durch die Gleichungen (1), (2), (3) § 10. dargestellt wird, so sieht man, dass in diesem Falle durch die Gleichung

$$u_0 \xi^2 + 2 v_0 \xi \eta + w_0 \eta^2 = 0$$

zwei der 10 Tangenten, welche man von $\xi = 0$, $\eta = 0$ an $\Omega = 0$ ziehen kann, gegeben sind, und zwar so, dass sie in einem Blatte dem Punkte $x = 0$, $y = 0$, $p = 0$, dem Projectionspunkte, entsprechen. In diesem Falle sind also die Blätter getrennt. Unter den 2^9 Abbildungen sind aber diejenigen die niedrigsten zur Abbildung der *Fläche*, bei welcher der Projectionspunkt sich durch 2 *Punkte* abbildet,

wo also die beiden genannten Tangenten, und zwar jedesmal in dem Blatte, wo sie den Projectionspunkt darstellen, Fundamentalpunkten zugeordnet werden. Dies giebt die $2^7 = 128$ Abbildungen, welche ich im ersten Bande der Annalen untersucht habe.

§ 12.

Flächen 5ter Ordnung mit einer Doppelcurve 4ten Grades.

Die Theorie der Flächen 5ter Ordnung mit einer Doppelcurve 4ten Grades habe ich im 15ten Bande der Abhandlungen der Gesellschaft der Wissensch. zu Göttingen gegeben, und zwar gerade indem ich die Fläche zunächst auf eine Doppelebene projicirte. Ich kann mich daher hier kürzer fassen, indem ich mich auf die gedachte Abhandlung beziehe.

Wenn eine Fläche 5ter Ordnung, ohne geradlinig zu sein, eine Doppelcurve 4ten Grades enthalten soll, so muss diese von der 1ten Sp. sein. Die Fläche enthält dann einen ausgezeichneten Punkt Π, welchen ich die Kegelspitze nenne. Jede Gerade, welche von Π ausgeht, trifft die Fläche in 4 Punkten, welche zwei Paare bilden; diese Paare gehören zwei Kegelschnitten einer Schaar an, welche ganz auf der Fläche liegt und diese bildet. Die Ebenen der Kegelschnitte umhüllen einen Kegel, dessen Spitze Π ist; sie sind doppelt berührende Ebenen der Fläche.

Wenn man nun zu Π und den Punkten eines solchen Paares den 4ten harmonischen Punkt Π' sucht, so bilden die Punkte Π' eine geradlinige Fläche 3ten Grades. Bildet man sie auf einer Ebene ab, was bekanntlich im Wesentlichen nur auf eine Weise geschieht, so ist zugleich die Fläche 5ter Ordnung auf einer Doppelebene abgebildet, indem jedem Punkte Π' ein Punktpaar der gegebenen Fläche zugeordnet ist. Die Formeln für diese Abbildung werden:

$$(1) \qquad \begin{cases} \varrho x = \eta\,\xi\, W \\ \varrho y = -\frac{\eta+\xi}{2}\,\xi\, W \\ \varrho z = \xi^2 W \\ \varrho t = -V + \sqrt{V^2 - UW}. \end{cases}$$

Dabei ist $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ die Kegelspitze, $t = 0$ eine beliebige nicht durch sie gehende Ebene; es sind insbesondere $x = 0$, $z = 0$ zwei Tangentenebenen des gedachten Kegels, $y = 0$ die Ebene, welche ihre Berührungsseiten verbindet. W ist eine homogene Function 1ter Ordnung von ξ, η, V und U sind Funetionen 3ter und 5ter Ordnung, welche η beziehungsweise nur quadratisch und cubisch, ξ linear und quadratisch enthalten.

Die Kegelschnitte der Schaar bilden sich als die durch $\xi = 0$, $\eta = 0$ gehenden Geraden ab, welche immer in dem Blatt zu nehmen sind, wo sie das Bild der Kegelspitze nicht schneiden. Diese selbst ist in einem Blatte durch $W = 0$ abgebildet, eine ausgezeichnete durch $\xi = 0$, $\eta = 0$ an die Uebergangscurve gelegte Tangente, während $W = 0$ im andern Blatte die durch die Kegelspitze gehenden Kegelschnitte der Schaar repräsentirt. Der in der Ebene $\eta = 0$ liegende Kegelschnitt ist willkürlich ausgezeichnet, und bildet sich durch den Punkt $\xi = 0$, $\zeta = 0$ ab; $\xi = 0$ aber stellt je nach dem Blatte der Doppelebene, in welchem man es nimmt, einen der beiden Punkte dieses Kegelschnitts dar, welche auf der durch seine Ebene bestimmten Berührungsseite des Kegels liegen ($\eta = 0$, $\zeta = 0$). Der Punkt $\xi = 0$, $\eta = 0$ endlich repräsentirt die Curve 3^{ter} Ordnung, in welcher die Fläche 5^{ter} Ordnung von der Ebene $z = 0$ ausserdem noch geschnitten wird.

Die Uebergangscurve entspricht der Berührungscurve des von der Kegelspitze aus an die Fläche gelegten einfachen Tangentenkegels. Sie ist von der 6^{ten} Ordnung, mit einem 4fachen Punkte P bei $\xi = 0$, $\eta = 0$, und einem Doppelpunkt Q bei $\xi = 0$, $\zeta = 0$, und ist also ein besonderer Fall der im Vorigen betrachteten. Lassen wir für den Augenblick die Beziehungen der Doppelebene zu der Fläche ganz bei Seite, und betrachten nur die Modificationen, welche die im Vorigen geschilderte Abbildung der Doppelebene in dem vorliegenden Falle erfährt.

An Stelle der Kegelschnitte $K = 0$, welche durch die 4fachen Punkte gingen und $\Omega = 0$ in 4 Punkten berührten, treten hier Kegelschnitte $K = 0$, welche durch P und Q gehen, und welche $\Omega = 0$ noch in 3 Punkten berühren. Ihre Zahl ist $2^{2\nu} = 64$. Auch die Zahl der von P an $\Omega = 0$ zu ziehenden Tangenten vermindert sich um 2, so dass nur 8 übrig bleiben.

Durch die Berührungspunkte eines der 64 Kegelschnitte $K = 0$ und durch P, Q legen wir jetzt die Schaar von Curven 3^{ter} Ordnung $L' = 0$, welche P zum Doppelpunkt hat. Ist $L = 0$ eine derselben, so hat man

$$\Omega = L^2 - KM = L'^2 - KM',$$

wo

$$L' = L + mK, \qquad M' = M + 2mL + m^2K.$$

Die Curven $M' = 0$ haben P zum dreifachen Punkt, gehen durch Q, und berühren $\Omega = 0$ noch in 5 Punkten.

Sehen wir nun, welche Modificationen die Formeln des § 10. und 11. erleiden. Es müssen die Ausdrücke K, L, M hier für Q, d. h. für $\xi = 0$, $\zeta = 0$ verschwinden; an Stelle der Gleichungen (14) treten also folgende:

$$(2)\qquad \begin{cases} K = K_1\,\xi + K_1'\,\xi \\ L = L_2\,\xi + L_2'\,\xi \\ M = M_3\,\xi + M_3'\,\xi, \end{cases}$$

wo die K, K' etc. homogene Functionen von ξ, η sind, deren Ordnung der Index ergiebt. Während also die directen Formeln für die Abbildung auf der einfachen Ebene (12. p. 66) jetzt lauten:

$$(3)\qquad \begin{cases} \varrho\, X = \xi\,(K_1\,\xi + K_1'\,\xi) \\ \varrho\, Y = \eta\,(K_1\,\xi + K_1'\,\xi) \\ \varrho\, Z = (L_2\,\xi + L_2'\,\xi) - \sqrt{\Omega}, \end{cases} \qquad \text{wo}$$

$$(4)\qquad \Omega = (L_2\,\xi + L_2'\,\xi)^2 - (K_1\,\xi + K_1'\,\xi)\,(M_3\,\xi + M_3'\,\xi),$$

so werden die umgekehrten:

$$(5)\qquad \begin{cases} \varrho\,\xi = X\,(Z^2\,\mathsf{K}_1 - 2\,Z\,\Lambda_2 + \mathsf{M}_3) \\ \varrho\,\eta = Y\,(Z^2\,\mathsf{K}_1 - 2\,Z\,\Lambda_2 + \mathsf{M}_3) \\ \varrho\,\zeta = Z\,(Z^2\,\mathsf{K}_1' - 2\,Z\,\Lambda_2' + \mathsf{M}_3'), \end{cases}$$

wo wieder K, K′ etc. die Ausdrücke bedeuten, in welche K, K' etc. übergehen, wenn darin ξ, η durch X, Y ersetzt werden.

In der einfachen Ebene existiren auch hier ausser dem doppelten Fundamentalpunkte $X = 0$, $Y = 0$, noch 10 einfache, aber dieselben haben hier eine besondere Lage. Zwei derselben sind die Schnitte von $X = 0$ mit der durch $X = 0$, $Y = 0$ gehenden Curve 3ter Ordnung

$$(6)\qquad Z^2\,\mathsf{K}_1 - 2\,Z\,\Lambda_2 + \mathsf{M}_3 = 0,$$

die 8 andern sind die von $X = 0$, $Y = 0$ verschiedenen Schnittpunkte dieser Curve mit

$$(7)\qquad Z^2\,\mathsf{K}_1' - 2\,Z\,\Lambda_2' + \mathsf{M}_3' = 0.$$

Die ersten beiden geben $\xi = 0$; sie sind also die Bilder der beiden in den Blättern der Doppelebene durch diese Gleichung dargestellten Geraden. Dagegen giebt die Gerade $X = 0$ aus (5) $\xi = 0$, $\zeta = 0$, also das Bild des Punktes Q. Die 8 andern einfachen Fundamentalpunkte entsprechen, wie früher, den von P an $\Omega = 0$ gezogenen Tangenten, jede in einem Blatte genommen, während dieselbe, als dem andern Blatte angehörig, durch die Verbindungslinie des betreffenden einfachen mit dem doppelten Fundamentalpunkte dargestellt wird.

Gehen wir nun zu der Fläche 5ter Ordnung zurück. Während die Doppelebene bei den 64 Abbildungen, welche den 64 Kegelschnitten $K = 0$ entsprechen, noch eine Vertauschung der Blätter gestattete, wird man bei der Darstellung der Fläche, bei welcher die Doppelebene nur einen Durchgang bildet, es immer so einrichten, dass man das Bild der Kegelspitze ($W \neq 0$ in einem Blatt) einem Fundamental-

punkte entsprechen lässt; wobei denn immer noch 64 Abbildungen möglich sind.

Um die letzten Abbildungsgleichungen abzuleiten, setzt man die Werthe der ξ, η, ζ aus (5) in (1) ein. Bezeichnet man der Kürze wegen durch N, N' die Ausdrücke

$$N = Z^2 \mathsf{K}_1 - 2 Z \mathsf{\Lambda}_2 + \mathsf{M}_3$$
$$N' = Z^2 \mathsf{K}_1' - 2 Z \mathsf{\Lambda}_2' + \mathsf{M}_3',$$

so hat man aus (5):

$$\varrho^2 K = X N \,(\mathsf{K}_1' N - \mathsf{K}_1 N')$$
$$\varrho^3 L = X N^2 (\mathsf{\Lambda}_2' N - \mathsf{\Lambda}_2 N')$$
$$\varrho^4 M = X N^3 (\mathsf{M}_3' N - \mathsf{M}_3 N'),$$

oder, wenn man

$$a = \mathsf{\Lambda}_2 \mathsf{M}_3' - \mathsf{\Lambda}_3 \mathsf{M}_2'$$
$$2b = \mathsf{K}_1' \mathsf{M}_3 - \mathsf{K}_1 \mathsf{M}_3'$$
$$c = \mathsf{\Lambda}_2' \mathsf{K}_1 - \mathsf{\Lambda}_2 \mathsf{K}_1'$$

setzt:

$$\varrho^2 K = 2 X N \,(c Z + b)$$
$$\varrho^3 L = X N^2 (c Z^2 - a)$$
$$\varrho^4 M = -2 X N^3 (b Z^2 + a Z),$$

daher

$$\varrho^3 \sqrt{\Omega} = \pm X N^2 (a + 2bZ + c Z^2)$$
$$= \pm X N^2 \begin{vmatrix} 1 & \mathsf{K}_1 & \mathsf{K}_1' \\ Z & \mathsf{\Lambda}_2 & \mathsf{\Lambda}_2' \\ Z^2 & \mathsf{M}_3 & \mathsf{M}_3' \end{vmatrix}.$$

Zugleich wird ϱW und $\varrho^3 V$ von der Form

$$\varrho W = (p X + q Y) N$$
$$\varrho^3 V = N^2 X (R_2 N - R_2' N'),$$

wo R_2, R_2' homogene Functionen 2^{ter} Ordnung von X, Y sind. Die Gleichungen (1) verwandeln sich hierdurch in rationale, welche rechts den gemeinsamen Factor $X N^2$ zeigen, mit dessen Hinweglassung sie in folgende übergehen:

$$(8) \qquad \begin{aligned} \sigma x &= -Y N' (p X + q Y) \\ \sigma y &= \tfrac{1}{2} (Y N - X N') (p X + q Y) \\ \sigma z &= X N (p X + q Y) \\ \sigma t &= -(R_2 N + R_2' N') \pm (a + 2bZ + c Z^2). \end{aligned}$$

Nimmt man nun in der letzten Gleichung das richtige Zeichen, wodurch bei dem Uebergange von der Doppelebene zur einfachen $W = 0$ in demjenigen Blatt sich als Fundamentalpunkt abbildet, in welchem es der Kegelspitze entspricht, so muss $-V + \sqrt{\Omega}$ mit W verschwin-

den, also die rechte Seite der 4ten Gleichung (8) durch $p\,X + q\,Y$ theilbar sein. Setzt man also

$$-(R_2\,N + R_2'\,N') \pm (a + 2bZ + c\,Z^2) = (p\,X + q\,Y)\,\Theta\,,$$

so werden die Abbildungsgleichungen:

$$\begin{aligned} \sigma x &= -\,Y\,N' \\ \sigma y &= \frac{YN - XN'}{2} \\ \sigma z &= X\,N \\ \sigma t &= \Theta\,. \end{aligned}$$

Die Abbildungsfunctionen sind von der 4ten Ordnung, $X = 0$, $Y = 0$ ist ein gemeinsamer Doppelpunkt der Abbildungen ebener Schnitte. Aber auch diejenigen 7 Schnittpunkte von $N = 0$ $N' = 0$ geben noch einfache Fundamentalpunkte, für welche nicht $p\,X + q\,Y = 0$. Dass dies für einen Schnittpunkt geschieht, folgt daraus, dass $W = 0$ eine der von M an die Uebergangscurve gezogenen Tangenten war; durch die Division mit $p\,X + q\,Y$ ist aber dieser Fundamentalpunkt ausgefallen.

Bei diesen 64 Abbildungen werden also die ebenen Schnitte durch Curven 4ter Ordnung mit einem doppelten und 7 einfachen Fundamentalpunkten dargestellt. Dies sind die Abbildungen, deren Eigenschaften ich in der angeführten Abhandlung ausführlicher dargelegt habe*).

Göttingen, den 12. Mai 1870.

*) Den Flächen, welche mittelst einer Doppelebene mit einer Uebergangscurve 4ter Ordnung behandelt werden können, schliesst sich noch eine Classe von Flächen 5ter Ordnung an, deren Theorie bisher nicht entwickelt ist. Diese Flächen haben eine Doppelcurve 5ten Grades, welche einen dreifachen Punkt besitzt, der zugleich ein dreifacher Punkt der Fläche ist. Die Abbildung auf der einfachen Ebene führt auf Abbildungsfunctionen 3ter Ordnung mit 4 einfachen Fundamentalpunkten. Jede solche Fläche enthält ein interessantes System von 10 Geraden; dieselben bilden in ähnlicher Weise *Doppeldreien*, wie Herr Schläffli bei den Flächen 3ter Ordnung *Doppelsechsen* gefunden hat, und ich selbst *Doppelvieren* bei den Flächen 4ter Ordnung mit einem Doppelkegelschnitt.

Ueber die römische Fläche von Steiner.

Von Rud. Sturm in Bromberg.

Vor einigen Jahren erschienen in rascher Aufeinanderfolge mehrere Abhandlungen über die sogenannte römische Fläche von Steiner. Herr Kummer hatte in einer im Juli 1863 in der Berliner Academie vorgelesenen und im Monatsberichte veröffentlichten Abhandlung die Flächen 4. Ordnung besprochen, auf welchen Schaaren von Kegelschnitten liegen. Unter denselben hatte sich eine Art Flächen ergeben, welche 3 in einen Punkt zusammenlaufende Doppelgeraden besitzen und in Folge dessen die Eigenschaft haben, von jeder Berührungsebene in einem Kegelschnittpaare geschnitten zu werden. Herr Kummer schloss der Betrachtung dieser Fläche die Bemerkung an, dass (der kurz vorher verstorbene) Steiner dieselbe vor einer Reihe von Jahren — nach Herrn Weierstrass' genauerer Mittheilung etwa 25 Jahren — entdeckt und eine Construction derselben Herrn Weierstrass mitgetheilt habe. In einer Note, welche der Abhandlung des Herrn Kummer folgt, setzt dieser die Erzeugung auseinander und auf Grund derselben haben die Herren Schröter*) und Cremona**) die Steiner'sche Fläche in zwei umfangreicheren synthetischen Abhandlungen untersucht. Eine analytische Note des Herrn Cayley***) schloss die erste Reihe der Publicationen über diese Fläche. Der berühmte Analytiker Herr Clebsch eröffnete die zweite Reihe mit einer Abhandlung†), welche auf der Eigenschaft der Fläche, auf eine Ebene sich abbilden zu lassen, basirt. Herr Cremona††) nahm die Fläche zum zweiten Male vor und führte die Abbildung des Herrn Clebsch

*) Monatsbericht der Berliner Academie Nov. 1863. Diese Abhandlung, so wie die der Herren Kummer und Weierstrass wurden später im Journale von Crelle-Borchardt abgedruckt, Bd. 64. S. 66, 77 u. 79.

**) Journal von Crelle-Borchardt Bd. 63. S. 315.

***) Ebenda, Bd. 64. S. 172.

†) Ebenda, Bd. 67. S. 1.

††) Rappresentazione della superficie di Steiner etc. sopra un piano, Rendiconti del R. Istituto Lombardo, 1867.

nach synthetischer Methode durch; Herr Reye*) gab darauf eine Construction der Fläche an, durch welche sich die Abbildung unmittelbar ergiebt. Schliesslich widmete Herr Cremona der Steiner'schen Fläche in seiner Preisschrift über die Flächen 3. Ordnung**) die Bemerkung, dass sie zu der reinen Polarfläche einer Ebene in Bezug auf eine (allgemeine) Fläche 3. Ordnung reciprok sei. Diese Reciprocität führte mich, indem ich jene Polarfläche nur als einen Typus der Flächen 3. Ordnung mit 4 Knotenpunkten ansah, deren Construction von mir anderwärts***) besprochen worden ist, *zu einer neuen Erzeugung der Steiner'schen Fläche*, bei welcher sie durch Ebenen eingehüllt wird und also ihre *Classe* mehr in den Vordergrund tritt. Als Fläche 3. Classe ist sie auch nicht von so bedeutender Specialität. Bisher ist sie, obgleich die Eigenschaft, um derentwillen sie von Herrn Kummer hervorgehoben wurde, sich auf ihre Berührungsebenen bezieht, stets als geometrischer Ort von Punkten betrachtet und also ihrer Ordnung der Vorzug gegeben worden. Da nun überhaupt bis jetzt die Flächen meistens so betrachtet worden sind, dass von ihrer Ordnung ausgegangen wurde, so dürfte es vielleicht doch nicht überflüssig sein, eine wenn auch schon vielfach untersuchte Fläche nochmals und zwar von der vernachlässigten Seite der Classe aus zu besprechen. Die Erzeugung also derselben durch Einhüllung von Ebenen soll uns im ersten Theile der folgenden Abhandlung beschäftigen, zwei specielle Fälle der Steiner'schen Fläche sollen den Gegenstand des zweiten Theiles bilden; der dritte wird es mit der Geometrie auf dieser Fläche zu thun haben, vorzugsweise mit den Curven 4. Ordnung, die sich auf ihr befinden.

I.

1. *Es sei eine Flächenschaar* 2. *Classe* S (F_2^x) *gegeben, d. h. eine Reihe von Flächen* 2. *Grades, welche* 8 *beliebige Ebenen und in Folge dessen sämmtliche Ebenen* †) *einer abwickelbaren Fläche* 4. *Classe* D_4 *berühren* ††). Jede andere Ebene wird nur von einer Fläche der Schaar berührt, jede Gerade, welche nicht Generatrix von D_4 ist, von 2 Flächen, durch jeden Punkt gehen 3 Flächen der Schaar. *Zu der*

*) Geometrie der Lage, Abth. II. S. 246.

**) Journal von Crelle-Borchardt, Bd. 68. S. 1 (ob. Bem. S. 49).

***) Synthetische Untersuchungen über die Flächen 3. Ordnung (welche ich fernerhin kurz mit „Fl. 3. O." bezeichnen will) Nr. 5, 6, 117 und 123.

†) Ich glaube, es kann nicht falsch verstanden werden, wenn man statt „Berührungsebene einer Fläche" auch blos „Ebene der Fläche" sagt.

††) Ausführlichere (analytische) Untersuchungen über eine solche Schaar hat Herr Cremona gemacht: Annali di matematica Serie I. Tomo II. Marzo e Aprile 1859: Intorno alle superficie della seconda classe inscritte in una stessa superficie sviluppabile della quarta classe.

Schaar gehören 4 *Kegelschnitte* Q (Grenzflächen des Herrn Hesse), deren Ebenen das gemeinsame conjugirte Quadrupel für alle Flächen der Schaar bilden. Durch jede Tangente eines solchen Kegelschnitts gehen 2 Ebenen von D_4, die nämlich, welche von der Tangente (tangential) an irgend eine andere Fläche der Schaar gelegt sind, z. B. an einen zweiten der 4 Kegelschnitte, so dass demnach auch von jedem Punkte eines Kegelschnitts Q zwei Generatricen von D_4 aus gehen (also die Kegelschnitte Q die Doppelcurve auf D_4 bilden), denn die Gerade, welche die Berührungspunkte einer Ebene von D_4 mit zweien der Kegelschnitte Q verbindet, ist eine Generatrix von D_4. Auf ihr liegen auch die Punkte, in denen die Ebene von allen übrigen Flächen der Schaar berührt wird, und in jedem Punkte der Generatrix berührt nur eine Fläche. *Bezieht man* also *die Punktreihe einer Generatrix von* D_4 *auf die einer beliebigen Geraden, so ist die Punktreihe dieser Geraden auf die Schaar der Flächen bezogen. Legt man nun von jedem Punkte der Geraden an seine entsprechende Fläche den Kegel* (= *Tangentialkegel*), *so hüllen diese sämmtlichen Kegel oder, was dasselbe ist, ihre* (*Berührungs-*) *Ebenen eine allgemeine Fläche* 3. *Classe ein*; denn diese Erzeugung ist reciprok zu der zweiten Steiner'schen Erzeugungsweise der Flächen 3. Ordnung. *)

2. *Lassen wir nun die Gerade* G *sich auf* 2 *der Kegelschnitte* Q, Q' *und* Q'', *stützen und zwar im Allgemeinen in* 2 *Punkten* ω' *und* ω'', *deren Tangenten* B' *und* B'' *an* Q' *resp.* Q'' *einander nicht treffen, und lassen wir dann ausserdem noch bei der projectivischen Beziehung jeden der beiden Punkte* ω *dem Kegelschnitte* Q *entsprechen, auf dem er liegt, so wird die obige Erzeugung die Steiner'sche Fläche* F_3 *geben, eine Fläche* 3. *Classe mit* 4 *Doppel-* (*tangenten*)*ebenen.* **) Im Allgemeinen liegt G nicht in einer Ebene von D_4; wäre dies der Fall, so müssten ω' und ω'' deren Berührungspunkte mit Q' und Q'' sein, also die Tangenten B' und B'' lägen in einer Ebene, was nach dem Obigen nicht vorausgesetzt wird. Jede Ebene durch G berührt aber sicher *eine* (einzige) Fläche F_2^x der Schaar, andererseits geht sie durch deren entsprechenden Punkt a^x auf G, also ist sie eine Ebene von F_3. Der Kegel 2. Grades (Classe) C_2^x von a^x an F_2^x setzt ersichtlich mit dem Büschel G den Kegel 3. Classe C_3^x von a^x an F_3 zusammen. Wir setzen natürlich noch viel weniger voraus, dass G auf allen Flächen der Schaar S liege (D_4 würde dann auch nicht mehr allgemein sein, sondern in das Büschel G und eine abwickelbare Fläche 3. Klasse,

*) Fl. 3. O. Nr. 5.

**) Auf eine Erzeugung der Steiner'schen Fläche durch Einhüllung von Ebenen, die ein specieller Fall der obigen ist, macht Herr Geiser aufmerksam: Journal von Crelle-Borchardt, Bd. 69. S. 197 XI.

welche mit G zwei Ebenen gemein hat, zerfallen), mithin wird der Kegel C_2^x gewiss nicht für alle Punkte a^x in das Büschel G und ein zweites sich auflösen. Weil also im Allgemeinen C_2^x nicht theilweise mit G zusammenfällt, so ist dieses Büschel G nicht ein Doppelebenenbüschel (Doppelbüschel) von F_3. Da G nicht in einer Ebene von D_4 liegt, so bilden die Paare der von G an die einzelnen Flächen F_2^x gelegten Ebenen, also der gemeinsamen Ebenen des Büschels und der einzelnen Kegel C_2^x eine ordentliche Involution, sie ändern sich von Fläche zu Fläche oder von Kegel zu Kegel; jede Ebene durch G wird nur von einem Kegel C_2^x berührt. Wollten wir nun annehmen, es gäbe durch G einzelne Doppelebenen von F_3, so würde eine solche Ebene einen einzigen Kegel C_2^x berühren, folglich für einen einzigen Kegel C_3^x Doppelebene sein, ohne Doppelebene von C_2^x zu sein. Sie müsste aber doch Doppelebene für alle Kegel C_3^x sein, also weil sie dem Büschel G angehört, auch deren Kegeln C_2^x angehören, was nicht der Fall ist. Es ergiebt sich demnach, dass keine Ebene durch G eine Doppelebene von F_3 ist, und daraus wiederum, dass die gemeinsamen Ebenen von G und C_2^x, da sie Doppelebenen von C_3^x sind, ohne Doppelebenen von F_3 zu sein, im Punkte a^x die Fläche F_3 berühren; folglich hat jeder Punkt a^x auf G zwei Berührungsebenen T_1^x und T_2^x; *die Gerade G ist eine Doppelgerade auf F_3, die Paare der Berührungsebenen desselben Punkts bilden eine Involution J.* Doppelpunkte einer Fläche, die einer Doppelcurve angehören und also eine continuirliche Reihe bilden, sind stets *biplanar*,*) d. h. ihr Anschmiegungskegel 2. Ordnung zerfällt in 2 Ebenen, hier T_1^x und T_2^x.

3. Die Tangenten B' und B'' an Q' und Q'' in ω' und ω'' schneiden sich im Allgemeinen nicht. Der Kegel von jedem der beiden Punkte ω an seine entsprechende Fläche Q reduzirt sich auf das demnach doppelte Ebenenbüschel um die Gerade B. Daraus folgt, dass die beiden Ebenen T_1^x und T_2^x sich für ω in die einzige dem Doppelbüschel B und dem einfachen Büschel G gemeinsame Ebene (G, B) vereinigen. Also *sind die beiden Ebenen (G, B') und (G, B'') die Asymptotenebenen der Involution J, und die Punkte ω' und ω'' sind die Cuspidalpunkte der Doppelgeraden G.* Ferner ist jede Ebene des Büschels B eine Doppelebene des Kegels 3. Classe von ω an F_3 (welcher aus dem doppelten Büschel B und dem einfachen G besteht); sie ist also entweder eine Doppelebene von F_3 oder berührt diese Fläche in ω, jedenfalls also eine Berührungsebene von F_3. Es sei b^y ein beliebiger anderer Punkt auf B, und C_3^y der von ihm an F_3 gelegte Kegel 3. Classe, der offenbar in das Büschel B und einen Kegel 2. Classe C_2^y zerfällt. Die 3 Ebenen von a^x (auf G) an $C_3^y = (B, C_2^y)$

*) Cremona, Preliminari di una teoria delle superficie Nr. 17 und 18.

sind identisch mit den 3 Ebenen von b^y an $C_3^x = (G, C_2^x)$; die eine ist (G, B), die beiden andern — also die von a^x an C_2^y oder die von b^y an C_2^x — sind erstens im Allgemeinen unter sich verschieden, da b^y nicht auf C_2^x liegt, und zweitens geht keine von ihnen durch B, d. h. fällt mit (G, B) zusammen, weil diese dann Q und F_2^x berührte, also eine Ebene von D_4 sein würde, was gegen die Voraussetzung wäre. Folglich zerfällt C_2^y nicht in 2 Ebenenbüschel, deren eines mit B identisch ist, sondern ist, da von jedem Punkte a^x zwei verschiedene Ebenen an ihn gehen, ein ordentlicher Kegel 2. Classe. Mithin bilden die Ebenen durch B nicht ein Büschel von Doppelebenen der Fläche F_3, sondern sind im Allgemeinen einfache Berührungsebenen und berühren in ω.

4. Jedoch 2 Doppelebenen hat jeder Kegel C_3^y (von b^y), die gemeinsamen Ebenen von B und C_2^y. Diese sind also entweder Doppelebenen von F^3 oder Berührungsebenen in b^y. Wollten wir sie auch als einfache Berührungsebenen annehmen, die in b^y tangiren, so müssten sie doch, wie dies alle einfachen Berührungsebenen, die durch B gehen, thun, auch in ω berühren; folglich berühren sie doch (mindestens) in 2 Punkten, ω und b^y, sind also Doppelebenen der Fläche F_3. Demnach *gehen durch jede der beiden Geraden B' und B'' zwei Doppelebenen der Fläche F_3: $P_1' P_2'$; $P_1'' P_2''$* (die Ebene $\mathfrak{P}$ des Herrn Cremona).

Die Ebenen $P_1 P_2$ sind also die Doppelebenen aller Kegel C_3^y oder die beiden Ebenen, welche das Büschel B mit allen Kegeln C_2^y gemein hat. Falls ein Punkt b^y — ausser ω — auf F_3 läge, so müsste der Kegel C_3^y noch in der Berührungsebene eine dritte Doppelebene bekommen; diese müsste dann allein dem Kegel C_2^y angehören, derselbe also in 2 Ebenenbüschel zerfallen. Die durch a^x gehenden Ebenen dieser beiden Büschel wären die von b^y an C_2^x gelegten Ebenen, folglich berührten die Axen der beiden Büschel — die sich in b^y treffen — alle Kegel C_2^x. Sicherlich ist das nicht bei allen Punkten b^y der Fall; also liegen im Allgemeinen diese nicht auf F_3.

Die beiden Geraden B' und B'' liegen demnach *nicht auf der Fläche F_3, obgleich alle durch sie gelegten Ebenen diese Fläche und zwar in ω' resp. ω'' berühren.* Je zwei derselben sind Doppeltangentenebenen, d. h. berühren ausser in ω' oder ω'' noch mindestens in einem zweiten Punkte. Die Existenz dieser beiden Ebenen, die ja für 4 von B' oder B'' an F_3 gelegte Ebenen zählen, muss uns übrigens, da doch in Folge der Classe der Fläche von jeder Geraden nur 3 Ebenen an F_3 gehen, zu dem Schlusse führen, dass alle Ebenen durch jede der beiden Geraden die Fläche berühren.

5. Es haben sich folglich 4 Doppelebenen von F_3 ergeben. Gäbe es noch eine fünfte einzelne, so reduzirten diese 5 Doppelebenen die Ord-

nung der Fläche F_3 von $3 \cdot 2^2 = 12$ auf 2, aber eine Fläche 2. Ordnung kann nur 2. Classe sein. Hätte aber die Fläche F_3 unendlich viele im Zusammenhang stehende Doppelebenen, d. h. wäre ihr eine abwickelbare Fläche doppelt umschrieben, so müsste diese, da doch nicht alle Berührungskegel zerfallen können, ein Kegel 3. Classe aber, ohne zu zerfallen, höchstens eine Doppelebene haben kann, von der 1. Classe, ein Ebenenbüschel sein; die Fläche wäre dann 3. Ordnung und windschief. Zu diesen Büschel Doppelebenen gehörten dann auch unsere 4 Ebenen P; aber diese gehören nicht demselben Büschel an. Folglich *hat die Fläche F_3 nur die 4 Doppelebenen P, ist demnach von der 4. Ordnung.*

Da die 4 Doppelebenen nicht einer der Fläche doppelt umschriebenen Developpablen angehören, so werden wir vermuthen können, dass sie conische Doppelebenen sind, d. h. Doppelebenen, die nicht blos in zwei Punkten, sondern in unendlich vielen Punkten, die einen Kegelschnitt bilden, berühren.*) Wir werden dies später bestätigt finden.

6. *Von den Flächen der Schaar S geht ausser den Kegelschnitten Q' und Q'' nur eine einzige Fläche F_2^0 durch ihren entsprechenden Punkt a^0 auf G.* Jedem Punkte a^x auf G entsprechen 2 andere Punkte α^x, in denen diese Gerade von F_2^x getroffen wird; umgekehrt entsprechen jedem Punkte α^x 3 Punkte a^x, da durch α^x 3 Flächen F_2^x gehen. Also finden im Allgemeinen 5 Coincidenzen von a^x und α^x statt. Wenn mithin die Gerade G nicht die specielle Lage hat und ihre Punkte nicht die specielle Beziehung zu den Flächen F_2^x haben, die wir bei unserer Betrachtung festgesetzt haben, so gehen 5 Flächen der Schaar durch ihre entsprechenden Punkte. Aber bei dieser speciellen Lage und Beziehung repräsentirt jeder der beiden Punkte ω (als Punkt a^x), da er mit seinen *beiden* entsprechenden (schon vereinigten) Punkten α^x zusammengefallen ist, zwei der 5 Coincidenzpunkte, so dass nur noch einer übrig bleibt.**) *Seien nun G' und G'' die beiden Geraden auf F_2^0, die sich in a^0 kreuzen*, so zerfällt der Kegel C_2^x für a^0, C_2^0, in die beiden Büschel G' und G'' und C_3^0 hat 3 Doppelebenen GG', GG'', $G'G''$, also a^0 3 Berührungsebenen; dies wird uns vermuthen lassen, dass der mit den Doppelpunkten von G (und wie sich bald ergeben wird, auch mit denen von G' und G'') in Zusammenhang stehende Punkt a^0 ein triplanarer Punkt sei, dessen Anschmiegungskegel 3. Ordnung in die 3 Ebenen der Geraden G zerfällt. Wäre er abgetrennt von den Doppelpunkten, so würden die 3

*) Cremona, Teoria delle superficie Nr. 38.

**) Eine ausführlichere Behandlung der *reciproken* Betrachtung findet sich Fl. 3. O. an den oben citirten Stellen.

Berührungsebenen noch nicht die Triplicität beweisen; sie könnten ja 3 Ebenen des Anschmiegungskegels 2. Ordnung eines conischen doppelten Punktes sein. Aber bei dem Zusammenhang mit den biplanaren Doppelpunkten deuten die 3 Berührungsebenen auf die Triplanarität hin. Dass a^0 dreifach ist, soll jedoch noch genauer bewiesen werden.

7. Vorher aber zeigen wir noch *die Duplicität der Punkte von G' und G''*. Alle Ebenen durch jede dieser beiden Geraden, z. B. durch G' sind, da sie dem erzeugenden Kegel C_2^0 angehören, Berührungsebenen von F_3. Von jedem Punkte a^z der Geraden G' geht noch ein Kegel 2. Classe C_2^z an F_3 und zwar, da von jedem Punkte a^r auf G an C_2^z die beiden Ebenen gehen, welche a^z an C_2^z schickt, und von diesen Ebenen keine durch G' geht — denn sie müsste dann die Ebene $G'G$ sein; diese berührt aber nur den Kegel C_2^0 —, so ist dieser Kegel C_2^z ein ordentlicher Kegel 2. Classe, der nicht theilweise durch das Büschel G' gebildet wird; vielmehr setzt er mit demselben den Kegel 3. Classe C_3^z von a^z zusammen. Die gemeinsamen Ebenen von G' und C_2^z sind Doppelebenen von C_3^z und da überhaupt keine Ebene durch G' eine Doppelebene von F_3 ist, — denn G' liegt in keiner der Ebenen P, weil sonst diese Ebene, die auch durch G gehen müsste, Q und F_2^0 berührte, also zu D_4 gehörte —, so wird F_3 in a^z von diesen beiden gemeinsamen Ebenen T_1^z und T_2^z berührt; also sind auch die Geraden G' und G'' Doppelgeraden der Fläche F_3, und die Ebenen T_1^z und T_2^z setzen den in zwei Ebenen zerfallenden Anschmiegungskegel des biplanaren Punktes a^z zusammen.

Die beiden Ebenen T_1^z und T_2^z, welche F_3 in a^z (auf G') berühren, gehören dem in 2 Büschel zerfallenden Kegel C_2^0 an. Ersetzen wir diesen Kegel augenblicklich einmal durch einen andern Kegel C_2^x (von a^x). Die von allen Punkten a^z auf G' an C_2^x gehenden Berührungsebenen tangiren in je 2 Kanten, welche auf C_2^x eine Involution bilden; denn sie sind die Durchschnittsgeraden dieses Kegels mit den Polarebenen der Punkte a^z in Bezug auf ihn, welche sich um die Polare der Geraden G' oder, was dasselbe ist, der Ebene $(G'\,a^x) = (G'G)$ drehen; diese Kantenpaare bewirken also um jede beliebige Kante von C_2^x eine Ebeneninvolution, z. B. auch um eine der beiden Kanten, welche der Geraden G' begegnen. Nähert sich a^x immer mehr dem Punkte a^0, so strebt sowohl diese Kante als auch alle Geraden $a^x\,a^z$ nach der Vereinigung mit G', d. h. strebt nach der Vereinigung mit diesen Geraden $a^x\,a^z$; ebenso sucht sich jedes der Ebenenpaare der Involution um die Kante, da seine Ebenen nach den Berührungskanten der von einem Punkte a^z oder, was dasselbe ist, von der Geraden $a^x\,a^z$ an C_2^x gelegten Ebenen gehen, mit diesen Ebenen zu vereinigen, d. h. also wenn a^x endlich in a^0 selbst fällt, mit den beiden Ebenen, welche dem Büschel G', das zum Kegel C_2^0 gehört, und dem Kegel C_2^z gemeinsam

sind, folglich mit den beiden Ebenen T_1^x und T_2^x, welche F_3 in a^x berühren. Die Involution, welche um die Kante stattfand, so lange a^x noch nicht mit a^0 zusammengefallen ist, kann nicht aufgehört haben zu bestehen, wenn dies geschehen ist. Also *erzeugen auch die Paare der die Fläche F_3 in demselben Punkte a^x von G' oder G'' berührenden Ebenen eine Involution J' resp. J''. Jede der beiden Geraden wird demnach auch ihre beiden Cuspidalpunkte haben.*

8. *Die Fläche F_3 besitzt also* 3 *Doppelgerade, die in einen Punkt a^0 zusammenstossen;* daraus schliessen wir einmal, da eine Curve 3. Ordnung, ohne zu zerfallen, nur einen Doppelpunkt enthalten kann, dass *die Fläche nicht unter die* 4. *Ordnung herabgehen kann*, also nochmals, dass die Anzahl der Doppelebenen nicht 4 überschreiten kann. Andererseits *darf*, wie schon gesagt, wegen der 4 Doppelebenen, *die Ordnung nicht über* 4 *hinausgehen, also ist sie* 4, und nun zeigt sich, dass *nicht noch andere Doppelcurven ausser den* 3 *Doppelgeraden auf F_3 existiren*, weil eine Curve 4. Ordnung nicht mehr als 3 Doppelpunkte haben kann, ohne zu zerfallen.

Die Reduction der Classe der Fläche F_3 (oder F^4) von $36 = 4 \cdot 3^2$, der Classe einer von vielfachen Punkten oder Curven freien Fläche 4. *Ordnung, auf* 3 *durch die drei Doppelgeraden kommt folgendermassen zu Stande:*

Die ersten Polarflächen (3. Ordnung) P_1^3 und P_2^3 zweier Punkte O_1 und O_2 in Bezug auf unsere Fläche F^4 enthalten beide die 3 Doppelgeraden G einfach *); da also auf beiden Flächen in den Punkt a^0 drei nicht in derselben Ebene befindliche Geraden zusammenkommen, so ist dieser Punkt auf beiden ein Knotenpunkt (es folgt dies auch schon daraus, dass er auf F^4 ein dreifacher Punkt ist *); doch ist dies noch nicht streng bewiesen). Der fernere Schnitt der beiden Polarflächen ausser den 3 Geraden G, welche eine cubische Raumcurve vertreten (da sie mit einer vierten ebenfalls durch a^0 gehenden Geraden den Schnitt zweier ihre Spitze in a^0 habenden Kegel zusammensetzen), ist eine Raumcurve 6. Ordnung und 16. Ranges P^6 **). Der Punkt a^0, auf jeder der beiden Flächen P^3 ein Knotenpunkt, gehört der vollen Durchschnittscurve als vierfacher Punkt an, mithin geht P^6 einmal durch ihn. Jede der 3 Geraden G wird von dieser Curve ausserdem noch zweimal getroffen. Betrachten wir eine Ebene, welche z. B. durch G geht und aus P_1^3 noch 2 Gerade ausschneidet; die eine derselben muss durch den Knotenpunkt a^0 gehen, da G nothwendig eine binäre Gerade auf P_1^3 ist ***), und trifft also ausserdem die andere Fläche

*) Cremona, Teoria delle superficie Nr. 73.
**) Fl. 3. O. Nr. 64.
***) Fl. 3. O. Nr. 112.

P_2^3 und somit die Curve P^6 nur noch einmal, die andere Gerade trifft P_2^3 noch zweimal und demnach P^6 so oft, also bleiben für G — denn auf diesen 3 Geraden müssen sämmtliche 6 Schnittpunkte ihrer Ebene mit P^6 sich befinden — ausser dem Knotenpunkte a^0, der zweien der 3 Geraden angehört, noch 2 Begegnungspunkte mit P^6, wie oben behauptet wurde. Diese beiden Begegnungspunkte mit P^6 sind für jede der 3 Geraden ihre beiden Cuspidalpunkte. Ganz ähnlich nämlich wie für die Cuspidalpunkte der Doppelgeraden einer Fläche 3. Ordnung, welche eine solche besitzt und dann bekanntlich geradlinig ist*), gilt auch für unsere Steiner'sche Fläche der Satz**): „*Die Ebenen, welche die Steiner'sche Fläche in den Cuspidalpunkten ihrer 3 Doppelgeraden berühren, tangiren dort die erste Polarfläche jedes beliebigen Punktes.*" Folglich berührt die Curve P^6 in jedem der 6 Cuspidalpunkte die Fläche F^4, da sie auf jeder der beiden Flächen P^3 durch den Berührungspunkt der allen 3 Flächen F^4, P_1^3, P_2^3 gemeinsamen Tangentenebene geht und zwar blos einfach, denn der Doppelpunkt der Schnittcurve der beiden Flächen P^3, der durch ihre Berührung sich ergiebt, entsteht durch P^6 und die betreffende Gerade G zusammen. Jeder der 6 Cuspidalpunkte zählt demnach nicht nur als doppelter (weil er Punkt einer Doppelgeraden von F^4 ist), sondern als dreifacher Schnittpunkt von F^4 und P^6. Der Punkt a^0, durch den P^6 einfach geht, zählt ebenfalls als dreifacher Schnittpunkt; also bleiben noch 3 Begegnungspunkte; dies sind die Berührungspunkte der von der Geraden $O_1 O_2$ an die Steiner'sche Fläche gesandten Tangentenebenen. Damit ist auch bewiesen, dass *die Steiner'sche Fläche ausser den 3 Doppelgeraden keine vielfachen Punkte hat.*

9. *Die 4 Doppelebenen P haben ausser B' und B'' noch 4 Durchschnittsgeraden:* $B_{11} = (P_1' P_1'')$, $B_{12} = (P_1' P_2'')$, $B_{21} = (P_2' P_1'')$ *und* $B_{22} = (P_2' P_2'')$. Es sei b^u ein Punkt einer dieser Geraden, z. B. der B_{11}. Der Kegel 3. Classe C_3^u von b^u an F_3 hat 2 Doppelebenen P_1', P_1'', also muss er in ein Ebenenbüschel, dessen Achse die Schnittgerade B_{11} dieser Ebenen ist, und einen Kegel 2. Classe C_2^u zerfallen. Folglich *sind alle Ebenen durch eine der 4 neuen Geraden B Berührungsebenen von F_3.* Die 3 Ebenen von a^x (auf G) an $C_3^u = (B_{11}, C_2^u)$ sind identisch mit den 3 Ebenen von b^u an $C_3^x = (G, C_2^x)$. Eine dieser 3 Ebenen muss also durch G und eine durch B_{11} gehen, und zwar nicht dieselbe, weil G und B_{11} einander nicht begegnen; also die durch G

---

*) Cremona, Sulle superficie gobbe del terz' ordine (Atti del R. Istituto Lombardo Maggio 1861). Nr. 18.

**) Man sehe dazu: Cremona, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane. Nr. 74c.

gehende und sich mit a^x nicht ändernde Ebene (G, b^u), tangirt den Kegel C_2^u, folglich berühren alle Kegel C_2^u die Gerade G. Ebenso ist die durch B_{11} gehende Ebene (B_{11}, a^x), welche sich mit b^u nicht ändert, eine Ebene des Kegels C_2^x. Folglich ist B_{11} und ebenso jede der 3 andern neuen Geraden B eine Tangente an alle Kegel C_2^x. Unter anderm berührt B_{11} auch den in 2 Büschel zerfallenden Kegel C_2^0 (von a^0), d. h. sie hat mit einem dieser Büschel eine Ebene gemein, trifft mithin dessen Achse. Nehmen wir an, sie treffe G' und zwar in ω_{11}. Da G' nicht in der Ebene P_1' oder P_1'' liegt, so wird sie von B_{22} noch getroffen und zwar in ω_{22}; G'' wird von B_{12} und B_{21} getroffen, in ω_{12} und ω_{21}.

Folglich *begegnet jede der* 3 *Doppelgeraden zweien Gegenkanten des Tetraeders der* 4 *Doppelebenen.*

10. So lange der Kegel C_2^u für einen Punkt b^u auf B_{11}, die wir wieder als Typus der neuen Geraden B wählen, sich nicht zerspaltet, hat b^u keine Berührungsebene; denn dann sind die Doppelebenen von C_3^u eben nur die gemeinsamen Ebenen von B_{11} und C_2^u, also die beiden Doppelebenen P_1 der Fläche F_3. Wenn aber C_2^u in 2 Büschel zerfällt, also b^u eine in ihm berührende Tangentenebene erhält und demnach Punkt von F_3 wird, so muss, da stets die Ebene (G, b^u) den Kegel C_2^u berührt, sie dem einen Büschel desselben angehören, also die Achse desselben die Gerade G treffen. Wenn dies im Punkte a^x geschieht, so muss das ganze Büschel dem Kegel C_2^x (von a^x) angehören, folglich der von a^x an die entsprechende Fläche F_2^x gelegte Kegel sich in 2 (verschiedene oder auch zusammenfallende) Büschel zerspalten, a^x also jedenfalls auf F_2^x liegen; das tritt dreimal ein, nämlich bei den Punkten ω', ω'' und a^0. Den beiden ersten gehören auf B_{11} die Punkte p' und p'' zu, in denen B_{11} von P_2' (also auch von B' und B_{21}) und von P_2'' (also auch von B'' und B_{12}) getroffen wird. Der Kegel C_2^u von p' an F_3 zerfällt in die beiden Büschel B' und B_{21}; die Achse des ersteren trifft G in ω' und das Büschel ist das Doppelbüschel von ω' an die entsprechende Fläche Q'. Die den beiden Büscheln gemeinsame Ebene ist P_2', eine Doppelebene der Fläche und demnach nicht Berührungsebene in p'. Gleiches gilt für p''. Dem Punkte a^0 entspricht auf B_{11} der Punkt ω_{11}, denn dessen Kegel C_2^u zerfällt in 2 Büschel, von denen eins zur Achse die Gerade G' hat, welche G in a^0 trifft. Die gemeinsame Ebene beider Büschel ist nicht Doppelebene der Fläche F_3 — denn durch G' geht überhaupt keine —, mithin berührt sie F_3 in ω_{11}. Also von jeder der 4 Geraden B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22} liegt nur ihr Punkt ω auf der Fläche F_3, obgleich durch jede ein ganzes Büschel Tangentenebenen an die Fläche geht.

Das eine der Büschel, welche den Kegel C_2^u von ω_{11} zusammensetzen, ist, wie gesagt, das um G', zu dem freilich die von a^0

verschiedenen Punkte a^x (auf G) immer nur die eine Ebene (G, G') schicken, sämmtliche übrige Ebenen vom Punkte a^ω allein geliefert werden: welches ist nun die Achse des andern Büschels? Es ist auch schon erkannt, dass alle Kegel C_2^x (aus den Punkten a^x auf G) von der Geraden B_{11} tangirt werden. Wenn nun b^u der Berührungspunkt für den Kegel C_2^x ist, so müssen die beiden Ebenen von b^u an C_2^x zusammenfallen; diese sind aber die Ebene (a^x, B_{11}) und die eine Ebene von a^x an C_2^u (von b^u), also müssten jene beiden Ebenen in eine der gemeinsamen Ebenen von B_{11} und C_2^u sich vereinigt haben; diese sind, falls b^u von ω_{11} verschieden ist, also im Allgemeinen bei den Punkten, bei denen der Kegel C_2^u nicht zerfällt, als auch bei den Punkten p' und p'', bei denen er sich in je zwei Ebenenbüschel auflöst, die beiden Doppelebenen P_1. Aber diese berühren nicht sämmtliche Kegel C_2^x; haben doch dieselben keine gemeinschaftlichen Tangentenebenen. Es ergiebt sich mithin, dass kein Punkt für die Berührung mit den Kegeln C_2^x auf B_{11} bleibt als ω_{11}. Da also je die beiden Ebenen von ω_{11} an C_2^x sich vereinigt haben, so müssen auch stets 2 der Ebenen von a^x an den Kegel C_3^u von ω_{11} identisch sein und zwar die des Büschels B_{11} und eine der beiden andern Büschel, die den Kegel C_2^u bilden; folglich muss, während das eine von diesen beiden Büscheln zur Achse G' hat, das andere — das, welches wir suchen, — mit dem Büschel B_{11} sich vereinigen; also besteht der Kegel C_3^u von ω_{11} aus dem einfachen Büschel G' und dem doppelten Büschel B_{11}. Daraus schliessen wir, dass, da alle Ebenen durch B_{11} Doppelebenen dieses Kegels sind, ohne (mit Ausnahme von zweien) Doppelebenen der Fläche F_3 zu sein, sie diese in ω_{11} berühren.

Es weisen also *die 4 übrigen Kanten des Tetraeders der 4 Doppelebenen dieselben Eigenschaften auf, wie die beiden zuerst gefundenen B' und B''. Ebenso finden sich die Eigenschaften der beiden Punkte ω' und ω'' wieder bei den 4 neuen Punkten ω.* Diese sind die Cuspidalpunkte der Doppelgeraden, auf der sie sich befinden; in der That, fassen wir z. B. ω_{11} als Punkt a^x von G', so ist sein Kegel C_2^x das doppelte Büschel um B_{11}, dessen 2 gemeinsame Ebenen mit dem Büschel G' in die einzige Ebene (G', B_{11}) sich vereinigt haben, die eine Asymptotenebene der Involution J'; die andere ist (G', B_{22}). Die der Involution J'' sind (G'', B_{12}) und (G'', B_{21}).

11. *Die 6 Geraden B haben sich* also, *obgleich alle durch sie gelegten Ebenen die Fläche F_3^4 berühren, als nicht auf derselben gelegene Geraden ergeben; die Fläche besitzt überhaupt ausser den 3 Doppelgeraden G keine Gerade.* Eine solche Gerade müsste, da in jeder der Ebenen des Trieders $G\ G'\ G''$ die beiden Geraden den vollen Schnitt bilden, jede dieser Ebenen in einer ihrer beiden Geraden treffen,

also mindestens zweien der Geraden G begegnen, ohne doch in deren Ebene zu liegen; folglich müsste sie durch die Spitze a^0 des Trieders gehen. Dann würde aber jeder von den Kegeln 2. Grades, welche durch die 3 Doppelgeraden und die gedachte Gerade gelegt sind, weil er mit F_3^4 schon ein Gebilde von der Ordnung $2 \cdot 3 + 1 = 7$ gemein hat, noch eine durch seine Spitze a^0 gehende Gerade ausschneiden. Also gingen dann durch a^0 auf F_3^4 unendlich viele Gerade, so dass diese Fläche ein Kegel wäre.

Jeder von den doppelt unendlich vielen Kegeln 2. Grades K durch die 3 Doppelgeraden hat ausser denselben mit der Fläche F_3^4 noch ein Gebilde 2. Ordnung gemein, das wegen des Nichtvorhandenseins von Geraden auf der Fläche *nothwendig ein Kegelschnitt sein muss.* Jeder Kegel liefert einen Kegelschnitt und über jedem Kegelschnitt steht nur einer von diesen Kegeln. Also *ergeben sich auf der Steiner'schen Fläche doppelt unendlich viele Kegelschnitte S.* Jede Gerade durch a^0 trifft F_4^3 nur noch in einem Punkte, in dem sie zugleich alle Kegelschnitte trifft, die von den durch sie gelegten Kegeln ausgeschnitten werden. Also *ist a^0 in der That ein dreifacher Punkt.* Durch je zwei Punkte überhaupt, folglich auch durch je 2 Punkte der Fläche, die nicht auf einer der Doppelgeraden sich befinden, ist einer von den Kegeln 2. Grades bestimmt. *Durch 2 Punkte* folglich *der Fläche F_3^4, die nicht auf einer Doppelgeraden liegen, geht nur ein Kegelschnitt. Wenn* also *2 Kegelschnitte auf F_3 mehr als einen Punkt gemein haben, so kann nur einer ausserhalb der Doppelgeraden liegen.*

Jeder der Kegelschnitte S, den ein Kegel K liefert, stützt sich auf alle 3 Doppelgeraden, und jeder Kegelschnitt der Fläche, der sich auf die 3 Doppelgeraden stützt, liegt auf einem Kegel K.

Es ist ersichtlich, dass die Ebenen durch die Doppelgeraden auch Kegelschnitte ausschneiden. Diese müssen durch a^0 gehen, weil dieser Punkt ein dreifacher Punkt der Fläche ist, und treffen ausserdem die Doppelgerade nochmals. Die Kegel aus dem obigen Netze, welche diese Kegelschnitte hervorrufen, sind Ebenenpaare, bestehend je aus einer Ebene des Trieders selbst und einer durch die dritte Doppelgerade.

12. Jede ebene Schnittcurve der Fläche F_3^4 ist 4. Ordnung mit 3 Doppelpunkten, welche sich auf den 3 Doppelgeraden befinden. Der eine Ast der Curve berührt dann stets die eine Tangentenebene der Fläche im Punkte der Doppelgeraden, der andere die andere. Geht die Schnittebene durch a^0, so haben sich die 3 Doppelpunkte in a^0 vereinigt, der also ein dreifacher Punkt der Curve ist, denn ein solcher vertritt $\frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3$ Doppelpunkte. Ueber die Ebenen durch die Doppelgeraden, welche sämmtlich Berührungsebenen sind, ist eben

gesprochen. Der Berührungspunkt ist der oben erwähnte zweite Schnittpunkt des Kegelschnitts mit der Doppelgeraden. Die Ebene jedes der Kegelschnitte S schneidet noch einen Kegelschnitt aus, der auch durch die Punkte, in denen jener die Doppelgeraden trifft, gehen, damit diese Doppelpunkte des Totaldurchschnitts werden, also ebenfalls ein Kegelschnitt S sein muss. Ueberhaupt kann es auf der Steiner'schen Fläche keinen Kegelschnitt geben, der nicht auf alle drei Doppelgeraden sich stützt (auch die, deren Ebenen durch eine Doppelgerade gehen, thun dies), weil sonst nicht die Punkte, in denen seine Ebene diese Geraden trifft, Doppelpunkte der vollen Schnittcurve werden könnten. Also *alle Kegelschnitte auf F_3^4 werden von Kegeln 2. Grades K, die durch die 3 Doppelgeraden gehen, ausgeschnitten, und je zwei liegen stets in einer Ebene zusammen, sind associirte Kegelschnitte.* Ihr vierter Schnittpunkt ist auch ein Doppelpunkt der vollen Schnittcurve, ohne aber Doppelpunkt der Fläche zu sein, folglich Berührungspunkt der Ebene. *Die Ebene* also *eines Kegelschnitts der Fläche F_3^4 oder vielmehr zweier associirter Kegelschnitte berührt stets die Fläche in dem nicht auf einer Doppelgeraden liegenden Begegnungspunkte der beiden Kegelschnitte. Umgekehrt enthält jede Tangentenebene der Fläche F_3^4,* da sie zu den 3 Doppelpunkten ihrer Schnittcurve, die auf den Doppelgeraden liegen, noch den Berührungspunkt als vierten hinzubringt und eine Curve 4. Ordnung mit 4 Doppelpunkten zerfallen muss, Gerade aber auf F_3^4 nicht existiren, *2 Kegelschnitte S' und S'',* die sich auf die 3 Doppelgeraden stützen und in den Stützpunkten der eine je von der einen Tangentenebene der Fläche, der andere von der andern berührt wird, was auch für die die beiden Kegelschnitte erzeugenden Kegel K gilt. In den durch eine Doppelgerade gehenden Berührungsebenen vertritt diese den einen Kegelschnitt.

13. *Jede der* 4 *Doppelebenen* P hat mindestens 2 Berührungspunkte, also die Schnittcurve 5 Doppelpunkte, mithin haben *die beiden associirten Kegelschnitte* 5 Punkte gemein, *vereinigen sich* folglich *in einen einzigen* H ($\mathfrak{H}$ bei Herrn Cremona), über den sich die Doppelpunkte des Gesammtschnitts ausgebreitet haben, demnach *geschieht die Berührung nicht blos in 2 Punkten, sondern in allen Punkten von* H; die Doppelebene ist conisch, nicht bitangential. Jeder dieser 4 Kegelschnitte trifft die 3 Doppelgeraden in je einem ihrer Punkte ω und berührt dort die eine Asymptotenebene der Involution J, J' oder J'', von der auch der den Kegelschnitt ausschneidende Kegel K längs der Doppelgeraden tangirt wird.

Jede Gerade einer Ebene P berührt die Fläche in ihren beiden Schnittpunkten mit H (oder trifft im speciellen Falle eine Doppelgerade); *eine Tangente von H berührt folglich vierpunktig.* Die 4 Doppeltangenten

jedes ebenen Schnitts — denn so viel hat eine Curve 4. Ordnung mit 3 Doppelpunkten —, so wie insbesondere die 4 gemeinsamen Tangenten der beiden Kegelschnitte einer Berührungsebene befinden sich stets in den 4 Doppelebenen, so dass die sämmtlichen Doppeltangenten der Fläche diese 4 Ebenen erfüllen.

Da jeder Kegelschnitt H, wie oben gesagt, in jedem der 3 Punkte ω, durch die er geht, dessen (einzige) Berührungsebene tangirt, so muss er auch die Gerade B, in der seine Ebene diese Ebene schneidet, berühren. Folglich *tangiren in jedem Punkte ω zwei Kegelschnitte H einander und die Schnittgerade B ihrer Ebenen, so dass diese Gerade mit der Fläche nur den Punkt ω gemein hat, sie in demselben vierpunktig berührt*, was für B' und B'' noch nicht bewiesen ist. Oder auch: H ist für seine Ebene P der volle Schnitt, folglich müssen die beiden Punktenpaare, in denen B den Kegelschnitten seiner beiden Ebenen P begegnet, identisch sein, d. h. B kann F_3^4 ausser in ω nur noch einmal treffen, in ω_1. Alle Ebenen durch B sind Berührungsebenen der Fläche, also alle durchschneiden dieselbe in 2 Kegelschnitten, die beide ihren zweiten Schnittpunkt mit B ausser ω in ω_1 haben müssen, so dass dieser ihr vierter Begegnungspunkt, demnach der Berührungspunkt der Ebene ist. Aber alle Ebenen durch B tangiren in ω, folglich fällt ω_1 mit ω zusammen.

Weil die 4 Kegelschnitte H sich alle gegenseitig berühren, so befinden sie sich auf derselben Fläche 2. Grades (die wir uns durch 5 Punkte von H_1', 3 von H_2', 1 von H_1'' gelegt denken). Die 8 Berührungspunkte der 4 Doppeltangenten jedes ebenen Schnitts der Steiner'schen Fläche befinden sich also stets auf demselben Kegelschnitte.

14. Es ist oben gesagt, dass *zwei Kegelschnitte S_1' und S_2' der Fläche F_3^4, deren Ebenen L_1 und L_2 sich in einer Geraden schneiden, die sich nicht auf eine der 3 Doppelgeraden stützt*, einander in nicht mehr als einem Punkte begegnen können. Aber *einen Begegnungspunkt müssen sie haben*, weil es sonst, wenn S_1'' und S_2'' die associirten Kegelschnitte sind, nicht möglich wäre, dass jeder dieser 4 Kegelschnitte jedem andern von ihnen, der nicht in derselben Ebene liegt, höchstens einmal begegnet und doch aus diesen Begegnungspunkten die 4 Schnittpunkte der Geraden $l = (L_1, L_2)$ mit F_3^4 hervorgehen. L_1 und L_2 sind 2 von den Berührungsebenen, welche l an F_3^4 sendet; fügen wir noch die dritte L_3 hinzu, welche die beiden Kegelschnitte S_3' und S_3'' enthält, so ergiebt sich, wenn s^1, s^2, s^3, s^4 die 4 Schnittpunkte (l, F_3^4) sind, folgendes Arrangement, aus dem zu ersehen, dass jeder Kegelschnitt jeden aus einer andern Ebene einmal trifft: S_1' geht durch s^1, s^2, S_1'' durch s^3, s^4, S_2' durch s^1, s^3, S_2'' durch s^2, s^4, S_3' durch s^1, s^4 und S_3'' durch s^2, s^3.

Betrachten wir aber noch die specielleren Fälle, die zu einigen interessanten Sätzen führen werden; nehmen wir also zuerst an, von den 4 Punkten s fallen zwei s^3, s^4 in einen Punkt s^{34} zusammen, so dass entweder l die Fläche in s^{34} berührt, oder in s^{34} — dann mit a bezeichnet — eine Doppelgerade z. B. G trifft. Im ersteren Falle haben sich zwei der Ebenen L, L_2 und L_3, in eine L_{23} vereinigt, die in s^{34} berührt: S_{23}' geht durch s^{34}, s^1, S_{23}'' durch s^{34}, s^2, von den Kegelschnitten der dritten Ebene L_1 geht S_1' durch s^1, s^2, S_1'' berührt l in s^{34}. Im andern Falle ist in der Ebene L_1 der Kegelschnitt S_1'' in die Doppelgerade G übergegangen (welche durch a geht), der andere Kegelschnitt S_1' geht durch s^1, s^2. L_2 und L_3 haben sich nicht vereinigt: S_2' und S_3' gehen durch s^1, a, und S_2'' und S_3'' durch s^2, a. Sind nun T_1 und T_2 die beiden Berührungsebenen der Fläche in a, so können S_2' und S_3', die ausser a noch s^1 gemein haben, nicht in a dieselbe Ebene berühren, z. B. T_1, weil dann der Kegel, der durch G, G', G'', a^0 s^1 geht und T_1 längs G berührt, beide Kegelschnitte S_2' und S_3' ausschnitte. Ebenso berühren S_2'' und S_3'' nicht dieselbe Ebene. Hingegen da auch S_2' und S_2'' und ebenso S_3' und S_3'' in a verschiedene Ebenen berühren, so tangiren sowohl S_2', S_3'', die ausser a keinen Punkt gemein haben, als auch S_2'', S_3', bei denen dies auch der Fall ist, dieselbe Ebene, jene beiden die eine, diese beiden die andere.

Wenn also *die Schnittlinie zweier Tangentenebenen der Steiner'schen Fläche sich auf eine der* 3 *Doppelgeraden, in a, stützt (ohne dass eine der beiden Ebenen durch dieselbe geht), so lassen sich von den* 4 *Kegelschnitten derselben aus verschiedenen Ebenen zweimal zwei zusammenstellen, welche ausser a noch einen Punkt gemein haben, dafür aber in a von verschiedenen Berührungsebenen der Fläche tangirt werden, und zweimal zwei, welche nur den Punkt a gemein haben und in diesem Punkte von derselben Berührungsebene tangirt werden.*

15. Wenn sich zweimal zwei von den 4 Punkten s vereinigt haben, s^1 und s^2 in s^{12}, s^3 und s^4 in s^{34}, so berührt l die Fläche F_3^4 entweder in s^{12} und s^{34} oder sie berührt in s^{12} und trifft in s^{34} — dann a — eine Doppelgerade z. B. G oder sie trifft in beiden Punkten eine Doppelgerade z. B. G, G', also $s^{12} = a$, $s^{34} = a'$. Im ersten Falle sind die beiden Ebenen L_2 und L_3 zusammengefallen und zwar in eine Doppelebene P, so dass die vier Kegelschnitte S_2' S_2'' S_3' S_3'' in den einen H sich vereinigt haben, der durch s^{12} und s^{34} geht; die Ebene L_1 berührt mit ihrem Kegelschnitte S_1' die Doppeltangente l in s^{12}, mit S_1'' in s^{34}. Im zweiten Falle sind L_2 und L_3 in die Berührungsebene L_{23} in s^{12} zusammengefallen, sowohl S_{23}' wie S_{23}'' gehen durch s^{12} und a, berühren jedoch in a verschiedene Ebenen; die Ebene L_1 geht durch G, welche den Kegelschnitt S_1'' vertritt und a enthält;

der andere Kegelschnitt S_1' berührt l in s^{12}. Im dritten Falle endlich ist die Ebene GG' die Ebene L_1 und ihre Geraden vertreten S_1' und S_1''. Die beiden andern Ebenen sind verschieden, ihre 4 Kegelschnitte gehen alle durch a und a'. Deren Berührungsebenen seien T_1, T_2, T_1', T_2'. Jeder der 4 Kegelschnitte berührt in jedem der beiden Punkte a eine derselben und jede der 4 Ebenen wird 2 Kegelschnitte aus verschiedenen Ebenen berühren. Berührt z. B. T_1 in a die beiden Kegelschnitte S_2' S_3', so werden diese in a' von verschiedenen Ebenen berührt; denn berührte z. B. T_1' dieselben beiden Kegelschnitte, so lägen diese beide auf dem Kegel 2. Gerades K, der durch $G\,G'\,G''$ geht und längs den beiden ersten die Ebenen T_1 und T_1' berührt.

Also 2 *Kegelschnitte der Steiner'schen Fläche, welche in verschiedenen Ebenen liegen und durch dieselben zwei Punkte zweier Doppelgeraden gehen, werden stets in dem einen derselben von der nämlichen Tangentenebene, in dem andern aber von verschiedenen berührt.*

Fallen ferner 3 Punkte s zusammen, z. B. s^2, s^3, s^4 in s^{234}, so ist wieder zu unterscheiden, ob s^{123} nicht auf einer Doppelgeraden liegt, oder ob dies der Fall, oder ob s^{123} gar der dreifache Punkt a^0 ist. Im ersteren Falle, dem der eigentlichen Osculation, geht durch l eine einzige Tangentenebene, die in s^{234} berührende. Der eine Kegelschnitt berührt l in s^{234}, so dass diese Gerade also eine der beiden Haupttangenten ist, der andere Kegelschnitt geht durch s^{234} und s^1. Liegt s^{234} auf einer Doppelgeraden G — also a —, so werden 2 Berührungsebenen von der durch G gehenden vertreten, welche in a berührt. Der eine Kegelschnitt in ihr ist G, welche durch a geht, der andere geht durch a und s^1. Die zweite (eigentlich dritte) Tangentenebene durch l enthält einen Kegelschnitt, der l in a und somit auch die erste Tangentenebene berührt, und einen zweiten, der durch s^1 und a geht und im letzteren die andere Berührungsebene dieses Punktes tangirt. Oben osculirte die Gerade l, hier berührt sie in einem Punkte einer Doppelgeraden. Im dritten Falle, wo $s^{234} = a^0$ ist, sendet l noch 3 Tangentenebenen an F_3^4, die durch die Doppelgeraden gehen und Kegelschnitte ausschneiden, welche die Punkte a^0 und s^1 enthalten.

Fallen endlich alle 4 Punkte s zusammen, so ist l entweder eine vierpunktig berührende Gerade, also eine Tangente eines Kegelschnitts H, von der aus dann keine weitere Berührungsebene an die Fläche geht, — ausgenommen die 6 Geraden B, welche unendlich viele Tangentenebenen an F_3^4 senden, deren sämmtliche Kegelschnitte die Gerade B in ω berühren —; oder l ist Tangente des Kegelschnitts in einer durch eine Doppelgerade gehenden Ebene im Berührungspunkte derselben, folglich die eine Haupttangente der Ebene, die an-

dere ist die Doppelgerade selbst: dann geht durch l ebenfalls keine weitere Tangentenebene; oder endlich l geht durch a^0 in einer der 3 Berührungsebenen dieses Punktes. Dann vertritt diese Ebene zwei Berührungsebenen von l, die dritte ist die nach der ausserhalb liegenden Doppelgeraden gehende, deren Kegelschnitt von l in a^0 berührt wird. Ueberhaupt wird stets der Kegelschnitt der Fläche in einer Ebene durch eine Doppelgerade im dreifachen Punkte von der Ebene der beiden andern Doppelgeraden tangirt.

16. Ueber den Tangentialkegel der Fläche von einem beliebigen Punkte des Raumes überhaupt, einem beliebigen Punkte der Fläche und aus einem Punkte einer Doppelgeraden hat schon Herr Cremona gesprochen. Der erste ist ein allgemeiner Kegel 3. Classe, also 6. Ordnung, der zweite hat eine Doppelebene, die Berührungsebene des Punktes, ist also 3. Classe und 4. Ordnung, der dritte zerfällt in das Ebenenbüschel um die Doppelgerade und einen Kegel 2. Grades, denen die beiden Berührungsebenen des Punktes gemein sind. Ebenso *zerfällt aber auch der Berührungskegel, der von einem Punkte einer der* 6 *Geraden B, also einem nicht auf der Fläche liegenden Punkte an die Fläche gelegt ist, in das Büschel dieser Geraden und einen Kegel* 2. *Grades, denen die beiden in B sich begegnenden Doppelebenen gemein sind. Für jeden der* 6 *Punkte* ω *zerfällt er in das einfache Büschel um die Doppelgerade G, die durch* ω *geht, und das doppelte Büschel um die Gerade B, welche diesen Punkt enthält.*

Nicht blos die Punkte der Fläche selbst liefern Berührungskegel 4. *Ordnung, sondern auch die der* 4 *Doppelebenen P.* Die betreffende Doppelebene berührt dann auch den Kegel zweimal und zwar sind die Berührungskanten die beiden Tangenten von dem Punkte an den Kegelschnitt *H. Befindet sich der Punkt gar auf dem Kegelschnitt H selbst, so wird die Doppelebene P für dessen Tangentialkegel Wende(tangenten)-ebene*, welche längs der Tangente des Kegelschnitts *H* osculirt, *und der Kegel also* 3. *Ordnung* (*und* 3. *Classe*).

17. Wir kommen nun noch in Kürze auf die Bemerkung des Herrn Cremona zurück, dass *die Steiner'sche Fläche und die reine* (*cubische*) *Polarfläche einer Ebene in Bezug auf eine allgemeine Fläche* 3. *Ordnung reciprok sind*; wir hatten ursprünglich die Absicht, die reciproken Eigenschaften dieser beiden Flächen nach Steiner'scher Sitte einander gegenüber zu stellen, doch der Kürze wegen begnügen wir uns behufs dieser Vergleichung auf unsere Untersuchungen über die Polarfläche*) zu verweisen und hier nur noch darauf aufmerksam zu machen, wie *diese Reciprocität recht klar aus der von Herrn Reye***)

*) Fl. 3. O. Nr. 39 und 40.

**) Geometrie der Lage, II, S. 246.

angegebenen Erzeugungsweise der Steiner'schen Fläche und aus der Entstehung der Polarfläche durch die Einhüllung der Polarebenen aller Punkte einer Ebene in Bezug auf eine Fläche 3. *Ordnung zu erkennen ist.* Herr Reye setzt ein Flächengebüsche 2. Ordnung Σ und ein räumliches System Σ_1 so in Beziehung, dass jeder Fläche des Gebüsches Σ eine Ebene in Σ_1 und jedem Flächenbüschel in Σ ein projectivisches Ebenenbüschel in Σ_1 entspricht. Jeder Raumcurve 4. Ordnung, in welcher 2 Flächen von Σ sich schneiden, entspricht dann die Schnittgerade der entsprechenden Ebenen, und jeder Gruppe von 8 associirten Punkten, in denen drei Flächen des Gebüsches sich durchdringen, der Schnittpunkt der entsprechenden 3 Ebenen des Systems. Rechnen wir nun die Punkte einer den Raum durchziehenden Ebene zum Gebüsche Σ, so ist der Ort der entsprechenden Punkte in Σ_1 die Steiner'sche Fläche, und ist damit auch die Abbildung der Herren Clebsch und Cremona erhalten.

Die sämmtlichen quadratischen (oder ersten) Polarflächen aller Punkte des Raumes in Bezug auf eine Fläche 3. Ordnung bilden ein Flächengebüsche 2. Ordnung Σ *), und jeder Fläche desselben entspricht im räumlichen Systeme Σ_1 nicht wie oben eine Ebene, sondern ein Punkt, ihr Pol; jeder Grundcurve des Gebüsches Σ eine Gerade in Σ_1, deren Polarcurve jene ist, und jeder Gruppe von 8 associirten Punkten des Gebüsches, nicht wie oben ein Punkt, sondern eine Ebene, die gemeinsame Polarebene der 8 Punkte. Suchen wir nun zu allen Punkten einer das Gebüsche durchziehenden Ebene die entsprechenden Ebenen, also die Polarebenen in Bezug auf die Fundamentalfläche 3. Ordnung, so ergiebt sich als deren Enveloppe die Polarfläche der Ebene in Bezug auf diese Fundamentalfläche. Die jetzige Beziehung des Systems Σ_1 auf das Gebüsche Σ ist der obigen reciprok, also sind es auch die beiden erzeugten Flächen.

II.

18. *Wir haben bei der Erzeugung der Steiner'schen Fläche, um die Allgemeinheit zu wahren, den Fall ausgeschlossen, dass die beiden Tangenten B' und B'' der Kegelschnitte Q' und Q'' in den Punkten ω' und ω'', in denen sich die Gerade G auf diese Kegelschnitte stützt, einander treffen. Jetzt wollen wir uns gerade mit diesem speciellen Falle beschäftigen. Die Ebene $P = (B', B'')$* ist dann, weil sie Q' und Q'' berührt, eine Ebene der Fläche D_4 und die Gerade G, welche ihre Berührungspunkte mit Q' und Q'' verbindet, die Generatrix, längs deren P diese Fläche tangirt. P berührt alle Flächen F_2^x und zwar stets in einem Punkte von G; folglich berührt sie auch alle er-

*) Von mir früher (Fl. 3. Ordnung Nr. 36) Flächennetz genannt.

zeugenden Kegel C_2^x, die von den Punkten a^x auf G an ihre entsprechenden Flächen F_2^x gelegt sind, und zwar längs G. Demnach vereinigen sich in ihr stets die beiden gemeinsamen Ebenen des Büschels G und jedes der Kegel C_2^x, also die beiden Tangentenebenen der erzeugten Fläche F_3 in jedem Punkte a^x; *P berührt daher vierpunktig die Fläche F_3 längs der ganzen Geraden G.* Dass der Grad der Vielfachheit von P nicht 2 überschreiten kann, geht aus der Classe der Fläche hervor: eine Fläche 3. Classe mit einer dreifachen Ebene degenerirte zu einer ebenen Curve. Jede Gerade l in P sendet in der That an die Fläche ausser der Doppelebene P noch eine Ebene, die zweite Tangentenebene von l an den Kegel C_2^x, der vom Punkte $a^x = (l, G)$ ausgeht. *Alle Punkte a^x sind uniplanare Doppelpunkte.* Ferner ist P stets eine der beiden gemeinsamen Ebenen des Büschels B' resp. B'' und des Kegels C_2^y von einem Punkte b^y der Geraden B' resp. B''. Folglich *vereinigt sich in ihr eine der beiden P' mit einer der beiden Ebenen $P'' : P_2' = P_2'' = P$. Durch jede der beiden Geraden B geht noch eine Doppelebene P_1' resp. P_1''. Die Ebene P aber zählt für 2 Doppelebenen,* ist nach der Bezeichnung des Herrn Cayley *eine 2 (+ 2) fache Ebene der Fläche.* Wie jede Ebene überhaupt, so muss auch jede (von P verschiedene) Ebene durch G eine Fläche der Schaar S (F_2^x) berühren; diese wird schon von P und zwar in einem Punkte der Geraden G, in der sich P und die andere Ebene durchschneiden, tangirt; wenn aber durch eine Tangente einer Fläche 2. Classe 2 verschiedene Berührungsebenen gehen, so muss dieselbe auf der Fläche liegen. Also *liegt G auf einer Fläche der Schaar* (von der ersichtlich alle Ebenen durch G tangirt werden), *und diese Fläche ist auch diejenige, F_2^0, die durch ihren entsprechenden Punkt a^0 geht. Von den beiden durch a^0 gehenden Geraden G' G'' dieser Fläche hat sich demnach eine G'' mit G vereinigt.* Wir erhalten folglich den speciellen Fall der Steiner'schen Fläche, auf den, wie Herr Cremona in seiner zweiten Abhandlung mittheilt, Herr Clebsch zuerst aufmerksam gemacht hat. Der Kegel 2. Classe C_2^0 von a^0 an F_2^0 besteht aus den Büscheln G und G', folglich hat der Kegel 3. Classe C_3^0 von a^0 alle Ebenen des Büschels G zu Doppelebenen, so dass *alle Ebenen dieses Büschels G die Fläche in a^0 berühren.* Wir werden auch bald G als eine Gerade B erkennen, deren Punkt ω der Punkt a^0 ist. Die Ebene P vertritt die Ebene $(G\,G'')$ des allgemeinen Falls; sie hat also mit der Fläche ausser der Geraden G, längs deren sie berührt, keinen Schnitt mehr gemein. *Diese beiden zusammengefallenen Geraden GG'' vertreten in P den Kegelschnitt H.*

19. *Die Involution J um G hat ihre Bedeutung verloren,* da *alle* Punkte dieser Geraden — ausser a^0 — uniplanar sind, alle Tangentenebenenpaare in die Ebene P zusammengefallen sind; auch die

Asymptotenebenen (G, B') und (G, B'') haben sich mit P vereinigt. Der eine Punkt a^0 liefert sämmtliche übrigen Ebenen des Büschels G. *Die Gerade G' ist*, wie im allgemeinen Falle, *doppelt und die Involution J' um sie bleibt bestehen. Der eine Cuspidalpunkt ist ω_{11}, in welchem sie von der Schnittgeraden B_{11} der beiden Ebenen P_1' und P_1'' getroffen wird, der andere Cuspidalpunkt ω_{22} ist a^0*, denn die beiden durch G' gehenden Berührungsebenen des Punktes a^0, $G'G$ und $G'G''$, sind zusammengefallen. *Freilich ist a^0 eben nur Cuspidalpunkt als Punkt von G', nicht auch als Punkt von G, durch G gehen vielmehr unendlich viele in a^0 berührende Ebenen; diese Gerade ist auch als die Gerade B anzusehen, welcher a^0 als Punkt ω angehört; sie vertritt die Schnittgerade B_{22} der beiden in P vereinigten Doppelebenen P_2' und P_2''.* B, hat in sich noch eine zweite Gerade B aufgenommen: B_{12} und ebenso hat B'' noch B_{21} aufgenommen, folglich enthalten ω' und ω'' noch die Punkte ω_{12} resp. ω_{21}, welche beiden Punkte der mit G vereinigten Geraden G'' angehören. Die Gerade B_{11} und der Punkt ω_{11} verhalten sich allein auch hier so wie im allgemeinen Falle.

Die Schnittcurve einer beliebigen Ebene E berührt sich selbst in dem Punkte (E, G); gemeinschaftliche Tangente beider Aeste ist (E, P). Ausser dieser Doppeltangente, welche zweifach rechnet, hat sie noch 2 andere: (E, P_1') und (E, P_1''). Ist E eine Berührungsebene der Fläche, so werden die beiden Kegelschnitte in E von (E, P) berührt. *Alle Ebenen durch G berühren in a^0, folglich schneiden alle — natürlich ausser P — Kegelschnitte aus, welche die Gerade G in a^0 berühren. Die Ebenen durch B' berühren alle in ω'; die von ihnen ausgeschnittenen 2 Kegelschnitte osculiren sich in ω'* (berühren sich in 2 benachbarten Punkten ω' und ω_{12}); die gemeinschaftliche Tangente in ω' ist B', die in ω_{12} ist B_{12}, welche neben B', aber nicht in der Ebene P, sondern in der Ebene P_1' zu denken ist). *Ebenso osculiren sich die von den Ebenen durch B'' ausgeschnittenen 2 Kegelschnitte in ω''.* Die Kegelschnitte dieser, wie jener Ebenen treffen sich, wie im allgemeinen Falle, noch auf G'. *Die beiden Kegelschnitte endlich, welche von den Ebenen des Büschels um B_{11}, die alle in ω_{11} berühren, ausgeschnitten werden, tangiren einander zweimal, in ω_{11} und im Schnittpunkt der Ebene mit G. In zwei Ebenen, P_1' und P_1'', sind sie,* wie im allgemeinen Falle, *in einen Kegelschnitt H_1' resp. H_1'' zusammengefallen, längs dessen die Ebene berührt.* Diese beiden Kegelschnitte H_1', H_1'' und die beiden Geraden G und G' befinden sich auf einem Kegel 2. Grades, der von P längs G berührt wird und seine Spitze in a^0 hat, derselbe vertritt also die Fläche 2. Grades des allgemeinen Falles, welche die 4 Kegelschnitte H enthält.

20. Im eben betrachteten speciellen Falle der Steiner'schen Fläche berührt P in je einem Punkte t^x von G eine Fläche der Schaar

$S(F_2^x)$ und jeder dieser Flächen entspricht ein Punkt a^x. Wir haben also 2 projectivische Punktreihen auf G: a^x und t^x. Die beiden Coincidenzpunkte sind ω' und ω''. Berührt P noch eine Fläche in deren entsprechendem Punkte, so haben die beiden Punktreihen 3 Paare zusammenfallender entsprechender Punkte gemein, folglich berührt jede Fläche in ihrem entsprechenden Punkte. Also alle Punkte a^x liegen auf ihren Flächen F_2^x, alle Kegel C_2^x zerfallen in 2 Büschel, deren Achsen in der Tangentenebene von $t^x = a^x$ d. i. jederzeit in P liegen. Die Fläche reducirt sich folglich auf eine ebene Curve (als Enveloppe ihrer sämmtlichen Tangentenebenen) in P und zwar diejenige, welche von den Geraden der Flächen der Schaar F_2^x eingehüllt wird, die in der Tangentenebene P der Fläche D_4 liegen. Dieselbe ist bekanntlich 3. Classe (und 6. Ordnung) und bildet den ferneren Schnitt der Fläche D_4 mit der Ebene P ausser der Generatrix G. Diese degenerirte Fläche 3. Classe hat aber natürlich die wichtigsten Eigenschaften der Steiner'schen Fläche und damit auch unser Interesse verloren.

21. *Die Ebene jedes der* 4 *Kegelschnitte* Q, *die zur Schaar* $S(F_2^x)$ *gehören, z. B.* Q'' *schneidet aus der Fläche* D_4, *auf der* Q'' *doppelt liegt, noch* 4 *Generatricen aus*, in denen die von dem Schnittpunkte der Ebenen der 3 übrigen Kegelschnitte — dem Pole der Ebene von Q'' in Bezug auf alle Flächen F_2^x — an die Fläche D_4 gelegten Ebenen dieselbe berühren. *Diese* 4 *Generatricen berühren den Kegelschnitt* Q'' und sind als Geraden der Fläche Q'' anzusehen, weil durch sie unendlich viele Tangentenebenen derselben gehen.

Wenn wir also *eine dieser* 4 *Generatricen zur Geraden* G *nehmen* (ω' sei der Punkt, in dem sie sich auf Q' stützt, ω'' derjenige, in dem sie Q'' berührt), *so wird* Q'' *die Fläche* F_2^0, *auf welcher* G *liegt und welche durch ihren entsprechenden Punkt* a^0 *geht, der mit* ω'' *zusammenfällt. Die beiden Geraden* G' *und* G'', *welche auf* $F_2^0 = Q''$ *durch* $a^0 = \omega''$ *gehen, fallen in die Tangente* G *von* Q'' *in* ω'' *zusammen*; *folglich vereinigt diese Gerade in sich alle* 3 *Geraden* G*), *und auch* B''. Wenn B' die Tangente von Q' in ω' ist — welche nicht in die Ebene von Q'' fällt —, so ist (G, B') die Ebene P, welche von allen Flächen F_2^x in Punkten auf G berührt wird. In allen Punkten von G ist sie wiederum die einzige Berührungsebene der Steiner'schen Fläche, ausgenommen in den beiden Punkten ω' und ω'', in denen die Fläche von allen durch B' resp. G gehenden Ebenen tangirt wird. Wie im vorigen Falle ist P an die Stelle der beiden gemeinsamen Ebenen des Büschels um G und der Kegel C_2^x (auf de-

*) Wir haben es also mit dem zweiten speciellen Falle zu thun, von dem Herr Cremona a. a. O. spricht.

nen allen G liegt) getreten, und ebenso geht durch B' noch eine zweite Doppelebene P_1', die zweite gemeinsame Ebene des Büschels B' und der Kegel C_2^{ν} von den Punkten b^{ν} auf B' ausser $P_2' = P$. Für $B'' = G$ haben sich diese beiden gemeinsamen Ebenen, wie eben gesagt, in P vereinigt. Wie im vorigen Falle enthält G auch noch die Gerade $B_{22} = (P_2', P_2'')$ und indem sie B'' in sich aufgenommen hat, vertritt sie zugleich die auch schon im vorigen Falle mit dieser vereinigte B_{21}; B', hier wie schon im vorigen Falle die B_{12} mit vertretend, hat nun, da auch P_1'' mit P identisch geworden ist, auch B_{11}, welche im vorigen Falle noch für sich bestand, mit sich vereinigt. Der Punkt $\omega' = (G', B')$ enthält in sich noch die beiden Punkte $\omega_{11} = (G', B_{11})$ und $\omega_{12} = (G'', B_{12})$, der Punkt $\omega'' = (G, B'')$, welche beiden Geraden man sich als benachbarte Tangenten von Q'' vorstellen kann, vertritt auch die Punkte $\omega_{21} = (G'', B_{21})$ und $\omega_{22} = (G', B_{22})$.

22. *Die Fläche hat also in dem jetzt betrachteten speciellen Falle nur* 2 *Doppelebenen: P, welche die* 3 *Ebenen P_2', P_1'' und P_2'' des allgemeinen Falles repräsentirt, also eine* 2 $(+ 2 + 2)$ *fache Ebene der Fläche ist, und P_1'. Jene hat mit der Fläche eine Berührung* 3. *Ordnung längs der Geraden G,* welche alle 3 Doppelgeraden in sich vereinigt und deren Involution J in die Ebene P zusammengeschrumpft ist, *diese berührt in einem Kegelschnitte H_1'. Eine beliebige Ebene E durchschneidet die Fläche in einer Curve* 4. *Ordnung, welche im Punkte (E, G) einen Doppelpunkt hat, der für* 3 *Doppelpunkte zählt, also ein* 2 $(+ 2 + 2)$ *facher Punkt ist, d. h. welche sich selbst in diesem Punkte osculirt.* Die beiden unendlich nahen gemeinschaftlichen Tangenten beider Aeste vertreten 3 Doppeltangenten, die vierte ist (E, P_1'). *Die beiden Kegelschnitte einer Berührungsebene L osculiren sich in (G, L). Jede Ebene durch G schneidet einen Kegelschnitt aus, der G in ω'' berührt, die Ebenen durch B' zwei Kegelschnitte, welche in ω' eine Berührung* 3. *Ordnung eingehen.* Als die drei unendlich nahen gemeinsamen Tangenten sind B', B_{12} und B_{11} anzusehen; zugleich sind dies drei auf einander folgende Tangenten des Kegelschnitts H_1'.

Die Gerade G ist in unserm jetzigen Falle eine 2 $(+ 2 + 2)$ *fache Gerade der Fläche,* d. h. im Allgemeinen zählt sie in dem Schnitte der durch sie gelegten Ebenen als einfache Doppelgerade, so dass noch ein Kegelschnitt als weiterer Schnitt bleibt. Nur im Schnitte zweier unendlich nahen Ebenen, P und ihrer Nachbarin, ist sie als doppelte Doppelgerade zu rechnen, so dass sie den vollen Schnitt bildet. *Im vorigen, noch etwas allgemeineren Falle* (Nr. 18. und 19.) *ist sie* 2 $(+ 2)$ *fache Gerade;* nur in P zählt sie als doppelte Doppelgerade.

III.

23. Wenn eine Curve auf der Steiner'schen Fläche F^4, — die v nun wieder allgemein annehmen —, gleichviel ob sie aus einem Co tinuum besteht oder in mehrere Curven zerfällt, p mal durch ein Punkt a einer Doppelgeraden geht, so müssen nothwendig q ($\leqq$ Zweige die eine Tangentenebene T_1 der Fläche in a und $p - q$ Zwei die andere Tangentenebene T_2 berühren. Wenn die Curve der vo Schnitt einer Fläche F^n mit F^4 ist, so vertheilen sich die Zweige gleicher Anzahl auf die beiden Tangentenebenen.

Nehmen wir nun an, eine Curve m^{ter} Ordnung C^m, welche auf liegt, gehe p mal durch den dreifachen Punkt a^0 und r Aeste berühr G, r' Aeste G' und r'' Aeste G'', so müssen noch p_1 Aeste die Ebe GG', p_2 Aeste die Ebene GG'' und p_3 Aeste die Ebene $G'G''$ u zwar ausserhalb der Geraden G berühren, wobei

$$r + r' + r'' + p_1 + p_2 + p_3 = p$$

ist. Wir nehmen an, dass jede dieser 7 Zahlen auch 0 sein kan Ist $p = 0$, so sind es die 6 übrigen selbstverständlich auch. In Fol der eben genannten Berührung und weil a^0 $p$fach ist, liegen in d Ebene GG' schon $p + r + r' + p_1$ Punkte von C^m. Die übrig Punkte, der Zahl nach $m - p - r - r' - p_1$, müssen sich auf d beiden Geraden G und G', die den vollen Schnitt ihrer Ebene n F^4 bilden, vertheilen; wenn also z. B. auf G q liegen, so müssen si auf G' $q' = m - p - r - r' - p_1 - q$ befinden. Ebenso müss auf G und G'' zusammen $m - p - r - r'' - p_2$, also auf G'' alle $q'' = m - p - r - r'' - p_2 - q$ liegen. Folglich muss wegen d dritten Ebene $G'G''$ sein:

$$m = p + p_3 + r' + r'' + 2m - 2p - 2r - r' - r'' - p_1 - p_2 - 2$$

worin

$$p_3 = p - r - r' - r'' - p_1 - p_2 .$$

Der Kegel, welcher die Curve C^m vom $p$fachen Punkte a^0 pro cirt, ist von der Ordnung $m - p$; er hat die Gerade G zur $(q +$ fachen Kante, die Gerade G' zur $(q' + r')$ fachen und die Gerade G zur $(q'' + r'')$ fachen Kante. Auf F^4 sind sie doppelt, also rechn sie beim Durchschnitt des Kegels und der Fläche als Gebilde von d Ordnung $(q + r + q' + r' + q'' + r'')\,2 = (q + r + m - p - r -$ $- q + m - p - r - p_2 - q)\,2 = (2m - 2p - 2r - p_1 - p_2 - q)$ Dazu kommt noch die Curve C^m selbst; einen weiteren Durchschn als die 3 Geraden G und die Curve C^m können die beiden Fläch nicht haben, da jede Gerade, die von a^0 ausgeht, die Fläche F^4 n noch einmal trifft. Folglich muss

$4m - 4p - 4r - 2p_1 - 2p_2 - 2q + m = (m - p)\,4$ sein, oder

$$(1) \qquad m = 4r + 2p_1 + 2p_2 + 2q \ldots$$

Also m muss gerade sein.

Es giebt demnach *auf der Steiner'schen Fläche keine Curve ungerader Ordnung.*

24. Nehmen wir an, die Curve — sie heisse nun C^{2n}, indem wir m durch $2n$ ersetzen — ginge nicht durch den Punkt a^0, so dass $p = 0$ und in Folge dessen auch $p_1 = p_2 = p_3 = r = r' = r'' = 0$, so ist

$$2n = 2q; \text{ also } q' = q'' = q = n;$$

folglich *trifft eine Curve* $2n^{\text{ter}}$ *Ordnung auf* F^4, *die nicht durch den dreifachen Punkt geht, jede der drei Doppelgeraden in n Punkten. Eine Curve 4. Ordnung muss also alle drei Doppelgeraden in zwei Punkten treffen. Sind diese auf allen drei Geraden wirklich getrennt oder findet auch auf einer oder der andern der drei Geraden eine Berührung statt, so haben wir eine Raumcurve 4. Ordnung mit drei scheinbaren Doppelpunkten, folglich eine Curve II. Species. Sind aber die beiden Punkte auf einer Geraden in einen Doppelpunkt zusammengefallen, so ist die Curve eine der I. Species (mit zwei scheinbaren Doppelpunkten). Haben sich die beiden Punkte auf zwei Doppelgeraden in einen Doppelpunkt vereinigt, so ist die Curve in zwei Kegelschnitte zerfallen, die sich auf den beiden Doppelgeraden begegnen und im Allgemeinen in zwei verschiedenen Ebenen liegen. Ist dies nicht der Fall, so haben sich auch die beiden Punkte auf der dritten Doppelgeraden in einen Punkt vereinigt: wir haben es mit einer Berührungsebene zu thun. Aber eine Vereinigung aller drei Punktenpaare je in einen Doppelpunkt findet nicht blos bei den Schnittcurven der Berührungsebenen, sondern bei allen ebenen Schnittcurven (4. Ordnung) statt.*

Es ist bis jetzt bewiesen, dass auf F^4 eine Raumcurve 4. Ordnung I. Species, die nicht durch den dreifachen Punkt geht, nicht ohne Doppelpunkt sein kann. Aber auch wenn sie diesen Punkt passirt — also natürlich, um nicht hier schon einen Doppelpunkt zu statuiren, einmal —, muss sie doch anderweitig, auf einer der drei Geraden G, einen Doppelpunkt besitzen. Da sie einfach durch a^0 geht, so ist im Allgemeinen eine der Grössen p_1, p_2, p_3, z. B. $p_1 = 1$, und dann ist $p_2 = p_3 = r = r' = r'' = 0$, oder im besonderen Falle eine der drei Grössen r, r', r'', z. B. $r = 1$ und dann ist $r' = r'' = p_1 = p_2 = p_3 = 0$. Es ist ersichtlich, dass die obige Gleichung:

$$(1) \qquad m = 2n = 4r + 2p_1 + 2p_2 + 2q$$

zwei analoge hat:

$$(2) \qquad 2n = 4r' + 2p_1 + 2p_3 + 2q' \quad \text{und}$$

$$(3) \qquad 2n = 4r'' + 2p_2 + 2p_3 + 2q''.$$

Im ersteren Falle ist demnach $q'' = 2$, $q = q' = 1$; im andern Falle ist $q = 0$, aber $q' = q'' = 2$. In jenem Falle wird also die Curve 4. Ordnung von einem ihrer Punkte a^0 durch einen Kegel 3. Ordnung mit einer Doppelkante projicirt, was bei einer Raumcurve 4. Ordnung und I. Species ohne einen Doppelpunkt nicht möglich ist; der zweite Fall kann überhaupt nicht eintreten, da in demselben die Ebene (G', G'') von der Curve 5 mal getroffen würde.

Es giebt also *auf der Steiner'schen Fläche keine Raumcurve 4. Ordnung und I. Species ohne Doppelpunkt.*

25. Da jede von a^0 ausgehende Gerade — ausser den drei Geraden G — die Fläche F^4 nur noch einmal trifft, so folgt, dass an jede Curve C^{2n} auf F^4, welche nicht durch a^0 geht, von diesem Punkte nur die drei n fachen Secanten G gehen, welche $\frac{3n(n-1)}{2}$ (gewöhnliche) Secanten — Gerade, welche C^{2n} in 2 Punkten treffen, speciell in einem Punkte berühren oder durch einen Doppelpunkt gehen — vertreten. Folglich hat die Curve, wenn sie h Doppelpunkte auf den Doppelgeraden besitzt, $\frac{1}{2}n(n-1) - h$ scheinbare Doppelpunkte und *falls* C^{2n} *noch mit* h' *Doppelpunkten ausserhalb der Doppelgeraden behaftet ist, ist ihr Geschlecht* $\frac{(2n-1)(2n-2)}{2} - \frac{1}{2}n(n-1) - h' = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - h'$, also *gleich dem Geschlechte einer mit* h' *Doppelpunkten behafteten ebenen Curve* n^{ter} *Ordnung.*

Dies weist auf die punktweise Abbildbarkeit der Curven auf der Fläche F^4 *in Curven einer Ebene* E *hin*, also auf die schon mehrfach erwähnte Abbildung, welche die Herren Clebsch, Cremona und Reye besprochen haben. Da wir dieselbe, wenn auch nicht zur Auffindung, so doch zur Controllirung der anderweitig gefundenen Eigenschaften der Curven auf der Steiner'schen Fläche verwenden wollen, so möge eine kurze Wiederholung derselben hier gestattet sein.

26. Die 4 Kegelschnitte H der Fläche werden in der Ebene E als Geraden $\mathfrak{H}$ abgebildet; die Diagonalen $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}'\,\mathfrak{G}''$ des Vierseits derselben sind die Bilder der Doppelgeraden $G\,G'\,G''$. *Im Allgemeinen hat jeder Punkt der Fläche nur ein Bild; die Punkte a der Doppelgeraden haben zwei Bilder* $\mathfrak{a}_1$ *und* $\mathfrak{a}_2$, *die den beiden Tangentenebenen* T_1 *und* T_2 *in a an* F^4 *derartig entsprechen, dass das Bild einer durch a einfach gehenden und* T_1 *resp.* T_2 *berührenden Curve oder des* T_1 *resp.* T_2 *berührenden Zweiges einer mehrfach durch a gehenden Curve durch* $\mathfrak{a}_1$ *resp.* $\mathfrak{a}_2$ *geht.* Die beiden Punkte $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$, welche denselben Punkt a abbilden, — associirte Punkte — liegen zu den Bildern der beiden Cuspidalpunkte ω, also zu den durch die Diagonale verbundenen Ecken des Vierseits $\mathfrak{H}$ harmonisch. Der dreifache Punkt a^0 wird durch die drei Ecken des Dreiseits $\mathfrak{G}\,\mathfrak{G}'\,\mathfrak{G}''$ abgebildet. *Jedem Kegelschnitte* S *auf* F^4 *entspricht in* E *eine Gerade* $\mathfrak{S}$ und zwei Kegelschnitte $S'\,S''$ einer

Tangentenebene. — associirte Kegelschnitte —, welche sich dreimal auf den Doppelgeraden schneiden und verschiedene Ebenen T berühren, haben zu Bildern zwei Geraden $\mathfrak{S}'\mathfrak{S}''$, die den Geraden $\mathfrak{G}$ in 3 Paaren associirter Punkte begegnen, sich selbst im Bilde $\mathfrak{s}$ des vierten Schnittpunktes s der beiden Kegelschnitte, des Berührungspunktes, treffen. Zwei beliebige Kegelschnitte haben im Allgemeinen nur einen Punkt gemein, in dessen Bild sich ihre Bildgeraden schneiden; 2 Punkte haben sie gemein, wenn mindestens einer auf einer Doppelgeraden liegt, die beiden Kegelschnitte aber in demselben von verschiedenen Tangentenebenen der Fläche berührt werden, so dass dieser Punkt in verschiedenen Punkten abgebildet wird, je nachdem er dem einen oder dem andern Kegelschnitte angehört. Liegt auch der zweite gemeinsame Punkt auf einer Doppelgeraden, so müssen die Kegelschnitte, wenn sie in verschiedenen Ebenen liegen, in diesem Punkte von derselben Tangentenebene berührt werden, damit das Bild dieses Punktes der Schnittpunkt der beiden Bildgeraden sei. (Nr. 13.)

Eine ebene Schnittcurve C^4 *von* F_3^4 (mit 3 Doppelpunkten, vom Geschlechte 0) begegnet jedem Kegelschnitt S zweimal, ihr Bild also dem Bilde $\mathfrak{S}$ von S, einer Geraden, ebenso oft und ist ein Kegelschnitt $\mathfrak{C}^2$ (also vom Geschlechte 0), der den 3 Geraden $\mathfrak{G}$ in associirten Punkten begegnet. Je drei Paare associirter Punkte in E liegen also auf einem Kegelschnitte.

27. *Der volle Durchschnitt der Steiner'schen Fläche und einer Fläche* 2. *Grades* F^2 *ist eine Curve* 8. *Ordnung* R^8 *mit* 6 *Doppelpunkten*, den Begegnungspunkten der F^2 mit den 3 Geraden G; in jedem derselben berührt der eine Ast die eine Tangentenebene von F^4, der andere die andere. Das Flächenbüschel der Polarebenen der Punkte einer Geraden in Bezug auf F^2 und das Büschel der cubischen Polarflächen derselben in Bezug auf F^4, zu dessen Grundcurve die 3 Geraden G gehören (Nr. 8.), erzeugen eine Fläche 4. Ordnung, auf der sich diese Geraden befinden, und welche R^8 ausser in den 6 Doppelpunkten 20mal trifft. Demnach wird jene Gerade von 20 Tangenten der R^8 getroffen, also ist diese Curve *vom* 20. *Range*. Daraus folgt, dass sie 36. Classe ist, ausser den 6 wirklichen noch 12 scheinbare Doppelpunkte besitzt und also das Geschlecht 3 hat. Dies Geschlecht 3 weist darauf hin, dass *eine Fläche* 2. *Grades mit der Steiner'schen Fläche höchstens* 3 *Berührungen eingehen kann, ohne dass die Durchschnittscurve zerspaltet*. Durch jede solche Berührung bekommt die Curve noch einen Doppelpunkt, der dann die Classe um 2, das Geschlecht um 1 erniedrigt. *Die allgemeine Curve* R^8 *trifft jede Gerade auf* F^2 *viermal;* sie wird aus jedem ihrer einfachen Punkte durch einen Kegel 7. Ordnung und 18. Classe mit zwei dreifachen Kanten — die ausser durch die Spitze noch durch je 3 Punkte der Curve gehen —

und 6 Doppelkanten — welche nach den Doppelpunkten laufen — projicirt.

R^6 trifft jeden Kegelschnitt S auf F^4 viermal, weil dies F^2 thut; folglich ist das Bild von R^6, wenn keine Berührung stattfindet, eine Curve 4. Ordnung $\mathfrak{R}^4$ ohne Doppelpunkte, also vom Geschlechte 3, bei h (≤ 3) Berührungen mit h Doppelpunkten und vom Geschlechte $3 - h$. $\mathfrak{R}^4$ trifft jede der drei Geraden $\mathfrak{G}$ in 2 Paaren associirter Punkte, den Bildern der Doppelpunkte auf der Doppelgeraden.

28. *Wenn F^2 durch eine Doppelgerade von F^4 z. B. G geht, so ist der fernere Schnitt eine Curve 6. Ordnung R^6, welche noch einmal durch a^0 geht und dort die Ebene (G', G'') tangirt. Dieselbe wird von allen Geraden auf F^2 aus derselben Schaar wie G viermal, von denen der andern zweimal getroffen. Auch G hat mit R^6 vier Punkte gemein, nämlich a^0 und 3 Berührungspunkte der beiden Flächen:* die Involution der Tangentenebenenpaare der Fläche F^4 und das Büschel der Tangentenebenen der Fläche F^2 in den Punkten von G sind projectivisch und haben 3 Coincidenzebenen. Diese 4 Begegnungspunkte der beiden Bestandtheile zählen vierfach; ferner *hat R^6 noch je einen Doppelpunkt auf G' und G''*, in denen die beiden Aeste stets von verschiedenen Tangentenebenen der Fläche F^4 berührt werden (so dass die Tangenten der beiden Aeste wohl eine Berührungsebene von F^2, aber nicht von F^4 erzeugen); folglich *hat R^6 den Rang* 12, 7 scheinbare Doppelpunkte und das Geschlecht 1; sie wird von jedem ihrer Punkte durch einen Kegel 5. Ordnung, 10. Classe mit einer dreifachen Kante — die durch 3 Punkte gehen — und 2 Doppelkanten — die durch die Doppelpunkte gehen — projicirt.

F^2 trifft jeden Kegelschnitt S ausserhalb G noch dreimal; also thut dies auch R^6. Das Bild von R^6 ist demnach eine Curve 3. Ordnung $\mathfrak{R}^3$ ohne Doppelpunkt, sobald auf R^6 ausserhalb der Doppelgeraden sich keiner befindet, wie oben angenommen, also ebenfalls vom Geschlechte 1. $\mathfrak{R}^3$ trifft $\mathfrak{G}$ in den *einen* Bildern der 3 Begegnungspunkte von R^6 und G, in denen die Berührung stattfindet, und zwar denen, die den Berührungsebenen von F^4 zugehören, welche zugleich F^2 tangiren. Der vierte Begegnungspunkt von G und R^6, a^0, bildet sich nicht auf G ab, sondern weil R^6 die Ebene (G', G'') tangirt, im Punkte $(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'')$. Jede dieser beiden Geraden wird von R^3 noch in 2 associirten Punkten getroffen.

29. *Geht F^2 durch einen Kegelschnitt S'*, dessen Socius S'' sei, *so ist der fernere Schnitt der beiden Flächen ebenfalls eine Curve 6. Ordnung W^6, welche von jeder Geraden auf F^2 dreimal getroffen wird.* Alle Punkte von W^6 in der Ebene von S' müssen auf S' liegen, drei sind die Punkte a, in denen sich S' auf die 3 Doppelgeraden G stützt und welche dem Gesammtdurchschnitt doppelt angehören, also *sind ausser-*

dem noch 3 *Punkte c, in denen sich* W^6 *und* S' *begegnen.* In den Punkten a wird W^6 von andern Tangentenebenen der Fläche F^4 berührt, als S', also von denselben wie S''. Ausserdem *hat* W^6 *noch auf jeder Doppelgeraden einen Doppelpunkt;* daraus ergiebt sich *der Rang von* W^6 — nach Abzug des Ranges 2 von S' — *ebenfalls* 12, also stimmen auch Geschlecht und Classe mit dem von R^6; aber dort 2 wirkliche und 7 scheinbare, hier 3 wirkliche und 6 scheinbare Doppelpunkte. Von jedem ihrer einfachen Punkte wird W^6 durch einen Kegel 5. Ordnung und 10. Classe mit 5 Doppelkanten — von denen 3 nach den Doppelpunkten, 2 nach je zwei verschiedenen Punkten der Curve gehen — projicirt. Den Socius S'' trifft W^6 dreimal, in den 3 Punkten a; aber auch jeder andere Kegelschnitt S auf F^4 wird von W^6 dreimal getroffen, da F^2 ihn viermal trifft und S' mit S im Allgemeinen nur einen Punkt gemein hat, oder wenn mehrere, die übrigen zu den Punkten a gehören und also auf W^6 liegen. Das Bild von W^6 ist eine Curve 3. Ordnung $\mathfrak{W}^3$ (ohne Doppelpunkt, also vom Geschlechte 1). Sie trifft die 3 Geraden $\mathfrak{G}$ in den Punkten, wo ihnen $\mathfrak{S}''$, das Bild von S'', begegnet, und dann noch in je 2 associirten Punkten.

30. Ist die Fläche F^2 ein Kegel K^2, der seine Spitze auf einer der 3 Doppelgeraden z. B. auf G in a hat, so ist dieser Punkt für den vollen Durchschnitt R^8 ein vierfacher Punkt, in den sich also die beiden Doppelpunkte auf der Geraden G vereinigt haben, der aber $\frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ Doppelpunkte repräsentirt, so dass die Curve R^8 demnach 10 wirkliche Doppelpunkte ausser den 12 scheinbaren hat, das Geschlecht also — 1 ist, zum Zeichen, dass sie in Curven niedrigerer Ordnung zerfällt, ersichtlich, da es Curven ungerader Ordnung auf der Steiner'schen Fläche gar nicht giebt und der Kegel im Allgemeinen auch nicht über einem Kegelschnitte der Fläche steht, in zwei Raumcurven 4. Ordnung R_1^4 und R_2^4, welche sich dann je zweimal auf jeder der Geraden G' und G'' begegnen und beide in a einen Doppelpunkt haben. Dieser Doppelpunkt weist auf die erste Species hin. Steht übrigens der Kegel über einem Kegelschnitt der Fläche, so löst sich die eine der beiden Curven in diesen und die Doppelgerade G auf. Wenn im besonderen Falle der Kegel K^2 der von a an die Fläche F^4 gelegte Berührungskegel ist, so haben sich die beiden Curven R_1^4 und R_2^4 in eine einzige Curve R^4 vereinigt.

Ein beliebiger Kegel 2. Grades also, der seine Spitze in einer Doppelgeraden der Steiner'schen Fläche hat, durchschneidet dieselbe in 2 Raumcurven 4. Ordnung I. Species, welche beide durch die Spitze des Kegels doppelt gehen und sich je zweimal auf den beiden andern Doppelgeraden begegnen. Der von einem Punkte einer Doppelgeraden

an die Fläche gelegte Tangentialkegel hat zur Berührungscurve eine Raumcurve 4. Ordnung I. Species, welche zweimal durch die Spitze geht (weil dort ja 2 — durch G gehende — Ebenen tangiren) *und die beiden andern Doppelgeraden in deren Cuspidalpunkten trifft**). (Nr. 8.).

30. Wir gehen nun wieder *zur allgemeinen Fläche 2. Grades* F^2 zurück und *legen dieselbe durch 2 Doppelgerade der Steiner'schen Fläche: G und G'. Der fernere Schnitt ist eine Curve 4. Ordnung* V^4, *die von jeder Geraden auf* F^2, da diese entweder G oder G' trifft, *zweimal getroffen wird und sich durch dieses characteristische Kennzeichen als Curve I. Species offenbart.* Auch G und G' werden zweimal getroffen, denn die dritte Coincidenz (Nr. 29.) findet, da (GG') beide Flächen in a^0 berührt, diesmal in diesem Punkte statt. *Als Curve I. Species auf* F^4 *muss sie selbst einen Doppelpunkt aufweisen:* es ist dies der zweite Schnittpunkt der dritten Doppelgeraden G'' mit F^2. So hat der Totaldurchschnitt 12 Doppelpunkte (a^0 zählt vierfach, die 4 Begegnungspunkte von G und G' mit V^4 doppelt), woraus auch für V^4 der wegen des Doppelpunktes zu erwartende *Rang* 6 und das Geschlecht 0 (ein wirklicher, zwei scheinbare Doppelpunkte; bei der Curve II. Species derselbe Rang, dasselbe Geschlecht, aber kein wirklicher, sondern 3 scheinbare Doppelpunkte) hervorgeht.

Jeder Kegelschnitt S wird von F^2 viermal, je einmal auf G und auf G' getroffen, also von V^4 zweimal. Folglich ist das Bild von V^4 ein Kegelschnitt $\mathfrak{S}^2$, welcher $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ in den einen Bildern der auf G und G' liegenden Berührungspunkte von F^4 und F^2 begegnet, denjenigen, die der gemeinsamen Berührungsebene zugehören. $\mathfrak{G}''$ wird von $\mathfrak{S}^2$ in 2 associirten Punkten getroffen.

32. *Hat* F^2 *mit* F^4 *eine Doppelgerade G und einen Kegelschnitt S' gemein, so wird der fernere Schnitt* U^4 (4. *Ordnung*) *von allen Geraden der Schaar auf* F^2, *zu welcher G gehört, dreimal, von allen der andern Schaar einmal getroffen und zeigt sich dadurch als Curve 4. Ordnung und II. Species.* Aus diesem characteristischen Kennzeichen folgt, dass durch die Curve nur eine einzige Fläche 2. Grades — hier F^2 — geht, was gewöhnlich als Haupteigenschaft der II. Species angeführt wird. Durch die beiden Punkte $a'a''$, in denen sich S' auf G' und G'' stützt, geht U^4 (so dass dieselben Doppelpunkte des Totaldurchschnitts werden), ferner noch einfach durch a^0 und berührt dort die Ebene (G', G''). F^4 und F^2 haben auf G drei Berührungen: eine geschieht in dem Punkte a, in dem sich S' auf G stützt (gemeinsame Berührungsebene sei T_1), die beiden andern geben Begegnungspunkte von U^4 und G. Ausserdem trifft U^4 den Kegelschnitt S' noch zwei-

*) Man sehe über deren Abbildung Reye a. a. O.

mal, in ihren beiden weitern Schnittpunkten mit dessen Ebene. Es haben sich also 8 Begegnungspunkte der Partialcurven ergeben, von denen die 4 auf G doppelt rechnen: daraus ergiebt sich für U^4 *der Rang* 6. Da es keine Schnittpunkte von G' oder G'' mit F^2 giebt, die sich nicht auf G oder S' befinden, so hat U^4 — wie zu erwarten — keinen wirklichen Doppelpunkt, sondern drei scheinbare und das Geschlecht 0.

Von den 4 Begegnungspunkten der Fläche F^2 mit einem Kegelschnitte S auf F^4 liegt einer auf G, einer auf S', also zwei auf U^4. Folglich ist das Bild von U^4 ein Kegelschnitt $\mathfrak{U}^2$. Es kommt wohl vor, dass U^4 mit einem Kegelschnitte S mehr als 2 Punkte gemein hat; die übrigen sind dann aber stets Punkte auf einer Doppelgeraden und U^4 wird in denselben von einer andern Berührungsebene der Fläche F^4 berührt als S, so dass sich diese überschüssigen Begegnungspunkte in 2 verschiedene Punkte abbilden, je nachdem sie zu U^4 oder zu S gerechnet werden, oder wenn dies nicht der Fall, so berührt F^2 dort den Kegelschnitt S.

$\mathfrak{U}^2$ trifft die Geraden $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$ dort, wo dieselben von $\mathfrak{S}''$, dem Bilde des Socius S'' von S', getroffen werden, und in $(\mathfrak{G}', \mathfrak{G}'')$, weil U^4 durch a^0 geht und (G', G'') tangirt. $\mathfrak{G}$ wird in den Bildern der Begegnungspunkte von U^4 und G getroffen, die den gemeinsamen Berührungsebenen von F^2 und F^4 in diesen Punkten zugehören.

33. *Durch 2 Kegelschnitte S, die sich* — wie dies im Allgemeinen stattfindet — *einmal begegnen, geht keine allgemeine Fläche 2. Grades. Wird eine solche durch 2 Kegelschnitte gelegt, die sich zweimal treffen, in a auf den Doppelgeraden G und in s ausserhalb der Doppelgeraden, so ist der fernere Schnitt eine Raumcurve 4. Ordnung und I. Species R^1*, welche durch die Punkte, in denen sich die beiden Kegelschnitte auf G' und G'' stützen, einfach geht, *ihren Doppelpunkt im zweiten Schnittpunkte der Fläche F^2 mit G (ausser a) hat* und jeden der beiden Kegelschnitte noch zweimal ausserhalb der Doppelgeraden trifft.

Liegen die beiden gemeinsamen Punkte von S_1 und S_2 auf Doppelgeraden: a auf G, a' auf G', so müssen S_1 und S_2, wenn sie, wie im vorigen Falle, in a von verschiedenen Tangentenebenen der Fläche F^4 berührt werden, in a' von derselben, T_1', tangirt werden, welche ersichtlich dann auch F^2 berührt. Folglich tangirt G' diese Fläche in a' und dieser Punkt repräsentirt 2 Doppelpunkte des Durchschnitts, also ausser dem von (S_1, S_2) noch einen von R^4; jedoch R^4 hat schon einen, den zweiten Schnittpunkt a_1 von F^2 mit G, folglich *zerfällt R^4 in 2 Kegelschnitte S_3, S_4*, die sich in a_1 und a' begegnen, in letzterem Punkte ebenfalls wie S_1 und S_2 von derselben Berührungsebene T_1' der Fläche F^4 (und F^2), in a_1 aber von verschiedenen tangirt werden. Durch die beiden Punkte a_1'' und a_2'', in denen F^2 die Gerade G''

trifft, oder in denen S_1 und S_2 sich auf G'' stützen, muss $R^4 = (S_3, S_4)$ nochmals gehen; es gehe also S_3 durch a_1'' und begegnet dort S_1, berührt aber die andere Tangentenebene als S_1, da beide in a' dieselbe tangiren; S_4 geht dann durch a_2'', wo er S_2 begegnet und ebenfalls von der andern Tangentenebene berührt wird. S_1 und S_4, in a' von derselben Tangentenebene berührt, haben keinen andern Punkt auf einer Doppelgeraden gemein, also überhaupt keinen, sie berühren sich in a'; dasselbe gilt für S_2 und S_3.

Wird die Fläche F^2 durch (S_1, S_2) geändert, so ändert sich S_3 und S_4; ihr zweiter Schnittpunkt a_1 durchläuft die Gerade G. Die Berührung mit T_1' in a' bleibt, ebenso geht S_3 stets durch a_1'', S_4 durch a_2''. Fällt a_1 in a^0, so liegen G' und G'' auf F^2, weil G' in a' berührt und in a^0 trifft, G'' in a_1'', a_2'' und a^0 begegnet, und repräsentiren die beiden Kegelschnitte S_3 und S_4. Die Reihe S_3, S_4 wird nur durch die beiden Kegelschnitte S_1 und S_2 hervorgerufen, weil es auf der Fläche F^4 nicht zwei Kegelschnitte giebt, welche in a_1' wie in a_1'' (oder a_2'') von derselben Tangentenebene der Fläche berührt werden.

34. *Jede Raumcurve* 4. *Ordnung* R^4 *auf der Fläche* F^4, *die nicht durch* a^0 *geht*, trifft, wie im Anfang dieses Abschnitts (Nr. 23.) bewiesen, jede der 3 Doppelgeraden doppelt; sie ist I. Species, wenn das Paar der Begegnungspunkte auf einer Doppelgeraden identisch geworden (das blosse Nebeneinanderfallen bewirkt diese Umänderung der Species nicht), sonst II. Species. *Jedenfalls wird sie*, mag sie von dieser oder von jener Species sein, *aus* a^0 *durch einen Kegel* 4. *Ordnung, welcher die* 3 *Doppelgeraden zu Doppelkanten, sonst übrigens keine hat, und den wir stets mit* K^4 *bezeichnen wollen, projicirt und ist zugleich der einzige fernere Schnitt desselben mit* F^4, *so dass jede Curve* R^4 *einen Kegel* K^4 *veranlasst und umgekehrt.*

35. Geht nun aber R^4 durch den Punkt a^0, so kann sie, sobald sie II. Species ist und nicht zerfallen soll, nur einmal denselben passiren. Sie hat dann ihre Tangente A (im Punkte a_0) in einer der 3 Ebenen GG', GG'', $G'G''$ liegen; nehmen wir an, in $G'G''$. Es müssen dann noch auf G' und G'' zusammen zwei Punkte von R^4 liegen, damit sich die 4 Schnittpunkte der Ebene $G'G''$ mit der Curve ergeben. Nun sollen aber auf GG' und auf GG'' auch 4 sich befinden, mithin nothwendig auf G', G'' je einer: a', a'', auf G zwei aa_1, also in $G'G''$: a^0 und sein Nachbar auf A, a', a''; in GG': $a^0a'aa_1$; in GG'': $a_0a''aa_1$. (Man vergl. Nr. 23.). Der Kegel 3. Ordnung K^3, welcher R^4 aus a^0 projicirt, hat also G zur Doppelkante, G' und G'' aber zu einfachen; R^4 ist sein einziger weiterer Schnitt mit F^4 ausser diesen 3 Kanten.

Die Tangente A kann mit keiner der beiden Geraden G' und G'' zusammenfallen, denn dann müssten, damit in jeder der 3 Ebenen 4 Punkte sind, auf jeder der beiden andern Geraden sich noch 2 Punkte ausser a^0 befinden; so dass der Kegel K^3 zwei Doppelkanten hätte; er würde dann in deren Ebene und einen Kegel 2. Grades durch alle 3 Kanten zerfallen, dessen weiterer Schnitt ein Kegelschnitt wäre, aber nicht R^4.

Wenn hingegen R^4 I. Species ist und einfach durch a^0 geht, so berührt sie dort diejenige Ebene, in der sich die Doppelgerade, welche ihren Doppelpunkt enthält, nicht befindet; die beiden andern enthalten von ihr je noch einen Punkt: der Projectionskegel ist wie oben 3. Ordnung, mit einer Doppelkante. Wenn aber der Punkt a^0 Doppelpunkt ist, so liegen seine beiden Tangenten A' und A'' in zweien der Ebenen GG', GG'', $G'G''$; nehmen wir an in GG' und GG''. Es muss auf G' und G'' noch je ein zweiter Punkt von R^4 liegen, auf G aber liegt keiner; es ist diese also diejenige Gerade, welcher der Doppelpunkt a^0 zugehört, während die beiden andern die in zwei Punkten getroffenen sind. Der Projectionskegel aus a^0 ist 2. Grades, K^2, und enthält nur die beiden Geraden $G'G''$; R^4 ist sein fernerer Schnitt mit F^4.

Auch hier kann sich A' oder A'' mit keiner der 3 Geraden G vereinigen; denn wenn z. B. A' mit G zusammenfiele und A'' in GG'' läge, so käme auf G'' kein Punkt, auf G' aber immer noch einer, in die Ebene $G'G''$ also blos drei; oder wenn A' mit G sich vereinigte, A'' in $G'G''$ läge, so läge auf G' und G'' je ein Punkt von R^4, in der Ebene $G'G''$ aber fünf: der Doppelpunkt a^0, sein Nachbar auf A'' und die beiden Punkte von G', G''. Vereinigten sich endlich beide Tangenten in eine Rückkehrtangente, die nach G fiele, so bekäme zwar jede der beiden Geraden G' und G'' ausser a^0 noch einen Punkt, so wie auch G ihn hat, also jede der drei Ebenen enthielte 4 Punkte, jedoch der Projectionskegel, welcher 2. Grades wäre, enthielte alle 3 Geraden, könnte also nicht noch eine Curve 4. Ordnung ausschneiden.

Also *eine Raumcurve 4. Ordnung und II. Species kann a^0 nur zum einfachen Punkt haben, eine der I. Species kann ihn auch zum Doppelpunkt haben; die eine oder die beiden Tangenten befinden sich in einer oder in zwei von den 3 Berührungsebenen des dreifachen Punktes, können sich nie, sofern die Curve allgemein sein soll, mit einer der 3 Doppelgeraden vereinigen.* (Man vergl. Nr. 24.)

36. Zwei Raumcurven 4. Ordnung auf F^4, die nicht durch a^0 gehen, haben, weil jede von a^0 ausgehende Gerade F^4 nur noch einmal trifft, so viel Punkte gemein, als die ihnen zugehörigen Kegel K^4 ausser den 3 Doppelkanten Kanten gemein haben, ersichtlich $4 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \cdot 2 = 4$. Geht eine durch a^0 und zwar einmal, so ergiebt

sich die Anzahl der gemeinsamen Punkte $4 . 3 - 2 . 2 - 2 - 2$, also ebenfalls 4; geht sie zweimal durch a^0 (so dass sie I. Species ist): $4 . 2 - 2 - 2 = 4$. Aber wenn beide durch a^0 gehen, so erhalten wir als gemeinschaftliche Punkte, wenn 1) beide einmal es thun und verschiedene Ebenen berühren, $3 . 3 - 2 - 2 - 1 = 4$, wenn sie aber dieselbe Ebene berühren, $3 . 3 - 2 . 2 - 1 - 1 = 3$, 2) wenn die eine einmal, die andere zweimal durch a^0 geht und die von jener berührte Ebene mit keiner der beiden von dieser berührten Ebenen übereinstimmt, $3 . 2 - 1 - 1 = 4$, wenn dies aber der Fall ist, $3 . 2 - 2 - 1 = 3$, und wenn endlich 3) beide zweimal durch a^0 gehen und die beiden Paare der berührten Ebenen nur eine Ebene gemein haben, $2 . 2 - 1 = 3$, wenn aber diese beiden Paare identisch sind, $2 . 2 - 1 - 1 = 2$ gemeinschaftliche Punkte, natürlich ausser a^0 selbst. Da aber in 1) a^0 einen einfachen, in 2) einen zweifachen und in 3) einen vierfachen Schnittpunkt der beiden Curven repräsentirt, so ist ersichtlich, da die obigen Reductionen nie mehr als 2 betragen, dass zwei Raumcurven 4. Ordnung auf F^4 mehr als 4 Begegnungspunkte haben. Die oben erhaltenen 4 Begegnungspunkte sind entweder ausserhalb der Doppelgeraden liegende oder solche auf einer Doppelgeraden befindliche, in denen beide Curven dieselbe Berührungsebene der Fläche F^4 tangiren, im letzteren Falle haben nämlich die über den Curven stehenden Kegel noch eine oder mehrere der längs der Doppelgeraden berührenden Tangentenebenen gemein, was natürlich eine Reduction der Anzahl der von den Doppelgeraden verschiedenen gemeinsamen Kanten zur Folge hat.

37. Dagegen findet diese Reduction nicht statt, wenn die Curven sich derartig auf einer Doppelgeraden begegnen, dass sie verschiedene Berührungsebenen tangiren. Solche Begegnungspunkte haben z. B. *zwei Curven 4. Ordnung, welche den Totaldurchschnitt der Fläche F^4 mit einer sie in 4 Punkten berührenden Fläche 2. Grades zusammensetzen.* Da stets eine Fläche 2. Grades möglich ist, welche F^4 in 3 bestimmten Punkten tangirt, so *wird es ersichtlich unendlich viele F^2 geben, welche F^4 in 4 Punkten berühren; die Durchschnittscurve einer solchen Fläche hat*, wie alle Durchschnittscurven der Fläche F^4 mit Flächen 2. Grades, 6 *Doppelpunkte auf den 3 Geraden G, in denen die Aeste von verschiedenen Tangentenebenen von F^4 berührt werden, und 4 Doppelpunkte an den Stellen der Berührung. Sie muss also in zwei Curven niedrigerer Ordnung zerfallen, ersichtlich in 2 Curven 4. Ordnung, die sich in den 4 Berührungspunkten begegnen und ausserdem, wenn sie beide Curven II. Species sind, in den 6 Punkten auf den Doppelgeraden, so dass sie auf verschiedenen Mänteln liegen, oder wenn sie Curven I. Species sind, je zweimal auf zwei Doppelgeraden (ebenfalls von verschiedenen Mänteln herkommend), während die beiden*

Doppelpunkte auf der dritten Geraden G die den beiden Partialcurven angehörigen sind. Die 8 Punkte, welche den beiden Curven I. Species gemeinsam sind, bilden die Grundpunkte eines Flächennetzes 2. Ordnung, sind 8 verbundene Punkte; denn durch 8 von einander unabhängige Punkte geht ja nur eine einzige Curve I. Species. *Die Geraden auf der vierfach berührenden Fläche 2. Grades treffen im zweiten Falle jede der beiden Curven I. Species zweimal, dagegen trifft im ersten Fall eine Gerade, welche der einen Curve II. Species dreimal begegnet, die andere einmal.* Daraus ist auch ersichtlich, dass *eine Curve I. und eine II. Species nicht derselben Fläche 2. Grades angehören, „associirt"* (conjugirt, wie Herr Cremona sagt) *sein können.*

38. Da durch jede Curve I. Species ein Büschel von Flächen 2. Grades geht, die alle noch eine Curve I. Species ausschneiden, in deren 4 (hier sicher) ausserhalb der Doppelgeraden liegenden Begegnungspunkten die betreffende Fläche die F^4 tangirt, so *hat jede Curve I. Species R^4 unendlich viele associirte Curven R_x^4, welche sämmtlich durch die 4 Punkte gehen, in denen sich jene auf die beiden nicht ihren Doppelpunkt enthaltenden Doppelgeraden stützt und hier alle von den andern Tangentenebenen der Fläche berührt werden, als von welchen ihre gemeinsame Socia tangirt wird, so dass sie ausserhalb der Doppelgeraden 4 — 4 d. i. keinen Punkt gemein haben. Die Doppelpunkte dieser Curven R_x^4 durchlaufen diejenige Doppelgerade, auf welcher der von R^4 liegt;* eine Curve hat denselben Doppelpunkt wie R^4: die beide Curven verbindende Fläche 2. Grades ist ein Kegel, dessen Spitze in diesen gemeinsamen Doppelpunkt fällt. Diejenige Socia von R^4, deren Doppelpunkt nach a^0 fällt, löst sich in die beiden oben erwähnten Doppelgeraden auf. Also kann auf die früher (Nr. 31.) beschriebene Art jede Raumcurve 4. Ordnung und I. Species auf F^4 erzeugt werden.

39. *Eine Raumcurve 4. Ordnung und II. Species* liegt aber nur auf einer einzigen Fläche 2. Grades, *hat folglich nur eine einzige Socia;* mithin wird die Nr. 32. beschriebene Weise keineswegs alle Curven 4. Ordnung und II. Species erzeugen. *Dieselben ergeben sich uns nur entweder durch die vierfach berührenden Flächen 2. Grades oder sicherer,* da man bei diesen nicht voraussehen kann, welcher Species die beiden den Durchschnitt zusammensetzenden Curven angehören werden (jedoch später wird ein Criterium angegeben werden), *durch die Kegel mit der Spitze a^0, welche über ihnen stehen,* und welche im Allgemeinen 4. Ordnung sind und die 3 Doppelgeraden zu Doppelkanten haben. *Die beiden Punkte, in denen die Tangentenebenen eines solchen Kegels K^4 längs einer Doppelgeraden die Fläche F^4 berühren, sind diejenigen, in denen diese Gerade von der Raumcurve, über welcher der Kegel steht, getroffen wird. Also ist diese Raumcurve nur dann I. Species, wenn jene beiden Ebenen ein Paar der Involution J bilden, welche um*

die Doppelgerade, durch die die Fläche F^4 in dem nämlichen Punkte tangirenden Ebenen gehüllt wird: demnach im Allgemeinen II. Species.

40. Ein solcher Kegel K^4 mit den 3 Doppelkanten $GG'G''$, von denen jede für die Bestimmung desselben den Werth von 3 einfachen Kanten hat, ist durch 5 weitere Punkte — oder Kanten, da die Spitze ja schon gegeben ist — eindeutig bestimmt. Folglich *geht durch 5 beliebige Punkte auf F^4 eine und nur eine Raumcurve 4. Ordnung, im Allgemeinen II. Species:* es leuchtet ein, dass die 5 Punkte auch theilweise oder ganz auf den Doppelgeraden sich befinden können; nur muss dann noch die Tangentenebene der Fläche, welche von der Curve berührt werden soll, oder der Mantel, von dem sie zu dem Punkte kommen soll, vorher bestimmt sein. Sind alle 5 Punkte auf den Doppelgeraden gegeben, so ist der 6. Begegnungspunkt dadurch schon bestimmt; fällt er mit einem der fünf zusammen, so ist die Curve I. Species. Ebenso kann man selbst schon auf eine Curve I. Species ausgehen, indem man statt 2 verschiedene Punkte auf derselben Doppelgeraden mit je einer Tangentenebene denselben Punkt mit seinen beiden Tangentenebenen giebt. Im allgemeinen Falle, wo die Curve II. Species ist, erhält man die associirte Curve R_1^4 mit Hilfe des Kegels K_1^4, welcher zu seinen einen Tangentenebenen längs $GG'G''$ gerade die anderen Berührungsebenen von F^4 hat, als der der Curve R^4 zugehörige K^4: man hat es natürlich blos bei 5 von diesen Ebenen in der Hand, bei der sechsten geschieht es dann von selber. Hat man es hingegen mit dem besondern Falle der I. Species zu thun, die ihren Doppelpunkt z. B. auf G habe, so dass K^4 längs G von den beiden Ebenen eines Paars aus J tangirt wird, so hat jeder von den Kegeln K_1^4, welche längs G' und G'' die andern Tangentenebenen von F^4 berühren, als K^4, die Eigenschaft, längs G von einem Paar der Involution J berührt zu werden: diese Kegel erzeugen die associirten Curven R_1^4 der Curve I. Species R^4.

41. Durch 4 Kanten geht ein Büschel von Kegeln K_x^4; also *durch 4 Punkte auf F^4 geht ein Büschel 4. Ordnung R_x^4.* Die beiden Ebenen, welche jeden der Kegel K_x^4 längs einer seiner Doppelgeraden G tangiren, bilden eine Involution J_1, da jede Ebene durch G nur einen Kegel berührt, also nur eine denselben Kegel berührende Genossin hat. Da nun zwei Involutionen um dieselbe Gerade stets ein Paar gemein haben, so werden 3 Kegel des Büschels je von einem Paar resp. aus J, J', J'' tangirt; also *befinden sich in dem Büschel 3 Curven I. Species, welche ihre Doppelpunkte je auf $GG'G''$ haben. Falls etwa in einem Büschel 2 Curven I. Species mit ihrem Doppelpunkte auf derselben Doppelgeraden sich befinden, so erhält das Büschel lauter Curven I. Species,* weil dann die beiden Involutionen um diese Gerade identisch sind. Ein solches Büschel ist z. B. das der associirten Curven einer

Curve I. Species; seine 4 Grundpunkte befinden sich auf zwei Doppelgeraden und in jedem derselben werden alle Curven von der nämlichen Berührungsebene der Fläche F^4 tangirt. *Durch jeden Punkt der Fläche, der nicht auf einer Doppelgeraden sich befindet, geht eine einzige Curve eines Büschels, durch jeden Punkt einer Doppelgeraden zwei, je nachdem man die eine oder die andere Tangentenebene ihr zuweist, ausgenommen der Punkt ist gerade Doppelpunkt einer der* 3 *Curven I. Species. Durch den* 3*fachen Punkt* a^0 *gehen* 3 *Curven, denen die* 3 *Berührungsebenen resp. zugehören;* kommt unter diesen eine Raumcurve I. Species vor, welche just ihren Doppelpunkt in a^0 hat, so vertritt sie zwei von den drei Curven, die dritte (II. Species) berührt die von jener nicht berührte Ebene. *In jedem Büschel giebt es,* da 2 Punkte auf F^4 einen Kegelschnitt S bestimmen, 3 *Curven* 4. *Ordnung, welche je in* 2 im Allgemeinen in verschiedenen Ebenen liegende und in einem Punkte sich begegnende *Kegelschnitte zerfallen.*

42. *Besteht das Büschel aus lauter Curven I. Species, so geht durch jeden Punkt der Fläche ausserhalb der Doppelgeraden und jeden auf derjenigen (z. B. G) von diesen Geraden, welche die Doppelpunkte enthält, nur eine Curve, durch jeden Punkt der andern beiden Doppelgeraden aber wie oben zwei; durch den dreifachen Punkt geht eine Curve, die ihn zum Doppelpunkt hat und zwei Curven vertrit, und eine, die ihn nicht zweimal passirt.* Aber es muss in dem Büschel auch noch zwei Curven geben, welche ausser ihrem Doppelpunkte auf G je noch einen auf G' resp. G'' haben, denn die Involution J' resp. J'' hat hier, so wie im allgemeinen Falle, mit der Involution J_1' resp. J_1'' ein Paar gemein. Aber keine dieser beiden Curven kann, da in beiden Doppelpunkten beide Aeste von verschiedenen Tangentenebenen von F^4 berührt werden müssen, in zwei Kegelschnitte zerfallen, die sich zweimal und zwar beidemal auf Doppelgeraden begegnen, denn zwei solche werden nur in dem einen Begegnungspunkte von verschiedenen Berührungsebenen der Fläche F^4 (Nr. 14.) tangirt; eine doppelt gekrümmte Curve 4. Ordnung muss aber zerfallen, wenn sie mehr als einen Doppelpunkt hat; also sind beide Curven eben oder vielmehr, da eine ebene Curve auf F^4 gleich drei Doppelpunkte hat, fallen in dieselbe ebene Curve 4. Ordnung zusammen. Folglich *müssen sich die* 4 *Grundpunkte eines Büschels von lauter Curven* 4. *Ordnung und I. Species in einer Ebene befinden, so dass die Schnittcurve dieser Ebene zum Büschel gehört.*

43. Statt ein Büschel durch 4 Punkte, kann man es auch, wie bekannt, durch zwei seiner Mitglieder constituiren, seine 4 Grundpunkte sind dann die 4 Schnittpunkte derselben oder wenn sie mehr haben, diejenigen vier unter denselben, in welchen beide Curven je

von derselben Tangentenebene der Fläche F^4 berührt werden; man erhält so auch imaginäre Grundpunkte.

Aus obigem Satze schliessen wir, dass *die 4 Schnittpunkte einer Curve I. Species durch eine Ebene stets Grundpunkte eines Büschels von lauter Curven I. Species sind.*

Einerseits werden keineswegs im Allgemeinen in jedem Büschel 2 associirte Curven sich befinden; andererseits aber erzeugen zwei associirte Curven ein Büschel. Folglich *schneiden sich 2 associirte Curven I. Species*, da sie ihre Doppelpunkte auf derselben Doppelgeraden haben, also ein Büschel von Curven I. Species hervorrufen, *ausserhalb der Doppelgeraden in 4 Punkten einer Ebene. Wenn demnach die Fläche F^4 von einer Fläche 2. Grades in 4 nicht derselben Ebene angehörigen Punkten berührt wird, so durchschneiden sich beide Flächen sicher in 2 Curven II. Species.*

Hingegen *können 4 Punkte auf F^4 in einer Ebene auch Grundpunkte eines im Allgemeinen aus Curven II. Species bestehenden Büschels sein;* z. B. die 4 Schnittpunkte einer Ebene mit einer solchen Curve; in einem derartigen Büschel befinden sich gar keine eigentlichen Curven I. Species; die 3 sonst vorkommenden werden hier durch die eine Schnittcurve der Ebene mit der Fläche vertreten.

Ganz besondere Büschel sind die, deren Grundpunkte die 4 Schnittpunkte einer Geraden mit der Fläche F^4 sind: ein solches Büschel besteht aus lauter ebenen Curven 4. Ordnung, die dreimal in 2 Kegelschnitte zerfallen.

44. Wenn q ein Punkt auf einer Curve I. Species R^4 der Fläche F^4 ist, die z. B. ihren Doppelpunkt a auf G habe, so ist durch die 3 Doppelgeraden G, durch die 4 Ebenen, welche F^4 in den Punkten $a_1'a_2'a_1''a_2''$, in denen R^4 die nicht ihren Doppelpunkt enthaltenden Doppelgeraden $G'G''$ trifft, berühren, aber nicht R^4 tangiren, und die Kante a^0q ein einziger Kegel K^4 bestimmt: der, welcher über derjenigen Socia von R^4 steht, welche R^4 in q und 3 andern Punkten trifft. *Die Gruppen von je 4 Punkten q_x also, die eine Curve I. Species mit jeder ihrer associirten Curve R_x^4 im Allgemeinen ausserhalb der Doppelgeraden gemein hat oder genauer, in denen die die beiden Curven verbindende Fläche 2. Grades F_x^2 die F^4 tangirt, oder in denen beide Curven von derselben Berührungsebene von F^4 tangirt werden* — „unitangentielle Begegnungspunkte" — *durchstreichen die ganze Curve und zwar einmal*, während die auf der Doppelgeraden liegenden, in denen beide Curven von verschiedenen Tangentenebenen der Fläche berührt werden, — „bitangentielle Begegnungspunkte" — unbeweglich sind. Durch jeden Punkt q_x auf R^4 sind seine 3 Genossen q_x bestimmt. Kommt q_x, indem er die Curve R^4 durchwandert, in einen der 4 Punkte $a'a''$, so zerspaltet R_x^4 in das System (G', G'') und die

3 andern Punkte q_x fallen also in die 3 übrigen von jenen 4 Punkten, in jedem derselben berührt F_x^2 den Mantel von F^4, von welchem R^4 tangirt wird. Gelangt andererseits q_x in den Doppelpunkt a, so wird dieser auch Doppelpunkt für R_x^4 und die Fläche F_x^2 ist der Kegel durch R^4 mit der Spitze a. Noch ein Punkt q_x hat sich dann nach a begeben (die beiden Kegel 4. Ordnung K^4 und K_x^4 über R^4 und R_x^4 haben die drei Doppelkanten und längs einer noch die beiden Berührungsebenen, also ausserdem nur noch 2 Kanten gemein), eine eigentliche Berührung findet nur in den beiden andern Punkten q_x statt.

45. Von den Curven eines Büschels (mit den Grundpunkten $s_1 s_2 s_3 s_4$) sind im Allgemeinen drei von der I. Species; jede derselben hat unendlich viele associirte Curven. Drei Curven des Büschels zerfallen je in 2 Kegelschnitte, die sich einmal begegnen. Die durch dieselben gelegte einzige Fläche 2. Grades besteht aus 2 Ebenen, folglich besteht die Socia jeder dieser 3 Curven wiederum aus 2 Kegelschnitten, den beiden associirten jener. Drei Curven ferner gehen durch a^0; die Socia jeder derselben — derjenigen z. B., welche (G', G'') berührt — zerfällt in die Doppelgerade G und den Kegelschnitt S, der sich auf G', G'' in denselben 2 Punkten stützt wie jene Curve (abgesehen von a^0), aber von andern Berührungsebenen tangirt wird (Nr. 40.). Die den beiden Curven gemeinsame Fläche 2. Grades berührt F^4 zweimal auf G und nur zweimal ausserhalb der Doppelgeraden, auf S. Während im Allgemeinen durch jeden Punkt einer Doppelgeraden 2 Curven des Büschels gehen, *geht durch jeden der* 6 *Cuspidalpunkte* ω *nur eine*, weil eben ein solcher Punkt nur eine (durch die betreffende Doppelgerade gehende) Berührungsebene von F^4 hat; diese berührt auch die associirte Curve; beide haben in ω dieselbe Tangente — welche für die Gesammtschnittcurve der die beiden Curven verbindenden Fläche 2. Grades F^2 mit F^4 Rückkehrtangente und die Schnittlinie der Tangentenebene in ω an F^2 mit der einzigen Tangentenebene an F^4 ist. Die Kegel K^4 über den beiden Curven haben also ausser den 3 Doppelkanten noch bei einer derselben je eine Tangentenebene gemein, also ausserhalb der Doppelgeraden nur 3 Kanten; ω, obgleich kein Berührungspunkt von F^2 und F^4, zählt doch für einen solchen; — unitangentieller Begegnungspunkt der beiden associirten Curven ist er sicher.

Von den associirten Curven gehen je 3 durch jeden Punkt einer Doppelgeraden, nämlich die von jeder der beiden Curven des Büschels, welche durch denselben gehen, und diejenige, von der die Doppelgerade selbst ein Bestandtheil ist. Hinsichtlich der beiden ersteren müssen wir aber den Punkt in zwei einfache zerlegen, welche den verschiedenen Mänteln angehören. Durch einen einfachen Punkt also

auf F^4 werden nur 2 associirte Curven passiren. *Während* demnach *die Curven des Büschels selbst ein System vom Index* 1 *bilden, so hat das ihrer associirten Curven den Index* 2; es wird dabei natürlich von den 3 Systemen von unendlich vielen associirten Curven der 3 Curven I. Species abgesehen oder vielmehr jeder dieser Curven, damit doch das Continuum nicht unterbrochen werde, nur diejenige als Socia zugewiesen, welche denselben Doppelpunkt hat; denn die Construction dieser beiden associirten Curven aus einander ist eine ganz analoge, wie die zweier associirter Curven II. Species. *Der Ort der unitangentiellen Begegnungspunkte der Curven des Büschels* $(s_1 s_2 s_3 s_4)$ *mit ihren associirten Curven* trifft also jede der 3 Doppelgeraden in ihren beiden Cuspidalpunkten, in den beiden Punkten, in welchen sie ausser in a^0 — welcher bitangentiell ist — der Curve des Büschels begegnet, zu deren Socia sie gehört, und hat den auf der Doppelgeraden liegenden Doppelpunkt der einen Curve I. Species des Büschels ebenfalls zum Doppelpunkt, denn zweimal zwei Aeste dieser Curve und der associirten werden je von derselben Tangentenebene der Fläche F^4 berührt, so dass zwei unitangentielle Begegnungspunkte sich dort vereinigt haben. Wenn also dieser Ort x^{ter} Ordnung ist, so hat der über ihm stehende Kegel x^{ter} Ordnung mit der Spitze a^0 die 3 Geraden G zu sechsfachen Kanten, und diese und die Curve bilden den vollen Schnitt des Kegels und der Fläche; also:

$$4x = 3 \cdot 2 \cdot 6 + x, \text{ folglich } x = 12.$$

Mit jeder Curve des Büschels hat diese Curve 12. *Ordnung* $12 \cdot 4 - 3 \cdot 6 \cdot 2 = 12$ Punkte gemein, denn so viele Kanten sind den über ihnen stehenden Kegeln mit der Spitze a^0 ausser den Geraden G gemein. Das können, da die Curve nur eine Socia hat, nur die 4 (unitangentiellen) Begegnungspunkte mit derselben und die 4 Grundpunkte sein, folglich sind die letzteren auf der Curve 12. Ordnung Doppelpunkte; so dass sie im Ganzen 7 Doppelpunkte hat. Andererseits zeigt sich wiederum der Index 2 des associirten Systems unsers Büschels; durch jeden Grundpunkt müssen 2 associirte Curven gehen.

Nehmen wir aber die oben weggelassenen unendlich vielen associirten Curven der 3 Curven I. Species des Büschels mit hinzu, so wird der Ort der unitangentiellen Begegnungspunkte der Curven des Büschels mit ihren associirten Curven durch die 3 Curven I. Species vervollständigt, und da durch jeden Punkt einer Curve I. Species eine von ihren associirten Curven geht, so ist jeder der 4 Grundpunkte fünfmal Begegnungspunkt von 2 associirten Curven.

46. *Durch* 3 *Punkte* $s_1 s_2 s_3$ *auf* F^4 *geht ein Netz von doppelt unendlich vielen Curven II. Species und in ihm drei Systeme von Curven I. Species, deren Doppelpunkte die* 3 *Doppelgeraden durchlaufen.* In

jedem Punkte einer Doppelgeraden liegt ein Doppelpunkt einer durch $s_1 s_2 s_3$ gehenden Curve 1. Species, denn der dieselbe erzeugende Kegel K^4 ist ausser durch die 3 Doppelkanten eindeutig durch die beiden Tangentenebenen der Fläche in jenem Punkte als seine Tangentenebenen längs der betreffenden Doppelgeraden und durch die 3 Kanten a^0 (s_1, s_2, s_3) bestimmt. *Für diejenigen Curven, die ihre Doppelpunkte in den Cuspidalpunkten ω haben, sind dieselben Rückkehrpunkte.* Wenn in jedem Grundpunkte eines Büschels 5 Curven von ihren associirten Curven getroffen werden, so wird in je zwei der 3 Grundpunkte eines Netzes gewiss eine endliche Anzahl von Curven desselben von ihren associirten Curven getroffen. Da die Curven des Netzes, die von ihren associirten Curven in einem Grundpunkte des Netzes getroffen werden, ein System vom Index 5 bilden, so vermuthen wir, dass das der associirten Curven vom Index 10 sei. Wenn das der Fall ist, so wäre die obige Zahl 10.

47. Wir haben schon erwähnt, dass es stets möglich sei, eine Fläche 2. Grades zu construiren, die mit F^4 eine Berührung in 3 beliebigen Punkten eingehe*). Sind also blos 2 Punkte s_1, s_2 gegeben, so giebt es doppelt unendlich viele Flächen 2. Grades, welche die Fläche F^4 in $s_1 s_2$ und einem dritten Punkte berühren, folglich einfach unendlich viele, welche sie noch in 2 Punkten tangiren, also in zwei associirten Curven 4. Ordnung durchschneiden, zu deren 4 unitangentiellen Begegnungspunkten s_1 und s_2 gehören. Von dem Orte T^x der übrigen Paare Berührungspunkte lassen sich auf jeder Doppelgeraden mehrere Punkte angeben. Die beiden Punkte s_1, s_2 geben einen (einzigen) Kegelschnitt S auf F^4, der sich auf die 3 Doppelgeraden $GG'G''$ in den Punkten $aa'a''$ stütze. Die Fläche 2. Grades F^2, welche F^4 in s_1 und s_2 berührt — was den Werth von $2 \times 3 = 6$ Punkten hat —, durch einen weitern Punkt auf S und zwei weitere auf einer der 3 Doppelgeraden z. B. G gelegt ist, geht durch S und G und schneidet aus der Fläche F^4 noch eine Raumcurve 4. Ordnung II. Species R^4, welche durch $a'a''s_1 s_2$ geht und der Geraden G in a^0 und 2 andern Punkten $a_1 a_2$ begegnet (Nr. 32.). Die 4 unitangentiellen Begegnungspunkte der beiden associirten Curven R^4 und (S, G, G) — die Punkte, in denen sich F^4 und F^2 tangiren — sind $s_1 s_2 a_1 a_2$. Folglich sind a_1, a_2 zwei Punkte von T^x, die auf G liegen.

Wenn ferner 2 associirte Curven 4. Ordnung sich in einem der 6 Cuspidalpunkte ω treffen, so gehört dieser zu ihren unitangentiellen Begegnungspunkten (wenn er auch nicht ein Berührungspunkt von F^4 mit der die beiden Curven verbindenden Fläche 2. Grades ist); in dem Netze von Curven 4. Ordnung mit den Grundpunkten $s_1 s_2 \omega$ giebt es

*) Cremona, Teoria delle superficie Nr. 19 (2. Anm.).

eine gewisse Zahl von Curven (vielleicht 10), welche von ihren associirten Curven in $s_1 s_2$ getroffen werden. Jedenfalls liegen also die 6 Cuspidalpunkte ω auf T^x; es muss noch dahingestellt bleiben, als wievielfache Punkte. Ebenso haben wir noch nicht die Ordnung dieser Curve T^x ermitteln oder die Frage erledigen können, ob und wievielmal sie durch $s_1 s_2$ geht und ob sie den Doppelgeraden noch in andern Punkten als $a_1 a_2$ und je den beiden ω begegnet. Es lässt sich aus zwei speciellen Fällen die Existenz solcher weiteren Punkte vermuthen. Der Kegel 2. Grades, der durch die von einem Punkte auf einer Geraden G oder B ausgehenden Tangentenebenen an F^4 eingehüllt wird, berührt die Fläche längs einer Curve 4. Ordnung und I. Species, welche durch die Cuspidalpunkte zweier Doppelgeraden geht und auf der dritten ihren Doppelpunkt hat (Nr. 30.), resp. längs eines Kegelschnittes, der sich auf eine Doppelgerade in ihrem einen Cuspidalpunkte, auf die beiden andern in andern Punkten stützt (der Beweis hierfür wird bald, in Nr. 50., geführt werden). Legt man s_1, s_2 auf jene Curve 4. Ordnung oder auf diesen Kegelschnitt, so wird ersichtlich die Curve oder der Kegelschnitt einen Theil der Curve T^x bilden, und der Doppelpunkt jener, so wie die beiden Punkte, in denen sich dieser auf die Doppelgeraden stützt, und welche nicht Cuspidalpunkte sind, weisen, wie oben erwähnt, darauf hin, dass T^x den Doppelgeraden noch in andern Punkten begegnet.

48. Dass *jede Curve 4. Ordnung auf F^4, I. wie II. Species, und auch jede ebene, mit jedem Kegelschnitte S dieser Fläche 2 unitangentielle Schnittpunkte hat*, ist mit Hilfe der Kegel mit der Spitze a^0, die über beiden stehen, leicht zu erkennen; also ergiebt sich, dass *jede Curve 4. Ordnung*, da die unitangentiellen Begegnungspunkte nur ein Bild, die bitangentiellen (zweier verschiedener Curven oder zweier Aeste derselben Curve), welche sich stets auf einer Doppelgeraden befinden, je 2 associirte Bilder haben, *in einen Kegelschnitt abgebildet wird.* Die oben gewonnenen Sätze finden nun durch diese Abbildung ihre Bestätigung.

Eine Curve $2m^{\text{ter}}$ und eine Curve $2n^{\text{ter}}$ Ordnung auf F^4, welche wir im Allgemeinen nicht durch a^0 gehen lassen wollen, treffen jede der 3 Doppelgeraden in m resp. n Punkten; folglich haben die über ihnen stehenden Kegel mit der Spitze a^0 diese Geraden zu m-, resp. $n$fachen Kanten und demnach ausserdem $2m \,.\, 2n - 3 \,.\, mn = mn$ Kanten gemein. Diese gehen durch unitangentielle Begegnungspunkte der beiden Curven. Also *hat eine Curve $2m^{\text{ter}}$ Ordnung auf F^4 mit einer $2n^{\text{ter}}$ Ordnung mn unitangentielle Punkte gemein*, folglich eine Curve $2m^{\text{ter}}$ mit einem Kegelschnitt m Punkte gemein, womit der Hauptsatz der Abbildung, dass *jede Curve $2m^{\text{ter}}$ Ordnung auf F^4 durch eine Curve m^{ter} Ordnung abgebildet wird*, bewiesen ist und nun die

Abbildung auch wiederum den obigen Satz verificirt. Für die Bestimmung eines Kegels vertritt jede $m$fache Kante $\frac{m(m+1)}{1.2}$ einfache Kanten. Folglich ist jeder unserer Kegel $2m^{\text{ter}}$ Ordnung (mit der Spitze a^0 über einer Curve auf F^4 von dieser Ordnung) ausser durch die $3m$fachen Kanten durch $\frac{2m(2m+3)}{1.2} - 3\frac{m(m+1)}{1.2} = \frac{m(m+3)}{1.2}$ Kanten bestimmt; mithin *determiniren* $\frac{m(m+3)}{1.2}$ *Punkte eine Curve* $2m^{\text{ter}}$ *Ordnung auf* F^4; wird ja ersichtlich deren Bild m^{ter} Ordnung durch die $\frac{m(m+3)}{1.2}$ Bilder jener Punkte bestimmt.

49. *Jede Curve auf der Steiner'schen Fläche wird nothwendig von den* 4 *Doppelebenen* P *dort berührt, wo sie die Kegelschnitte* H *trifft* (ohne dass sie mit diesen die Tangente in den Begegnungspunkten gemein hat). So *sind also die Ebenen* P *Doppeltangentenebenen der Curven* 4. *Ordnung auf* F^4. Folglich berühren sie bei einer Curve 4. Ordnung und I. Species R^4, durch welche ein Kegel 2. Grades V^0 mit der Spitze im Doppelpunkte und zwei andere, V', V'' mit ausserhalb der Curve liegenden Spitzen v', v'' gehen, einen oder den andern von diesen beiden letzteren Kegeln. Die Spitzen derselben müssen sich desshalb auf zweien der sechs Kanten B des Tetraeders der Ebenen P befinden. Da man die Curven I. Species, welche ihre Doppelpunkte auf derselben Doppelgeraden G haben, continuirlich in einander überführen kann, so erhellt, dass alle die beiden Spitzen $v'v''$ auf denselben zwei Geraden B haben müssen. Fällt nun aber der Doppelpunkt einer Curve I. Species in einen Cuspidalpunkt ω von G, so vereinigt sich noch einer der beiden Kegel $V'V''$ mit V^0, also einer der beiden Punkte $v'v''$ fällt in den Punkt ω. Daraus ergiebt sich, dass die Punkte $v'v''$ auf den beiden Geraden B liegen, welche der Doppelgeraden G begegnen.

Eine Curve 4. *Ordnung und I. Species* R^4 *auf* F^4 *wird* also *ausser aus ihrem Doppelpunkte* a *noch aus je einem Punkte jeder der beiden Geraden* B, *welche der den Doppelpunkt enthaltenden Geraden* G *begegnen, durch einen Kegel* 2. *Grades projicirt.* Diese beiden Punkte b', b'' (so nennen wir sie nun als Punkte von Geraden B anstatt $v'v''$) werden auf den genannten Geraden B durch die Ebene $\mathfrak{A}$ markirt, welche beide Aeste der Curve in a tangirt. In dieser Ebene befinden sich auch die beiden Secanten von a an alle associirten Curven von R^4 und bilden die Strahlenpaare einer Involution, deren Doppelstrahlen $a(b', b'')$ sind. Besteht übrigens die Curve R^4 aus zwei Kegelschnitten (die sich zweimal begegnen), so dient, falls beide Begegnungspunkte auf Doppelgeraden liegen, für die Bestimmung der Geraden B, welche die Spitzen b enthalten, nur der bitangentielle Begegnungspunkt; die

Tangentenebene der Fläche, welche beide Kegelschnitte im andern Begegnungspunkte berührt, enthält freilich auch die beiden Spitzen $b'b''$.

Jeder solche Kegel 2. Grades V, der von einem Punkte b einer Geraden B eine Raumcurve I. Species R^1 auf F^4 projicirt, schneidet aus F^4 noch eine zweite solche Curve und projicirt sie. Beide sind natürlich associirt und ihre 4 unitangentiellen Begegnungspunkte befinden sich in einer Ebene U; dieselbe wird durch die beiden Kanten gebildet, längs deren V von den durch B gehenden Ebenen P berührt wird; und die 4 Begegnungspunkte sind die Punkte, in denen diese Kanten die Kegelschnitte H dieser Ebenen treffen.

50. Unter den Kegeln V befinden sich auch die Berührungskegel C_2 aus den Punkten b an F^4. Während die Berührungscurve des Kegels 2. Grades von einem Punkte a auf einer Doppelgeraden eine Raumcurve 4. Ordnung und I. Species ist, welche zweimal durch a geht (Nr. 30.), so *ist die Berührungscurve des Kegels von einem Punkte b auf einer Geraden B ein Kegelschnitt K.* Die volle Durchschnittscurve 12. Ordnung von F^4 mit der ersten Polarfläche des Punktes b besteht aus den 3 Doppelgeraden, welche doppelt rechnen (Nr. 8.), den beiden Kegelschnitten H, deren Ebenen durch B gehen, und dem genannten Kegelschnitte K (die Schnittcurve aber von F^4 mit der ersten Polarfläche eines Punktes a einer Doppelgeraden aus den 3 Doppelgeraden, welche alle als Doppelgerade doppelt zu zählen sind und von denen die den Punkt a enthaltende, weil in jedem ihrer Punkte zwei durch a gehende Ebenen berühren, eine zweifache Berührungscurve bildet, also im Ganzen vierfach zählt, und der genannten Raumcurve 4. Ordnung und I. Species). Der Kegel C_2 projicirt also aus b eine aus zwei zusammengefallenen Kegelschnitten bestehende Curve I. Species (K, K) und noch eine andere R^4. Die Curve (K, K) muss eben so wie jede andere aus b projicirte Curve 4. Ordnung und I. Species mit einem Doppelpunkte auf der Geraden G behaftet sein, welcher die den Punkt b enthaltende Gerade B begegnet. Die beiden Tangenten in dem Punkte, in dem sich K auf G stützt, sind zusammengefallen, da beide Aeste identisch geworden sind; folglich *muss K durch den einen Cuspidalpunkt von G gehen.* Doch dies ist ja auch aus einem früheren Resultate zu ersehen (Nr. 8.); die erste Polarfläche jedes Punktes in Bezug auf die Fläche F^4 berührt dieselbe in den Cuspidalpunkten d. h. die 3 Doppelgeraden und der fernere Schnitt 6. Ordnung beider Flächen begegnen sich in diesen Punkten. Die beiden Kegelschnitte H gehen nun durch 5 Cuspidalpunkte, nämlich durch den Begegnungspunkt (G, B) und die Cuspidalpunkte der beiden andern Doppelgeraden, folglich geht K durch den zweiten Cuspidalpunkt auf G. Seine Ebene muss demnach, da sie Tangentenebene der Fläche F^4 ist, durch die Gerade B gehn, welche

denselben enthält, ist also eine Berührungsebene in diesem zweiten Cuspidalpunkte. Die Kante, welche von b nach diesem Cuspidalpunkt geht, berührt dort die Fläche nicht, sondern trifft sie wegen der Doppelgeraden in zwei zusammengefallenen Punkten, ebenso berührt die Tangentenebene von C_2 längs dieser Kante die Fläche nicht im Cuspidalpunkt, sondern durchschneidet sie in einer Curve, die dort einen Rückkehrpunkt hat, der von der Doppelgeraden herrührt.

Der Kegel also 2. *Grades* C_2, *welcher von einem Punkte* b *einer Geraden* B *an* F^4 *gelegt ist, tangirt längs eines Kegelschnittes* K, *dessen Ebene durch die gegen* B *windschiefe Gerade* B *geht.*

51. Es sei der Kürze wegen B' die Gerade, welche den Punkt b enthält, so ist B'' die windschiefe, G die von beiden getroffene Gerade. Der Kegel C_2 wird von den beiden andern Doppelgeraden G' und G'' berührt (Nr. 9.), folglich tangirt die Curve R^4 in den beiden Punkten a', a'', in denen K von G', G'' getroffen wird, diese beiden Geraden. Die 4 übrigen Begegnungspunkte von (K, K) und R^4 fallen zu je zwei in die Punkte, in denen sich die Berührungskanten der beiden Ebenen P' (durch B') mit C_2, d. h. die zweiten Tangenten von b an die beiden H' (ausser B') auf K stützen.

Der Socius K_1 von K ist natürlich auch Berührungscurve für einen Kegel, dessen Spitze b_1 auf B' liegt. Die Involution der Tangentenebenenpaare der Punkte von G' trifft B' auch in einer Involution; da die Doppelebenen jener die beiden Ebenen (G', B_{11}) und (G', B_{22}), die einzigen Berührungspunkte in ω_{11} und ω_{22} sind, so sind die Doppelpunkte dieser Involution diejenigen Ecken des Tetraeders der Ebenen P, die sich auf B' befinden. Daraus geht hervor, dass *die Tangentenebenenpaare der Punkte von* G'' *dieselbe Involution auf* B' (*ebenso auf* B'') *hervorrufen, wie die der Punkte auf* G'. Wenn mithin b und b_1 zwei zugeordnete Punkte dieser Involution sind, also zwei harmonische Punkte in Bezug auf die beiden eben genannten Tetraederecken, so berühren die Ebenen (G', b) und (G', b_1) in demselben Punkte a' auf G' und ebenso (G'', b) und (G'', b_1) in demselben Punkte a'' auf G''. Folglich gehören die beiden Punkte a' und a'' dem Berührungskegelschnitte K des Kegels vom Punkte b ebenso wohl an wie dem K_1 des Kegels von b_1, und da K und K_1 in beiden Punkten a' und a'' von verschiedenen Tangentenebenen der Fläche berührt werden, so liegen sie in derselben Ebene, sind folglich associirt.

Also *die beiden Kegelschnitte, die in einer durch eine Gerade* B *gehenden Ebene sich befinden, sind die Berührungscurven der Kegel, welche von zwei Punkten der Gegenkante* B *des Doppelebenentetraeders ausgesandt sind, die zu den auf dieser Kante befindlichen Ecken des*

Tetraeders harmonisch liegen. Haben sich diese beiden Punkte vereinigt, also in eine der beiden Ecken, so müssen sich auch die beiden zugehörigen Kegelschnitte K und K_1 in einen vereinigen, ersichtlich in einen der beiden Kegelschnitte $H_1''H_2''$, deren Ebenen durch B' gehen. In der That, wenn p_1 und p_2 die beiden Ecken auf B' sind und zwar $p_1 = (P_1', P_2', P_1'') = (B', B_{11}, B_{21})$ und $p_2 = (P_1', P_2', P_2'') = (B', B_{12}, B_{22})$, so löst sich z. B. der Kegel C_2 von p_1 an F^4 auf in die beiden Büschel B_{11} und B_{21}. Diese ergeben noch keine Berührungscurve, denn alle Ebenen jenes Büschels berühren in ω_{11} (auf G'), alle aus diesem in ω_{21} (auf G''); die den beiden Büscheln gemeinsame Ebene P_1'' liefert allein den vollen Kegelschnitt H_1'', der auch jene beiden Berührungspunkte ω_{11} und ω_{21} mit enthält.

Für den Punkt ω' auf B' bilden den Berührungskegel die beiden Büschel B' (welches am vollen Kegel 3. Classe doppelt theilnimmt) und G. Der Berührungspunkt für alle Ebenen jenes Büschels ist ω', diejenigen für die Ebenen dieses Büschels erfüllen dessen Axe G doppelt; zugleich enthält diese Gerade auch jenen Berührungspunkt mit. Die Berührungscurve des Kegels von demjenigen Punkte auf B', welcher ω' in Bezug auf p_1, p_2 harmonisch zugeordnet ist, ist der Kegelschnitt, der von der Ebene (B'', G) aus F^4 ausgeschnitten wird.

52. Die Curven 4. Ordnung, in welchen die Ebenen eines Büschels die Steiner'sche Fläche durchschneiden, werden in der Abbildungsebene E als Kegelschnitte eines Büschels abgebildet, dessen Grundpunkte die Punkte abbilden, in denen die Axe $\mathfrak{L}$ des Büschels die Fläche trifft (Nr. 43.), und in derselben Weise reell oder imaginär sind wie diese Punkte. Die 3 Geradenpaare des Kegelschnittbüschels sind die Bilder der 3 Kegelschnittpaare in den 3 durch $\mathfrak{L}$ an F^4 gelegten Berührungsebenen. *Trifft* also *eine Gerade* $\mathfrak{L}$ *die Fläche* F^4 *in* 4 *reellen Punkten*, so sind die 3 Geradenpaare, also auch *die* 3 *Kegelschnittpaare und die* 3 *Tangentenebenen reell. Durchbohrt* $\mathfrak{L}$ *die Steiner'sche Fläche in zwei reellen und zwei conjugirten imaginären Punkten*, so ist ein Geradenpaar reell, die beiden andern imaginär und haben imaginären Schnittpunkt, also *ist eine der* 3 *Tangentenebenen reell und enthält auch* 2 *reelle Kegelschnitte, die beiden andern sind imaginär* — denn ihr Berührungspunkt, dessen Bild der Schnittpunkt des Geradenpaars ist, ist imaginär — *und enthalten natürlich imaginäre Kegelschnitte. Wenn endlich die Geraden* $\mathfrak{L}$ *die Fläche in* 2 *Paaren conjugirter imaginärer Punkte trifft*, so ist ebenfalls ein Geradenpaar reell, die beiden andern sind imaginär, haben aber reellen Schnittpunkt; also *sind die* 3 *Tangentenebenen durch* $\mathfrak{L}$ *reell, die eine enthält zwei reelle Kegelschnitte, die beiden andern aber imaginäre.*

Bemerken wir hier nebenbei, dass *wie durch zwei reelle Punkte, so auch durch zwei conjugirte imaginäre, d. h. auf derselben reellen*

Geraden liegende Punkte von F^4 stets ein reeller Kegelschnitt der Fläche geht, und dass die Kegelschnitte einer (reellen) Tangentenebene entweder beide reell oder beide imaginär sind, was auch mit Hilfe einer in der Ebene gezogenen und auf eine reelle Doppelgerade — eine ist ja sicher reell, G — sich stützende Gerade einleuchtet. Entfernt sich die Gerade $\mathfrak{L}$ ins Unendliche, so haben wir folgende Sätze:

Von drei parallelen (reellen) Tangentenebenen der Steiner'schen Fläche enthalten entweder alle drei je zwei Hyperbeln (ihre gemeinschaftliche unendlich entfernte Gerade trifft F^4 viermal reell), *oder eine enthält zwei Ellipsen, die beiden andern aber imaginäre Kegelschnitte* (die gemeinsame unendlich entfernte Gerade begegnet F^4 viermal imaginär). *Eine Tangentenebene aber, welche keine reelle parallele hat, enthält eine Hyperbel und eine Ellipse* (ihre unendlich entfernte Gerade trifft F^4 zweimal reell und zweimal imaginär).

53. Wie jede Ebene, so wird auch die unendlich entfernte Ebene E_∞ von F_3^4 in einer Curve 4. Ordnung und 6. Classe (mit 3 Doppelpunkten) C_6^4 durchschnitten. Die Fläche F_3^4 und diese Curve (als Abart einer Fläche 6. Classe) werden zugleich von den Ebenen einer abwickelbaren Fläche 18. Classe D_{18} eingehüllt. Die 4 Doppelebenen P erzeugen in E_∞ die 4 Doppeltangenten p_∞ von C_6^4; alle Ebenen durch jede dieser 4 Geraden sind Doppelebenen der Fläche C_6^4, die 4 Ebenen P also, welche zugleich Doppelebenen von F_3^4 sind, vierfache Ebenen von D_{18}, hingegen die 4 Tangentenebenen Q, welche von den Geraden p_∞ ausser den P noch an F_3^4 gehen (Nr. 15.), nur Doppelebenen von D_{18}.

Die Ebenen dieser Fläche D_{18}, welche also von Tangenten der Curve C_6^4 d. i. von Tangenten der Fläche F_3^4 an dieselbe gehen, sind (Nr. 14.) zweierlei Art: durch jede Tangente gehen zwei, die eine, welche zwei Tangentenebenen vertritt, also zweifach zu rechnen ist, berührt F_3^4 im Berührungspunkte der Tangente, ist also eine asymptotische Tangentenebene, die andere berührt im Allgemeinen in einem nicht auf C_6^4 liegenden, folglich in einem endlichen Punkte. Die Fläche 18. Classe D_{18} zerfällt also in zwei Flächen, in die Enveloppe der Berührungsebenen der Steiner'schen Fläche längs der Curve C_6^4, die dieser Fläche asymptotisch umschriebene Developpable, und in die Enveloppe der Tangentenebenen von F_3^4, welche durch eine Tangente von C_6^4 gehen, aber in einem im Allgemeinen endlichen Punkte berühren. Die Berührungscurve des von einem beliebigen Punkte an die Steiner'sche Fläche gelegten Tangentialkegels ist, wie schon mehrfach erwähnt, 6. Ordnung und zerfällt für einen Punkt einer Doppelebene P in den Berührungskegelschnitt H dieser Ebene und eine Curve 4. Ordnung. Von jedem Punkte gehen also sechs Ebenen aus, welche F_3^4 auf E_∞ berühren, und von jedem Punkte einer Ebene

P vier von derselben verschiedene, welche dies thun. Also *ist die der Steiner'schen Fläche asymptotisch umschriebene abwickelbare Fläche 6. Classe D_1 und hat die 4 Ebenen P zu Doppelebenen.* Da sie aber doppelt an D_{12} theilnimmt und also auch die 4 Ebenen P, schon sofern sie D_4 doppelt berühren, vierfache Ebenen von D_{12} sind), so ist der andere Bestandtheil von D_{12} ebenfalls eine abwickelbare Fläche 6. Classe $\mathfrak{D}_4$, welche aber von den P nicht mehr tangirt wird, hingegen die vier Ebenen Q zu Doppelebenen hat, welche nicht D_6 tangiren.

Während die von jeder Tangente t_x der Curve C_4^4 an D_6 gesandte Ebene die Steiner'sche Fläche in 2 Kegelschnitten durchschneidet, welche sich — ausser auf den 3 Doppelgeraden — im Berührungspunkte r_x von t_x durchschneiden, weil die Ebene dort die Fläche F_3^4 tangirt, berührt in der von t_x an $\mathfrak{D}_4$ gehenden Ebene der eine Kegelschnitt die Tangente t_x in r_x (der andere trifft sie in ihren beiden weitern Schnittpunkten mit C_4^4), ist also eine Parabel.

Diejenigen Berührungsebenen der Fläche F_3^4, deren einer Kegelschnitt eine Parabel ist, umhüllen eine abwickelbare Fläche 6. Classe $\mathfrak{D}_6$. Jede (reelle) Ebene mit einer Parabel hat stets eine aber nur eine (stets reelle) parallele Tangentenebene, welche asymptotisch berührt und entweder 2 Hyperbeln oder 2 imaginäre Kegelschnitte ausschneidet, je nachdem der zweite Kegelschnitt in der Parabelebene eine Hyperbel oder eine Ellipse ist.

Die vier Ebenen Q sind wie gesagt Doppelebenen der Fläche $\mathfrak{D}_6$ und enthalten je zwei Parabeln, welche p_x in den beiden Schnittpunkten mit H berühren (Nr. 15.). *Es giebt* demnach 4 *Tangentenebenen Q der Steiner'schen Fläche, welche zwei Parabeln ausschneiden; sie sind den vier Doppelebenen parallel und stets in derselben Weise reell wie die parallelen Doppelebenen, also alle 4 oder 2 oder keine. Die beiden Parabeln einer reellen Ebene Q sind wiederum entweder reell oder imaginär, je nachdem der Kegelschnitt H in der parallelen Doppelebene P eine Hyperbel oder Ellipse ist. Sind sie reell, so sind ihre Axen den Asymptoten dieser Hyperbel parallel.*

Durch jeden der 3 Doppelpunkte von C_6^4 gehen vier Tangenten dieser Curve, von denen zwei im Doppelpunkte selbst berühren; also *gehen durch jede der 3 Doppelgeraden 2 Ebenen, welche noch eine Parabel enthalten, und 2 Parabeln giebt es auf der Fläche, deren Axen der Doppelgeraden parallel sind* (Nr. 15.). Die zweiten Kegelschnitte in den Ebenen dieser beiden Parabeln sind Hyperbeln (vorausgesetzt, dass der Doppelpunkt ein ordentlicher, nicht isolirter ist). Da der unendlich entfernte Punkt einer Geraden B ausser den beiden Doppeltangenten noch zwei Tangenten an C_6^4 sendet, so *befinden sich in*

dem Büschel jeder Geraden B 2 Ebenen, welche Parabeln ausschneiden.

54. Jeder Kegelschnitt, der sich auf den allen Kugeln gemeinsamen Kreis C^2_∞ in E_∞ zweimal stützt, ist ein Kreis; da nun C_6^4 diesem Kreise in 8 Punkten begegnet, welche sich 28 mal zu je zweien zusammenstellen lassen, durch je zwei Punkte auf F_3^4 aber ein Kegelschnitt dieser Fläche geht, so erhellt, dass *auf derselben 28 Kreise liegen; jedoch nur 4 von denselben sind reell*, welche durch je conjugirte von den acht Punkten gehen.

Bromberg, Juli 1869.

Eine Aufgabe über Kegelschnitte im Raume.

Von J. Lüroth in Carlsruhe.

In den bis jetzt behandelten Aufgaben über die Bestimmung von Kegelschnitten im Raume beziehen sich die Bedingungen nur auf Punkte, gerade Linien und Ebenen, während ein Fall, dass in den Bedingungen eine Raumcurve höherer Ordnung auftritt, noch nicht untersucht ist. Auf Veranlassung des Herrn Clebsch habe ich mich mit einer solchen Aufgabe beschäftigt und erlaube mir die gewonnenen Resultate im Folgenden darzulegen.

Die Aufgabe lautet:

> *Die Anzahl der Kegelschnitte zu bestimmen, welche eine Curve vierter Ordnung erster Species in drei und fünf ihrer Sehnen in je einem Punkte treffen, ohne durch einen den Sehnen und der Curve gemeinsamen Punkt zu gehen.*

Die Lösung dieser Aufgabe beruht auf dem Principe, dass die Ordnung der Fläche, auf welcher alle Kegelschnitte einer einfach unendlichen Schaar liegen, gleich n ist, wenn eine beliebige Linie von Kegelschnitten der Schaar in n Punkten getroffen wird. Hieraus folgt, dass ein Punkt, durch den n Kegelschnitte gehen, als ein n facher Punkt jener Fläche gelten muss.

Der Kürze der Darstellung wegen werde ich, nach Herrn Chasles Vorgang, die Bedingungen, welchen ein Kegelschnitt zu genügen hat, symbolisch bezeichnen. Die Zeichen und Bedingungen sind:

P, P_1, P_2 .. der Kegelschnitt geht durch die festen Punkte $P, P_1, P_2 \ldots$ die nicht auf der Curve liegen

C_1, C_2, C_3 .. er enthält die festen auf der Curve liegenden Punkte $C_1, C_2, C_3 \ldots$

$n\,C$ ..... der Kegelschnitt trifft die Curve ausser in den festen Schnittpunkten noch in n veränderlichen;

S_1, S_2 ..... die Sehnen $S_1, S_2 \ldots$ der Curve werden in je einem Punkte getroffen;

p ..... die Ebene des Kegelschnittes geht durch den festen Punkt p.

G ..... die Ebene geht durch die gegebene Linie G.

GC oder GP die Ebene des Kegelschnittes geht durch die Gerade G, die er in einem festen Punkte trifft, der entweder auf der Curve liegt (GC) oder nicht (GP).

EC, EP . . der Kegelschnitt berührt eine Ebene E in einem auf der Curve resp. nicht auf der Curve gelegenen festen Punkte.

Der Satz: „Alle Kegelschnitte, welche gewissen Bedingungen B genügen, bilden eine Fläche n^{ter} Ordnung" soll angedeutet werden durch $F(B) = n$; während $(B) = n$ aussagen soll, dass n Kegelschnitte existiren, welche die Bedingungen B erfüllen.

Es sei noch im Allgemeinen bemerkt, dass immer nur solche Kegelschnitte gemeint sind, welche die Bedingungen erfüllen, ohne durch einen Schnittpunkt einer Sehne und der Curve zu gehen. Hier wie überall im Folgenden ist, wo keine Verwechselung möglich ist, „Curve" gebraucht für die gegebene Curve vierter Ordnung erster Species.

I.

Wir werden uns zunächst beschäftigen mit der Bestimmung der Ordnungen von Flächen, welche von Kegelschnitten erzeugt werden, deren Ebenen durch eine bestimmte Gerade G gehen. Um diese Ordnungen zu finden, betrachten wir eine Gerade g, welche die G in einem Punkte a schneidet. Alle Kegelschnitte, welche g in einem von a verschiedenen Punkte treffen, müssen in der durch g und G bestimmten Ebene liegen und jeder solcher Kegelschnitt schneidet g in zwei Punkten. Es kann aber auch Kegelschnitte geben, welche g in a schneiden, ohne so zu zerfallen, dass G ein Theil ist, und endlich kann G selbst Theil eines oder mehrerer zerfallender Kegelschnitte sein. Bezeichnen wir die Zahl der Kegelschnitte, welche in einer durch G gelegten Ebene liegen und den sonstigen Bedingungen genügen, mit x, die Zahl der Kegelschnitte, welche durch a gehen mit y und endlich durch z, wie oft G Theil eines zerfallenden Kegelschnittes ist, so wird g in $2x + y + z$ Punkten von Kegelschnitten getroffen und die gesuchte Ordnung der Fläche ist also

$$= 2x + y + z .$$

1. Wir betrachten zuerst jetzt die Fläche, welche von den Kegelschnitten erzeugt wird, die den Bedingungen $(P_1, P_2, 3C)$ genügen. Die Gerade G ist hier die Linie $\overline{P_1 P_2}$. Jede durch diese gelegte Ebene schneidet die Curve in vier Punkten und folglich giebt es in dieser Ebene vier Kegelschnitte, welche die Bedingungen erfüllen. Die Zahl x ist also $= 4$. Jeder Kegelschnitt, der durch a geht, muss zerfallen in die Gerade $\overline{P_1 P_2}$ und eine zweite Linie, welche mit der

Curve drei Punkte gemein haben muss. Dies ist aber unmöglich, weil eine nicht zerfallende Schnittcurve zweier Flächen zweiter Ordnung von keiner Linie in drei Punkten getroffen werden kann. y und z sind also beide $= 0$ und folglich

$$F(P_1, P_2, 3C) = 8.$$

Da eine durch P_1 gelegte Linie in vier von P_1 verschiedenen Punkten von Kegelschnitten getroffen wird, so ist dieser Punkt vierfacher Punkt der Fläche ebenso wie P_2. Aehnlich erkennt man, dass die Curve dreifache Curve ist. Wenn man also die Fläche durch eine beliebige Sehne S_1 der Curve schneidet, so ergeben sich zwei nicht auf der Curve gelegene Schnittpunkte. Daher

$$(P_1, P_2, 3C, S_1) = 2.$$

Da P_1 ein vierfacher Punkt ist, so bilden die durch ihn gehenden Geraden, welche in ihm fünf Punkte mit der Fläche gemein haben, einen Kegel vierter Ordnung. Solche Linien sind offenbar die Tangenten der durch P_1 gehenden Kegelschnitte. Wenn in irgend einer Ebene durch $\overline{P_1 P_2}$ ein Kegelschnitt vorhanden wäre, der einen Doppelpunkt in P_1 hätte, so würde jede in dieser Ebene durch P_1 gezogene Linie dem Kegel angehören. Kegelschnitte derart sind aber nicht möglich, wie man leicht einsieht. Der Kegel vierter Ordnung besteht also nur aus den in P_1 an die Kegelschnitte gelegten Tangenten und in einer durch P_1 gelegten Ebene liegen also vier solcher Tangenten, d. h.

$$(E P_1, P_2, 3C) = 4.$$

2. An die Stelle des willkürlichen Punktes P_2 der vorigen Untersuchung setzen wir jetzt einen auf der Curve liegenden Punkt C_1 und betrachten nun die Fläche der Kegelschnitte, welche die Bedingungen $(P_1, C_1, 2C, S_1)$ erfüllen. Da eine durch $P_1 C_1$ gelegte Ebene die Curve ausser in C_1 noch in drei Punkten trifft, so giebt es drei Kegelschnitte, welche in dieser Ebene liegen. Also ist $x = 3$. Auch hier muss ein Kegelschnitt, der durch einen Punkt auf $\overline{P_1 C_1}$ geht, zerfallen in $\overline{P_1 C_1}$ und eine zweite Linie, welche $\overline{P_1 C_1}$, die Sehne S_1, und die Curve in zwei Punkten trifft. Es giebt eine Linie derart, wie sich zeigt mit Hülfe der durch die Curve und die Sehne gelegten Fläche zweiter Ordnung. Also ist $y = 0$, $z = 1$ und

$$F(P_1, C_1, 2C, S_1) = 7.$$

Da durch einen Punkt der Curve zwei Kegelschnitte gehen, so ist die Curve Doppelcurve der Fläche. Schneidet man also mit einer beliebigen Sehne, so erhält man drei nicht auf der Curve liegende Schnittpunkte, so dass

$$(P_1, C_1, 2C, S_1, S_2) = 3$$

ist.

Sowohl eine durch P_1, wie eine durch C_1 gelegte Gerade wird ausser in diesen Punkten noch in drei Punkten von Kegelschnitten getroffen. Folglich sind beide Punkte vierfache Punkte. Zerfallende Kegelschnitte, deren Spitzen in P_1 oder C_1 liegen, giebt es nicht, also zeigt sich auf dem nämlichen Wege wie im vorhergehenden Artikel, dass

$$(EP_1,\ C_1,\ 2C,\ S_1) = 4$$
$$(P_1,\ EC_1,\ 2C,\ S_1) = 4.$$

3. Wir suchen nun die Ordnung der Fläche, welche von den Kegelschnitten gebildet wird, die den Bedingungen $(C_1,\ C_2,\ C,\ S_1,\ S_2)$ genügen. Die Gerade G ist hier die $\overline{C_1\,C_2}$. Eine Ebene durch diese Linie trifft die Curve noch in zwei Punkten, so dass also in ihr zwei den Bedingungen genügende Kegelschnitte liegen. Wenn ein Kegelschnitt durch einen Punkt auf $\overline{C_1\,C_2}$ gehen soll, so muss er zerfallen in die Gerade $\overline{C_1\,C_2}$ und eine zweite, welche $\overline{C_1\,C_2}$, die beiden Sehnen und die Curve in einem Punkte trifft. Da alle Geraden, welche $\overline{C_1\,C_2}$ und die beiden Sehnen schneiden, eine Fläche zweiter Ordnung bilden, so giebt es zwei solcher Linien und folglich ist $\overline{C_1\,C_2}$ zweimal Theil eines zerfallenden Kegelschnittes. Aus $x = 2,\ y = 0,\ z = 2$ folgt also

$$F\ (C_1,\ C_2,\ C,\ S_1,\ S_2) = 6.$$

Da die Curve selbst einfache Curve dieser Fläche ist, so erhalten wir durch den Schnitt mit einer Sehne S_3

$$(C_1,\ C_2,\ C,\ S_1,\ S_2,\ S_3) = 4.$$

Auch hier sind C_1 und C_2 vierfache Punkte und also

$$(EC_1,\ C_2,\ C,\ S_1,\ S_2) = 4,$$

weil im Allgemeinen keine zerfallenden Kegelschnitte existiren, deren Doppelpunkte in C_1 liegen und deren Ebenen durch $\overline{C_1\,C_2}$ gehen.

4. Wir nehmen nun einen Punkt P an, legen durch ihn eine Gerade G und suchen $F\ (GP,\ 3C,\ S_1)$. Da eine Ebene durch G die Curve in vier Punkten schneidet, so ist $x = 4$. Durch einen gegebenen Punkt auf G gehen nach 1. zwei Kegelschnitte, also ist $y = 2$. z ist wieder gleich Null, weil die Curve von der ersten Species. Also ist

$$F\ (GP,\ 3C,\ S_1) = 10.$$

Da durch jeden Punkt auf der Curve drei Kegelschnitte gehen, so ist sie dreifach zu rechnen und es folgt

$$(GP,\ 3C,\ S_1,\ S_2) = 4.$$

Eine Gerade durch P wird ausser in P noch in vier Punkten von Kegelschnitten getroffen und daher ist P sechsfacher Punkt der Fläche. Nun giebt es im Allgemeinen keine Kegelschnitte, welche die

obigen Bedingungen erfüllen, und in P einen Doppelpunkt haben und deren Ebenen durch G gehen. Wir schliessen also

$$(G\,P,\ E\,P,\ 3\,C,\ S_1) = 6\,.$$

5. Wenn wir in der vorigen Untersuchung statt P einen Punkt C_1 der Curve setzen und eine Sehne S_2 hinzunehmen, so liegen in jeder Ebene durch G drei Kegelschnitte, weil die Ebene ausser C_1 noch drei Punkte der Curve enthält. Durch einen jeden Punkt auf G gehen nach 2. drei Kegelschnitte, aber Theil eines zerfallenden Kegelschnittes kann G im Allgemeinen nicht sein. Also ist $x = 3$, $y = 3$, $z = 0$ und

$$F\,(G\,C_1,\ 2\,C,\ S_1,\ S_2) = 9\,.$$

Da die Curve selbst zweifache Curve ist, so folgt

$$(G\,C_1,\ 2\,C,\ S_1,\ S_2,\ S_3) = 5\,.$$

Der Punkt C_1 ist wie P_1 der vorigen Nummer sechsfacher Punkt. Man kann nun zwar Kegelschnitte angeben, die in C_1 Doppelpunkte haben, aber bei allgemeiner Lage von G werden ihre Ebenen nicht durch G gehen. Also ist

$$(G\,C_1,\ E\,C_1,\ 2\,C,\ S_1,\ S_2) = 6\,.$$

6. Wir untersuchen jetzt $F\,(G,\ 3\,C,\ S_1,\ S_2)$, wo G eine ganz allgemeine Lage hat. Da eine durch G gelegte Ebene vier Kegelschnitte enthält, so ist $x = 4$. Durch einen beliebigen Punkt auf G lassen sich nach 4. vier Kegelschnitte legen, dagegen kann G nicht Theil eines zerfallenden Kegelschnittes sein. Also ist:

$$F\,(G,\ 3\,C,\ S_1,\ S_2) = 12\,.$$

Da die Curve dreifache Curve ist, weil durch jeden ihrer Punkte drei Kegelschnitte gehen, so ergiebt sich noch

$$(G,\ 3\,C,\ S_1,\ S_2,\ S_3) = 6\,,$$

oder mit Worten:

Die Ebenen der Kegelschnitte, welche die Bedingungen $(3\,C,\ S_1,\ S_2,\ S_3)$ *erfüllen, umhüllen eine Fläche sechster Classe.*

II.

1. Wir nehmen nun im Raume eine beliebige Ebene E an, in ihr einen Punkt P und suchen die Kegelschnitte, welche den Bedingungen $(E\,P,\ 3\,C,\ S_1)$ genügen. Alle diese Kegelschnitte bilden eine Fläche, deren Ordnung gleich ist der Ordnung irgend einer ebenen Schnittcurve. Zu ihrer Bestimmung wählen wir die Schnittcurve mit der Ebene E selbst. Sei a ein Punkt dieser Curve, dann muss ein Kegelschnitt existiren, welcher durch a geht und mit E noch den Punkt P und einen unendlich benachbarten gemein hat. Er hat also drei

Punkte mit E gemein und muss, wenn er nicht zerfällt, ganz in der Ebene E liegen; wenn er aber zerfällt, so muss wenigstens ein Theil ganz in E liegen. Die Ebene E schneidet die Curve in den vier Punkten $c_1\, c_2\, c_3\, c_4$ und die Sehne S_1 im Punkte s_1. Dann liegen in E die vier Kegelschnitte $(c_1\, c_2\, c_3\, s\, P)$, $(c_1\, c_2\, c_4\, s\, P)$ $(c_1\, c_3\, c_4\, s\, P)$ $(c_2\, c_3\, c_4\, s\, P)$, welche allen Bedingungen genügen. Theile von zerfallenden Kegelschnitten können die Linien Pc_1, Pc_2, Pc_3, Pc_4 und Ps_1 sein. Wenn Pc_1 Theil eines solchen Kegelschnittes sein soll, so muss es eine Gerade geben, die Pc_1, S_1 und die Curve in zwei Punkten schneidet. Da nur eine Gerade derart existirt, so ist Pc_1 und ebenso jede der drei andern Linien, Theil eines zerfallenden Kegelschnittes. Wäre Cs_1 Theil eines derartigen Kegelschnittes, so müsste die Curve eine sie in drei Punkten treffende Sehne haben, was nicht möglich ist. Aus dem gleichen Grunde kann auch keine andere in E durch P gehende Linie Theil eines zerfallenden Kegelschnittes sein. Die Schnittcurve der Fläche mit E besteht also aus vier Kegelschnitten und vier Geraden und ist von der 12. Ordnung. Daher

$$F\,(E\,P,\ 3\,C,\ S_1) = 12\,.$$

Die Curve selbst ist vielfache Curve dieser Fläche und zwar, da nach 2. vier Kegelschnitte durch einen ihrer Punkte gehen, vierfache Curve. Durch Schnitt mit einer Sehne S_2 folgt also

$$(E\,P,\ 3\,C,\ S_1,\ S_3) = 4\,.$$

2. Statt eines beliebigen Punktes P nehmen wir nun einen der Schnittpunkte C_1 von E mit der Curve und suchen die Kegelschnitte, die die Bedingungen $(E\,C_1,\ 2\,C,\ S_1,\ S_2)$ erfüllen. Die Ordnung der von ihnen gebildeten Fläche bestimmen wir wieder durch Betrachtung der Schnittcurve mit der Ebene E. Bezeichnen wir die von C_1 verschiedenen Schnittpunkte der Ebene E mit der Curve durch $c_2\, c_3\, c_4$ und die mit den beiden Sehnen durch $s_1\, s_2$ so haben wir in E zunächst die drei Kegelschnitte $(C_1\, c_2\, c_3\, s_1\, s_2)$ $(C_1\, c_2\, c_4\, s_1\, s_2)$ $(C_1\, c_3\, c_4\, s_1\, s_2)$. Eine Gerade durch C_1 und c_2 ist Theil von zwei zerfallenden Kegelschnitten. Denn es giebt zwei Linien, welche $\overline{C_1\, c_2}$, S_1, S_2 und die Curve treffen. Das Gleiche gilt natürlich von $C_1\, c_1$, $C_1\, c_4$. Eine Gerade durch C_1 und s_1 gehört einem zerfallenden Kegelschnitte an, weil nur eine Gerade $\overline{C_1\, s_1}$, S_2 und die Curve in zwei Punkten trifft; die beiden Linien $\overline{C_1\, s_1}$ und $\overline{C_1\, s_2}$ sind also einfach zu rechnen. Da ferner keine Gerade existirt, welche die Curve in zwei Punkten und zwei Sehnen trifft, so kann auch keine andere in E durch C_1 gezogene Gerade Theil eines Kegelschnittes sein. Die Schnittcurve der Ebene E und der Fläche besteht also aus drei Kegelschnitten, drei doppelt und zwei einfach zu rechnenden Geraden und ist demnach von der 14. Ordnung. Daher

$$F\,(E\,C_1,\ 2\,C,\ S_1,\ S_2) = 14.$$

Da durch jeden Punkt der Curve nach I. 3. vier Kegelschnitte gehen, so ist die Curve vierfache Curve und es folgt weiter

$$(E\,C_1,\ 2\,C,\ S_1,\ S_2,\ S_3) = 6\,.$$

III.

Wir wenden uns nun zur Betrachtung von Kegelschnitten, welche durch einen gegebenen Punkt a gehen und fünf Bedingungen genügen. Um die Ordnung der Fläche zu bestimmen, welche von diesen Kegelschnitten gebildet wird, legen wir durch den Punkt a eine Gerade g und suchen ihre Schnittpunkte mit der Fläche. Es mögen in der Schaar von Kegelschnitten x vorhanden sein, welche durch a gehen, die Gerade g treffen und den übrigen Bedingungen genügen. Dann hat g mit der Fläche x nicht mit a zusammenfallende Punkte gemein. a selbst ist vielfacher Punkt der Fläche. Ist er n facher Punkt, so bilden die in ihm $(n+1)$ punktig schneidenden Geraden einen Kegel n^{ter} Ordnung und umgekehrt. Jede Gerade, welche in a die Fläche in $(n+1)$ zusammenfallenden Punkten trifft, muss ausser a noch einen unendlich benachbarten Punkt der Fläche enthalten. Es muss also durch einen a unendlich nahen Punkt der Linie und a selbst ein Kegelschnitt gehen, d. h. die Gerade muss Tangente an einen der Kegelschnitte sein. Die Ordnung des von diesen Tangenten gebildeten Kegels ist gleich der Anzahl der Tangenten, welche in einer Ebene liegen oder gleich der Zahl von Kegelschnitten, welche den übrigen Bedingungen genügen und eine durch a gelegte Ebene berühren. Diese Zahl sei mit y bezeichnet. Wenn ein Kegelschnitt der Schaar in a einen Doppelpunkt hat, so ist die Ebene dieses Kegelschnittes Theil des in Rede stehenden Kegels. Im Folgenden treten aber solche Kegelschnitte im Allgemeinen nicht auf, der Punkt a ist dann y facher Punkt und die gesuchte Ordnung der Fläche $= x + y$.

1. Wenden wir dies auf die Kegelschnitte an, welche den Bedingungen $(P,\ 3\,C,\ S_1,\ S_2)$ genügen. Nach I. 4. ist

$$x = (G\,P,\ 3\,C,\ S_1,\ S_2) = 4$$

und nach II. 1.

$$y = (E\,P,\ 3\,C,\ S_1,\ S_2) = 4\,.$$

Kegelschnitte, welche in P einen Doppelpunkt haben, giebt es im Allgemeinen nicht, weil eine der beiden durch P gehenden Geraden drei Bedingungen genügen müsste, was offenbar nur bei besonderer Lage von P angeht. Also ist

$$F\,(P,\ 3\,C,\ S_1,\ S_2) = 8\,.$$

Durch einen Punkt der Curve gehen nach I. 2. drei Kegelschnitte, sie ist also dreifache Curve der Fläche und wir finden

$$(P, 3\,C, S_1, S_2, S_3) = 2\,.$$

2. Betrachten wir dagegen an der Stelle von P einen Punkt C_1 der Curve, indem wir zu den Bedingungen eine Sehne hinzunehmen. Dann ist nach I. 5.

$$x = (G\,C_1, 2\,C, S_1, S_2, S_3) = 5$$

und nach II. 2.

$$y = (E\,C_1, 2\,C, S_1, S_2, S_3) = 6\,.$$

Dagegen existiren auch hier keine Kegelschnitte, welche in C_1 einen Doppelpunkt haben. Daher ist

$$F\,(C_1, 2\,C, S_1, S_2, S_3) = 11\,.$$

Wie I. 3. zeigt, gehen durch einen Punkt der Curve vier Kegelschnitte, so dass sie vierfach zu rechnen ist. Schneiden wir mit einer weiteren Sehne S_4, so folgt

$$(C_1, 2\,C, S_1, S_2, S_3, S_4) = 3\,.$$

IV.

Wir wählen nun einen Punkt p im Raume und betrachten die Kegelschnitte, welche den Bedingungen $(3\,C, S_1, S_2, S_3)$ genügen und deren Ebenen durch p gehen. Durch diesen Punkt legen wir eine Gerade. Jeder Kegelschnitt, welcher diese in einem von p verschiedenen Punkte trifft, schneidet sie in zwei Punkten. Nach I. 6. giebt das sechs solcher Kegelschnitte. Durch p selbst gehen nach III. 1. zwei Kegelschnitte. Daher ist

$$F\,(p, 3\,C, S_1, S_2, S_3) = 14\,.$$

Die Curve ist vielfache Curve der Fläche und zwar fünffache, weil nach I. 5. durch jeden ihrer Punkte fünf Kegelschnitte gehen. Wir finden also

$$(p, 3\,C, S_1, S_2, S_3, S_4) = 4\,,$$

d. h. *die Ebenen der Kegelschnitte, welche den Bedingungen* $(3\,C, S_1, S_2, S_3, S_4)$ *genügen, bilden eine abwickelbare Fläche vierter Classe.*

Da durch jeden Punkt des Raumes vier Ebenen dieser Fläche gehen, so werden auch ebensoviele durch einen Punkt C_1 der Curve gehen. Nach III. 2. giebt es aber drei Kegelschnitte, welche durch den Punkt C_1 gehen und ausserdem die Bedingungen $(2\,C, S_1, S_2, S_3, S_4)$ erfüllen. Die Ebenen dieser Kegelschnitte sind offenbar drei jener

vier. Die vierte Ebene wird also einen Kegelschnitt enthalten, der nicht durch C_1 geht. Jedem Punkte der Curve entspricht so eine Ebene der abwickelbaren Fläche. Da umgekehrt in jeder solchen Ebene ein Kegelschnitt liegt, der nur durch drei Punkte der Curve geht, so wird auch jeder Ebene ein Punkt der Curve entsprechen und da letztere erster Species ist, so *ist auch die abwickelbare Fläche vierter Ordnung erster Species.*

V.

Es wäre nun, um das in der Einleitung gestellte Problem zu lösen, nöthig, die Ordnung der Fläche zu bestimmen, auf welcher alle Kegelschnitte liegen, welche den Bedingungen $(3\,C, S_1, S_2, S_3, S_4)$ genügen. Die bis jetzt bekannten directen Methoden zur Lösung dieser Frage führen alle auf die gestellte Aufgabe zurück. Dagegen kann man auf folgendem Wege zu jener Zahl gelangen. Auf der gesuchten Fläche werden die Curve und die Sehnen vielfache Curven sein.

III. 2. zeigt, dass die Curve dreifach zu rechnen ist, weil durch jeden Punkt drei Kegelschnitte gehen. Die Zahl der Kegelschnitte, welche durch einen Punkt auf einer Sehne gehen, ist gleich der Zahl derer, welche durch einen beliebigen Punkt gehen, weil ja durch jeden Punkt eine Sehne gelegt werden kann. Das Resultat von III. 1. zeigt also, dass die Sehnen Doppelcurven sind. Die gesuchte Fläche hat demnach eine Curve vierter Ordnung zur dreifachen und vier Sehnen zu Doppelcurven. Die Fläche niedrigster Ordnung, welche solche Singularitäten enthalten kann, ohne zu zerfallen, ist die achter Ordnung. Die von den Kegelschnitten erzeugte Fläche kann nun offenbar nur abhängig sein von der Curve und den vier Sehnen und es liegt nahe anzunehmen, dass sie durch die Bedingung, jene Singularitäten zu enthalten, vollständig bestimmt ist. Unter dieser Voraussetzung können wir ihre Ordnung finden. Damit eine Curve vierter Ordnung erster Species dreifache Curve einer Fläche n^{ter} Ordnung ist, müssen $8\,(3n-8)$ Bedingungen erfüllt sein. Ferner sind $3n+1$ Bedingungen nöthig, damit eine Gerade Doppelcurve der Fläche ist. Diese Zahl erniedrigt sich jedoch um acht durch jeden Schnittpunkt der Geraden mit einer dreifachen Curve, so dass für eine Sehne noch $3n-15$ bleiben. Es muss also die Gleichung bestehen

$$\frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{1.\,2.\,3.} - 1 = 8\,(3n-8) + 4\,(3n-15)\,,$$

die einzige positive Wurzel dieser Gleichung ist $n = 8$. Daher ist die Fläche achter Ordnung die einzige, welche durch jene vielfachen Cur-

en vollständig bestimmt ist. Ein Kegelschnitt, welcher den Bedingungen (3 C, S_1, S_2, S_3, S_4) gnügt, hat nun 17 Punkte mit der Fläe gemein und liegt ganz auf ihr. Also liegen alle Kegelschnitte, elche den Bedingungen (3 C, S_1, S_2, S_3, S_4) genügen, auf einer läche achter Ordnung, in welcher die Curve dreifache Curve ist und lglich:

Giebt es zwei Kegelschnitte, welche die Curve in drei und fünf Sehnen in je einem Punkte treffen, ohne im Allgemeinen durch einen den Schnen und der Curve gemeinsamen Punkt zu gehen.

Carlsruhe, im November 1869.

Einige Bemerkungen zu Herrn Neumann's Untersuchungen über die Bessel'schen Functionen *).

Von Schläfli in Bern.

Die Bessel'schen Functionen sind diejenigen, die als Functionen eines Vielfachen des Excentricitätsverhältnisses auftreten, wenn die Kepler'sche Aufgabe mit Anwendung der Fourier'schen Reihe gelöst wird. Herr Neumann nennt sie in der erwähnten Abhandlung Bessel'sche Functionen erster Art, um sie von solchen zweiter Art zu unterscheiden, deren er bedarf, um arbiträre Functionen, die gewisse Bedingungen erfüllen, in Summenreihen zu entwickeln, die entweder nur nach Bessel'schen Functionen der einen Art oder nach solchen beider Arten fortschreiten. Das Studium der interessanten Schrift veranlasste mich zu einigen Wahrnehmungen, die ich dem Verfasser brieflich mittheilte, und die ich nun, seiner freundlichen Aufforderung folgend, zu veröffentlichen wage.

Wenn in der hypergeometrischen Reihe von Gauss die zwei ersten constanten Elemente unendlich wachsen, während das Produkt derselben und des Arguments eine endliche Variable bleibt, so geht die entsprechende Function in eine über, die sich im endlichen nirgends mehr verzweigt und überall stetig bleibt, mit Ausnahme des Unendlichen, wo sie eine Unstetigkeit von schwierigem Charakter annimmt. Ich will diese Function mit

$$F(a, x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{x^n}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(a+n+1)}$$

bezeichnen und definiren. Sie genügt der Differentialgleichung

$$x\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (a+1)\,\frac{\partial y}{\partial x} - y = 0,$$

die $x^{-a} F(-a, x)$ zum *zweiten* particulären Integral hat; und es ist

*) Theorie der Bessel'schen Functionen von C. Neumann. Leipzig bei Teubner. 1867. Fortsetzung in dem Ber. der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Jahrgang 1869. pag. 221.

$$\frac{\partial}{\partial x} F(a, x) = F(a+1, x), \text{ also auch}$$

$$x F(a+2, x) + (a+1) F(a+1, x) - F(a, x) = 0.$$

Wenn nun a einer nullen oder positiven ganzen Zahl n gleich wird, so ist die Bessel'sche Function erster Art und n^{ten} Ranges durch

$$\overset{n}{J}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n F(n, -\tfrac{1}{4}x^2)$$

bezeichnet und definirt. Ich werde in den Fall kommen, mir auch für ein beliebiges Element a die Bezeichnung $\overset{a}{J}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^a F(a, -\frac{1}{4}x^2)$ zu erlauben. Wenn a zu einer ganzen positiven Zahl n wird, so findet sich: $\overset{-n}{J}(x) = (-1)^n \overset{n}{J}(x)$, weil überhaupt für jedes Argument z die Relation stattfindet: $\overset{-n}{z} F(-n, z) = F(n, z)$. Die Function $\overset{a}{J}(x)$ genügt der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - a^2) y = 0,$$

und zugleich genügt ihr $\overset{-a}{J}(x)$. Daher sind

$$\overset{n}{J}(x) \quad \text{und} \quad \lim_{a=n} \frac{1}{a-n} \left(\overset{a}{J}(x) - (-1)^n \overset{-a}{J}(x)\right)$$

die zwei particulären Integrale der Differentialgleichung

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x \frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - n^2) y = 0.$$

---

§ 1.

Entwicklung von $(x+y)^a F(a, (x+y)^2)$ nach Bessel'schen Functionen erster Art von $2iy$, wenn y absolut kleiner als x ist.

Der Satz über Addition der Argumente

$$\overset{0}{J}(x+y) = \overset{0}{J}(x) \overset{0}{J}(y) + 2 \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} (-1)^\lambda \overset{\lambda}{J}(x) \overset{\lambda}{J}(y),$$

gültig für alle endlichen Werthe von x und y, der sich S. 40 der angeführten Abhandlung findet, leitet zu der Frage, ob vielleicht für die etwas allgemeinere Function $x^a F(a, x^2)$ ein ähnlicher Satz bestehe.

Hat man sich über $\log x$ verständigt, und fasst man den $\log(x+y)$ so, dass er mit $\log x$ zusammenfällt, wenn y verschwindet, so findet man für den Coefficienten von y^m in der Entwicklung des Einzelterms

$$\frac{(x+y)^{a+2n}}{n!\,\Gamma(a+n+1)}$$

folgenden Werth:

$$\binom{a+2n}{m}\frac{x^{a+2n-m}}{n!\,\Gamma(a+n+1)}=\binom{a+2n}{n}\frac{x^{a+2n-m}}{m!\,\Gamma(a+2n-m+1)}.$$

Nun ist aber

$$\binom{a+2n}{n}=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\binom{a+2n-m}{n-\lambda}\binom{m}{\lambda},\quad \binom{m}{\lambda}\frac{1}{m!}=\frac{1}{\lambda!\,(m-\lambda)!},$$

$$\binom{a+2n-m}{n-\lambda}\frac{1}{\Gamma(a+2n-m+1)}=\frac{1}{(n-\lambda)!\,\Gamma(a+n-m+\lambda+1)}.$$

Man bekommt also:

$$(x+y)^a F(a,(x+y)^2)=S=\sum_n\sum_m\sum_\lambda \frac{x^{a+2n-m}}{(n-\lambda)!\,\Gamma(a+n-m+\lambda+1)}\cdot\frac{y^m}{\lambda!\,(m-\lambda)!}$$

Hält man zunächst m, λ fest, so durchläuft n die Werthe λ, $\lambda+1,\ldots.$, und die entsprechende Summation giebt:

$$S=\sum_m\sum_\lambda x^{a-m+2\lambda}F(a-m+2\lambda,x^2)\cdot\frac{y^m}{\lambda!\,(m-\lambda)!}.$$

Setzt man hier $m=2\lambda+\mu$, wo μ alle ganzen Werthe durchläuft, so kommt

$$S=\sum_\mu\sum_\lambda x^{a-\mu}F(a-\mu,x^2)\frac{y^{\mu+2\lambda}}{\lambda!\,(\mu+\lambda)!}$$
$$=\sum_\mu x^{a-\mu}F(a-\mu,x^2)\,.\,y^\mu F(\mu,y^2).$$

Man hat also den Additionssatz

$$(1)\quad (x+y)^a F(a,(x+y)^2)=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}x^{a-n}F(a-n,x^2)\,.\,y^n F(n,y^2),$$

wobei zu bemerken ist, dass

$$y^n F(n,y^2)=y^{-n}F(-n,y^2)=(-i)^n J^n(2iy)$$

wird, sobald n positiv oder Null ist.

In der arithmetischen Reihe $a-n+1$, $a-n+2$, ... sind alle Terme absolut grösser als 1 bis auf zwei unmittelbar auf einander folgende, deren absolute Werthe β, γ möglicher Weise kleiner als 1 sein können, und es wirklich sind, wenn a reell, aber nicht ganz ist. (Geht der eine derselben gegen 0 hin, so geht der andere gegen 1 hin.) Daher ist $(a-n+1)(a-n+2)\ldots.(a-n+\lambda)$ absolut grösser als $\beta\gamma$; folglich, wenn t, u die absoluten Werthe von x, y bedeuten,

$$F(a-n,x^2)\text{ abs.}<\frac{1}{\Gamma(a-n+1)}\cdot\frac{1}{\beta\gamma}e^{t^2},\qquad y^nF(n,y^2)\text{ abs.}<\frac{u^n}{n!}e^{u^2}.$$

Da $\frac{1}{\Gamma(a-n+1)}=(-1)^{n-1}\frac{\sin a\pi}{\pi}\Gamma(n-a)$, so folgt, dass

$$x^{-n}F(a-n,x^2)\,.\,y^nF(n,y^2)\text{ abs.}<\frac{\sin a\pi}{\beta\gamma\pi}e^{t^2+u^2}\frac{\Gamma(n-a)}{\Gamma(n+1)}\left(\frac{u}{t}\right)^n$$

ist. Wird z. B. β sehr klein, so ist $\beta\pi$ ungefähr der absolute Werth von $\sin a\pi$; also bleibt $\frac{\sin a\pi}{\beta\gamma\pi}$ endlich. Bedeutet b die reelle Componente von a, so hat, wenn n positiv sehr gross wird, $\frac{\Gamma(n-a)}{\Gamma(n+1)}$ ungefähr den absoluten Werth n^{-1-b}. Der auf positive Werthe von n bezügliche Theil der Summe (1) hat also einen endlichen Werth, sobald als $u < t$ ist, wie anfänglich vorausgesetzt war. Da nun der andere Theil der Summe für jedes Paar endlicher Werthe von x, y convergirt, so folgt, dass der Satz (1) zu seiner Geltung vorerst die Endlichkeit von x und y erfordert, und dann noch, dass y absolut kleiner als x sei. Wenn aber a eine ganze Zahl ist, so fällt die zweite Bedingung weg, und man hat

$$\overset{n}{J}(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n-\lambda}{J}(x)\,\overset{\lambda}{J}(y). \tag{2}$$

§ 2.

Addition der Argumente bei den Bessel'schen Functionen zweiter Art.

Diese Functionen werden von Herrn Neumann (S. 9) mit $\overset{n}{O}(x)$ bezeichnet und durch die Gleichheit

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{y^n}{x^{n+1}} = \overset{0}{O}(x)\,\overset{0}{J}(y) + 2\sum_{n=1}^{n=\infty} \overset{n}{O}(x)\,\overset{n}{J}(y)$$

definirt. Die Vergleichung der Coefficienten derselben Potenz von y liefert eine Recursionsscala für diese Coefficienten, aus der sich

$$\overset{0}{O}(x) = \frac{1}{x}, \quad \overset{n}{O}(x) = \frac{n}{2x}\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n+1}{2}} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{2}{x}\right)^{n-2\lambda} \text{ für } n = 1, 2, \ldots$$

ergiebt. Diejenigen geraden Ranges (nullter Rang inbegriffen) haben $\frac{1}{x}$ zum höchsten Term. Sie genügen der Differentialgleichung

$$x^2\frac{\partial^2 \overset{n}{O}(x)}{\partial x^2} + 3x\frac{\partial \overset{n}{O}(x)}{\partial x} + (x^2 - n^2 + 1)\overset{n}{O}(x) = x\cos^2\frac{n\pi}{2} + n\sin^2\frac{n\pi}{2},$$

und sind durch diese bestimmt, wenn die Bedingung hinzutritt, dass sie ganze Functionen von $\frac{1}{x}$ seien. Sie erfüllen ferner die zwei Relationen

$$(n-1)\overset{n+1}{O}(x) + (n+1)\overset{n-1}{O}(x) - (n^2-1)\frac{2}{x}\overset{n}{O}(x) = \frac{2n}{x}\sin^2\frac{n\pi}{2},$$

$$\overset{n+1}{O}(x) - \overset{n-1}{O}(x) + 2\frac{\partial \overset{n}{O}(x)}{\partial x} = 0.$$

Setzt man diese Relationen in negative Rangzahlen fort, so haben sie

$$\overset{-n}{O}(x) = (-1)^n \overset{n}{O}(x)$$

zur nothwendigen Folge. Man kann also die Definitionsgleichheit auch durch

$$\frac{1}{x-y} = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \overset{n}{O}(x)\, \overset{n}{J}(y)$$

darstellen.

Multiplicirt man die Formel (2) mit $\overset{m}{O}(y)\,dy$, und integrirt, indem man y rechtläufig ein Mal um 0 herumführt, unter Anwendung der Sätze (13) S. 19 der angef. Abh., so bekommt man

$$\frac{1}{i\pi}\int_{(0)} \overset{n}{J}(x+y)\, \overset{m}{O}(y)\,dy = \overset{n-m}{J}(x) + (-1)^m \overset{n+m}{J}(x), \quad (m, n = 0, 1, \ldots).$$

Ersetzt man x, y resp. durch $-a$, $x+a$, so hat man

$$(a) \qquad \frac{1}{i\pi}\int_{(-a)} \overset{m}{O}(a+x)\, \overset{n}{J}(x)\,dx = \overset{m-n}{J}(a) + (-1)^n \overset{m+n}{J}(a).$$

Die in den beiden letzten Formeln den Integralen zugefügten Indices (0) und $(-a)$ sollen andeuten, dass die Integrationen rechtläufig herumzuführen sind, einmal um den Punkt 0, das andere Mal um den Punkt $-a$. Da $\overset{m}{O}(a+y)$ für $y=\infty$ verschwindet und in $y=-a$ rational unstetig wird (sich also nicht verzweigt), so ist

$$\frac{1}{2i\pi}\int \overset{m}{O}(a+y)\,\frac{dy}{x-y} = \overset{m}{O}(a+x),$$

vorausgesetzt dass der y-Weg rechtläufig ein Mal $-a$ umschliesst, aber x ausschliesst; denn solches ist dasselbe, wie wenn er nur x rückläufig ein Mal umschlösse. Ist x abs. $> a$, so kann man diesen Weg zu einem Kreise um 0 gestalten, dessen Radius zwischen den absoluten Werthen von a und x liegt. Substituirt man dann für $\frac{1}{x-y}$ die Entwicklung nach Bessel'schen Functionen und wendet (a) an, so bekommt man

$$\overset{m}{O}(a+x) = \overset{m}{J}(a)\, \overset{0}{O}(x) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\overset{m-n}{J}(a) + (-1)^n \overset{m+n}{J}(a) \right) \overset{n}{O}(x),$$

in einfacherer Darstellung

$$(3) \qquad \overset{n}{O}(x+y) = \sum_{\lambda=-\infty}^{\lambda=\infty} \overset{n-\lambda}{O}(x)\, \overset{\lambda}{J}(y),$$

wenn y absolut kleiner als x ist.

Dieser Satz muss aber auch ohne Anwendung von Integralformen auf ähnliche Weise, wie der Satz (2), bewiesen werden können; und es hat vielleicht ein Interesse zu sehen, wie eine solche unvollständige Summenreihe $\overset{n}{O}(x)$ Eigenschaften mit der vollständigen Summenreihe

$\overset{n}{J}(x)$ (die einer homogenen Differentialgleichung genügt) gemein hat. Die Function

$$\overset{n}{S}(x) = \sum_{\lambda=0}^{\lambda < \frac{n}{2}} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2\lambda} = \frac{2}{n}\left(x\,\overset{n}{O}(x) - \cos^2\frac{n\pi}{2}\right)$$

ist unmittelbar mit $\overset{n}{J}(x)$ verwandt und passt für den vorliegenden Zweck besser als $\overset{n}{O}(x)$ selbst. Sie erfüllt die zwei Relationen

$$\overset{n+1}{S}(x) + \overset{n-1}{S}(x) - \frac{2n}{x}\overset{n}{S}(x) = \frac{4}{x}\cos^2\frac{n\pi}{2},$$

$$\overset{n+1}{S}(x) - \overset{n-1}{S}(x) + 2\frac{\partial \overset{n}{S}(x)}{\partial x} = 0,$$

und daher auch die Differentialgleichung

$$x^2\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + x\frac{\partial S}{\partial x} + (x^2 - n^2)\,S = 2x\sin^2\frac{n\pi}{2} + 2n.\cos^2\frac{n\pi}{2}.$$

Eine nothwendige Folge der Relationen ist: $\overset{0}{S}(x) = 0$, und ferner: $\overset{-n}{S}(x) = -(-1)^n\overset{n}{S}(x)$. Endlich ist

$$\overset{n+1}{S}(x) + \overset{n-1}{S}(x) = 4\,\overset{n}{O}(x)$$

eine andere Darstellung der ersten Relation. Ich trachte nun genau dem Gange in § 1. zu folgen.

Wen a eine ganze positive Zahl und y abs. $< x$ ist, so hat man

$$\overset{a}{S}(x+y) = \sum_n \sum_m \frac{(a-n-1)!}{n!}\binom{-a+2n}{m}\left(\frac{x}{2}\right)^{-a-m+2n}\left(\frac{y}{2}\right)^m.$$

Denkt man sich die ganze nulle oder positive Zahl m beliebig gegeben, so ist n nicht durch $< \frac{a}{2}$ beschränkt, sondern kann bis $< \frac{a+m}{2}$ gehen, weil auf dieser Strecke jenseits der anfänglichen Gränze der Binomialcoefficient verschwindet. Aber nun ist die Gefahr da, dass im selben Intervalle die Facultät $(a-n-1)!$ unendlich werde. Die Sache ist also nur sicher, wenn zugleich $n < a$ und $n < \frac{a+m}{2}$. So lange als $m \lesseqgtr a$ ist, schliesst die zweite Ungleichheit die erste in sich. Die schwierige Gegend der Doppelsumme ist also durch $m > a$, $a \lesseqgtr n < \frac{a+m}{2}$ definirt, und in dieser ist der Einzelterm obiger Doppelsummenform einstweilen noch unbestimmt $(\infty \times 0)$. Im sichern Gebiete aber, das zu $\overset{a}{S}(x+y)$ gehört oder, weil werthlos, gehören kann, ist

$$\frac{(a-n-1)!}{n!}\binom{-a+2n}{m} = (-1)^{m+n}\frac{(a+m-2n-1)!}{m!}\binom{-a+2n}{n}.$$

Der Ausdruck rechts hat nun im Gebiete, das nicht zu $\overset{a}{S}(x+y)$ gehört, einen endlichen nicht nullen Werth. Der entsprechende Theil

der Doppelsummenform heisse $-A$, und B sei die über beide Gebiete sich erstreckende Doppelsumme, so dass $\overset{a}{S}(x+y) = A + B$ ist. Berechnen wir zuerst A. Wir haben

$$A = \sum_n \sum_m (-1)^{m+n+1} \frac{(a+m-2n-1)!}{m!} \binom{2n-a}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{-a-m+2n} \left(\frac{y}{2}\right)^m.$$

$$(m < a, \quad a \leqq n < \tfrac{1}{2}[a+m]).$$

Da $\binom{2n-a}{n} = \sum_\lambda \binom{2n-a-m}{n-a-\lambda}\binom{m}{\lambda} = \Sigma (-1)^{n+a+\lambda} \binom{m-n-\lambda-1}{n-a-\lambda}\binom{m}{\lambda}$, so folgt

$$A = \sum_{m=a+1}^{m=\infty} \sum_{n=a}^{n<\frac{1}{2}(a+m)} \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-a} (-1)^{a+m+\lambda+1} \frac{(m-n-\lambda-1)!}{(n-a-\lambda)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-a-m+2n} \frac{(\frac{1}{2}y)^m}{\lambda!\,(m-\lambda}$$

Hält man m, λ fest, so geht n von $a+\lambda$ bis $< \frac{a+m}{2}$. Man kann also summiren und bekommt

$$A = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{m=a+2\lambda+1}^{m=\infty} (-1)^{m+a+\lambda+1} \overset{m-a-2\lambda}{S}(x) \cdot \frac{(\frac{1}{2}y)^m}{\lambda!\,(m-\lambda)!}$$

$$= \sum_\lambda \sum_m \overset{-m+a+2\lambda}{S}(x) \cdot (-1)^\lambda \frac{(\frac{1}{2}y)^m}{\lambda!\,(m-\lambda)!}.$$

Hält man hier λ fest und setzt $m = 2\lambda + p$, so kommt

$$A = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{p=a+1}^{p=\infty} \overset{a-p}{S}(x) \cdot (-1)^\lambda \frac{(\frac{1}{2}y)^{p+2\lambda}}{\lambda!\,(p+\lambda)!}.$$

Die zwei Summationen sind nun von einander unabhängig; und man bekommt, wenn man nach λ summirt,

$$A = \sum_{p=a+1}^{p=\infty} \overset{a-p}{S}(x)\, \overset{p}{f}(y).$$

Nun ist B zu berechnen; in seinem Gebiete ist $0 \leqq m$, $0 \leqq n < \frac{a+m}{2}$; also

$$B = \sum_{m=0}^{m=\infty} \sum_{n=0}^{n<\frac{a+m}{2}} (-1)^{m+n} \frac{(a+m-2n-1)!}{m!} \binom{2n-a}{n} \left(\frac{x}{2}\right)^{-a-m+2n} \left(\frac{y}{2}\right)^m.$$

Da man $\binom{2n-a}{n} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \binom{2n-a-m}{n-\lambda}\binom{m}{\lambda}$ setzen kann, so wird

$$B = \sum_m \sum_n \sum_\lambda (-1)^{m+\lambda} \frac{(a+m-n-\lambda-1)!}{(n-\lambda)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{-a-m+2n} \frac{(\frac{1}{2}y)^m}{\lambda!(m-\lambda)!}.$$

Hält man m, λ fest, so hat n den Spielraum $\lambda \leqq n < \frac{a+m}{2}$. Man kann also nach n summiren und bekommt

$$B = \sum_m \sum_\lambda \overset{a+m-2\lambda}{S}(x) (-1)^{m+\lambda} \frac{(\frac{1}{2}y)^m}{\lambda!\,(m-\lambda)!}.$$

Da $m > 2n - a$ und $n \geqq \lambda$ war, so ist nun $m > 2\lambda - a$. Die Be-

dingung $m \gtrless 0$ braucht man nicht, da sie schon in $m \gtrless \lambda \gtrless 0$ enthalten ist; und diese zwei braucht man nicht, weil bei ihrer Nichterfüllung der Einzelterm verschwindet. Wenn man also $m = 2\lambda + p$ setzt, so geht p von $-a+1$ bis ∞, und man hat

$$B = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} \sum_{p=-a+1}^{p=\infty} {}^{a+p}S(x)\,(-1)^{p+\lambda}\frac{(\frac{1}{2}y)^{p+2\lambda}}{\lambda!\,(p+\lambda)!} = \sum_{p=-a+1}^{p=\infty} {}^{a+p}S(x)\,{}^{-p}J(y).$$

Da ${}^{0}S(x) = 0$, so darf man die Summe mit $p = -a$ beginnen. Schreibt man noch $-p$ statt p, so hat man

$$B = \sum_{p=-\infty}^{p=a} {}^{a-p}S(x)\,.\,{}^{p}J(y).$$

Addirt man die für A und B gefundenen Ausdrücke, so ergiebt sich

$${}^{a}S(x+y) = \sum_{p=-\infty}^{p=\infty} {}^{a-p}S(x)\,{}^{p}J(y).$$

Addirt man endlich die zwei Gleichungen, die hieraus für $a = n-1$ und $a = n+1$ entstehen, und dividirt durch 4, so bekommt man den Satz (3), der zu beweisen war.

§ 3.

Ueber das Product zweier Functionen verschiedenen Ranges.

Auf S. 70. der angef. Abh. findet sich die merkwürdige Formel (20)

$$\left({}^{n}J(x)\right)^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} {}^{2n}J(2x\sin\varphi)\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} {}^{0}J(2x\sin\varphi)\,.\,\cos(2n\varphi)\,.\,d\varphi.$$

Giebt es eine ähnliche Darstellung des Products $F(a, x)\,.\,F(b, x)$? Nimmt man

$$\sum_{n=0}^{n=\infty} A_n \frac{x^n}{n!\,\Gamma(a+b+n+1)}$$

als Form seiner Entwicklung an, so hat man zunächst

$$A_n = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \binom{n}{\lambda} \frac{\Gamma(a+b+n+1)}{\Gamma(a+\lambda+1)\,\Gamma(b+n-\lambda+1)}.$$

Nun ist überhaupt (nicht etwa nur für Binomialcoefficienten), sobald als die reelle Componente von $a+b+1$ positiv ist,

$$\frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)} = \frac{1}{2i\pi}\int_w (1+t)^{a+b}\,t^{-b-1}\,dt \quad (\log t \text{ reell, wenn } t \text{ positiv})$$

eine der Formen, unter denen man den bekannten Satz über das Euler'sche Integral erster Art darstellen kann. Dabei ist die Integration hinerstreckt zu denken längs eines Weges w, welcher in -1 beginnt, und rechtläufig um 0 herumlaufend zu -1 zurückkehrt.

Gestaltet man diese Integrationscurve zu einem *Kreise* um 0 und setzt $\log t = i \,.\, 2\varphi$, so verwandelt sich die Formel in:

$$\frac{\Gamma(a+b+1)}{\Gamma(a+1)\,\Gamma(b+1)} = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/2\pi} (2\cos\varphi)^{a+b}\cos[(a-b)\varphi]\,d\varphi.$$

Daher ist

$$A_n = \frac{1}{2i\pi}\int_w (1+t)^{a+b+n}\,t^{-a-1}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n}\binom{n}{\lambda}t^{-\lambda}\,dt$$

$$= \frac{1}{2i\pi}\int_w (1+t)^{a+b+2n}\,t^{-a-n-1}\,dt = \frac{\Gamma(a+b+2n+1)}{\Gamma(a+n+1)\,\Gamma(b+n+1)},$$

gerade so, wie wenn eine der zwei Zahlen a, b ganz und null oder positiv ist. Folglich ist

$$F(a,x)\,.\,F(b,x) = \frac{1}{2i\pi}\int_w (1+t)^{a+b}\,t^{-a-1}\,F\Big(a+b,\, x\frac{(1+t)^2}{t}\Big)\,dt$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{1/2\pi}(2\cos\varphi)^{a+b}\cos[(a-b)\varphi]\,.\,F(a+b,\,4x\cos^2\varphi)\,.\,d\varphi.$$

Dabei ist durchweg unter der Integrationscurve w diejenige zu verstehen, welche vorhin angegeben wurde. — Setzt man ganze Zahlen m, n für a, b, schreibt $-\frac{1}{4}x^2$ statt x, und multiplicirt dann mit $(\frac{1}{2}x)^{m+n}$, so kommt

$$\overset{m}{J}(x)\,\overset{n}{J}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{1/2\pi}\overset{m+n}{J}(2x\cos\varphi)\,.\,\cos[(m-n)\varphi]\,d\varphi$$

$$= (-1)^n\frac{2}{\pi}\int_0^{1/2\pi}\overset{m-n}{J}(2x\cos\varphi)\cos[(m+n)\varphi]\,d\varphi,$$

was für $m = n$ in die Eingangs erwähnte Formel übergeht. Hierdurch sind aber in der Entwicklung von $\overset{n}{J}(2x\sin\varphi)$ nach $\left\{\begin{matrix}\text{Cosinussen}\\ \text{Sinussen}\end{matrix}\right\}$ der $\left\{\begin{matrix}\text{geraden}\\ \text{ungeraden}\end{matrix}\right\}$ Vielfachen von φ, wenn n $\left\{\begin{matrix}\text{gerade}\\ \text{ungerade}\end{matrix}\right\}$ ist, die Coefficienten bekannt.

§ 4.

Ueber die complementäre Bessel'sche Function.

In der Einleitung zu diesem Aufsatz ward gesagt, wie man die zwei particulären Integrale der Differentialgleichung

$$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial y}{\partial x} + (x^2 - a^2)y = 0$$

darzustellen habe, wenn a einer ganzen Zahl n gleich wird. Sollen

nun dieselben durch Integralformen ausgedrückt werden, so steht unter anderen, wenn die reelle Componente von x positiv ist, die Formel

$$(4)\quad \overset{a}{J}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi - a\varphi)\,d\varphi - \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x\sin\theta - a\theta}\,d\theta$$

zu Gebot, die ich im ersten Bande der Annali di matematica bewiesen habe. Für $a = n$ ist also das erste particuläre Integral

$$\overset{n}{J}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi;$$

und, wenn ε eine zum Verschwinden bestimmte Zahl bedeutet, so ist das zweite

$$\overset{n}{Y}(x) = \lim.\frac{1}{2\varepsilon}\left(\overset{n+\varepsilon}{J}(x) - (-1)^n\,\overset{-n-\varepsilon}{J}(x)\right) + [\log 2 + \Gamma'(1)]\,.\,\overset{n}{J}(x)$$

genau die complementäre Bessel'sche Function, wie sie Herr Neumann definirt. Mittelst der Relationen

$$\overset{a+1}{J} + \overset{a-1}{J} - \frac{2a}{x}\overset{a}{J} = 0, \qquad \overset{a+1}{J} - \overset{a-1}{J} + 2\frac{\partial \overset{a}{J}}{\partial x} = 0$$

überzeugt man sich leicht, dass der letzte Ausdruck die zwei Relationen

$$\overset{n+1}{Y} + \overset{n-1}{Y} - \frac{2n}{x}\overset{n}{Y} = 0, \qquad \overset{n+1}{Y} - \overset{n-1}{Y} + 2\frac{\partial \overset{n}{Y}}{\partial x} = 0$$

erfüllt. Substituirt man in demselben einmal die Summenformen für $\overset{n+\varepsilon}{J}$, $\overset{-n-\varepsilon}{J}$ und dann die Integralformen und führt die Rechnung aus, so kommt:

$$\overset{n}{Y} = \log x\,.\,\overset{n}{J} - \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n}$$

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^n\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left(\mathfrak{S}\,\frac{1}{\lambda} + \mathfrak{S}\,\frac{1}{n+\lambda}\right)\frac{(-\frac{1}{4}x^2)^\lambda}{\lambda!\,(n+\lambda)!}$$

$$= [\log 2 + \Gamma'(1)]\overset{n}{J} + \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin(x\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi - \tfrac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-x\sin\theta}[e^{n\theta} + (-1)^n e^{-n\theta}]\,d\theta,$$

wo $\mathfrak{S}\,\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \Lambda(n+1) - \Gamma'(1)$, wenn $\frac{\partial \log\Gamma(x)}{\partial x} = \Lambda(x)$ gesetzt wird; für $n = 0$ verschwindet also $\mathfrak{S}\,\frac{1}{n}$.

Unterscheidet man im Summenausdruck (5) für $\overset{n}{Y} - \log x\,.\,\overset{n}{J}$ folgende Theile

$$\overset{n}{G} = -\tfrac{1}{2}\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n} = -\tfrac{1}{2}\overset{n}{S},$$

$$\overset{n}{H} = -\tfrac{1}{2}\sum_{\lambda>\frac{n-1}{2}}^{\lambda=n-1} \frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2\lambda-n} + \tfrac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\left(\mathfrak{S}\frac{1}{n+\lambda} - \mathfrak{S}\frac{1}{\lambda}\right)\frac{(-\frac{1}{4}x^2)^\lambda}{\lambda!(n+\lambda)!},$$

$$\overset{n}{E} = -\left(\frac{x}{2}\right)^{n}\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\mathfrak{S}\frac{1}{n+\lambda}\cdot\frac{(-\frac{1}{4}x^2)^\lambda}{\lambda!\,(n+\lambda)!},$$

so ist $\overset{n}{Y} = \log x \,.\, \overset{n}{J} + \overset{n}{G} + \overset{n}{H} + \overset{n}{E}$, und der Theil $\overset{n}{E}$ hat dieselbe Bezeichnung und Bedeutung, wie auf S. 52 der angef. Abh.; die dortige Untersuchung veranlasste mich zu dieser Theilung, mit der ich dasselbe Ziel, lineare Darstellung der Function $\overset{n}{Y} - \log x \,.\, \overset{n}{J}$ durch Bessel'sche Functionen erster und zweiter Art, zu erreichen glaube, das der Verfasser dort vor Augen hatte. — Man überzeuge sich nun zunächst von der Richtigkeit folgender vier Paare von Relationen (eigentlich nur der zwei letzten, denen ich die zwei schon bekannten der Uebersicht wegen voranstelle):

$$\overset{n+1}{J} + \overset{n-1}{J} - \frac{2n}{x}\overset{n}{J} = 0, \qquad \overset{n+1}{J} - \overset{n-1}{J} + 2\frac{\partial}{\partial x}\overset{n}{J} = 0,$$

$$\overset{n+1}{G} + \overset{n-1}{G} - \frac{2n}{x}\overset{n}{G} = -\frac{2}{x}\cos^2\frac{n\pi}{2}, \qquad \overset{n+1}{G} - \overset{n-1}{G} + 2\frac{\partial}{\partial x}\overset{n}{G} = 0,$$

$$\overset{n+1}{H} + \overset{n-1}{H} - \frac{2n}{x}\overset{n}{H} = -\frac{2}{x}\overset{n}{J} + \frac{2}{x}\cos^2\frac{n\pi}{2}, \qquad \overset{n+1}{H} - \overset{n-1}{H} + 2\frac{\partial}{\partial x}\overset{n}{H} = 0,$$

$$\overset{n+1}{E} + \overset{n-1}{E} - \frac{2n}{x}\overset{n}{E} = \frac{2}{x}\overset{n}{J}, \qquad \overset{n+1}{E} - \overset{n-1}{E} + 2\frac{\partial}{\partial x}\overset{n}{E} = -\frac{2}{x}\overset{n}{J}$$

Man wird erkennen, dass sie das ähnliche Relationenpaar für die Y Functionen zur nothwendigen Folge haben. Dass $\overset{-n}{J} = (-1)^n \overset{n}{J}$, $\overset{-n}{G} = -(-1)^n \overset{n}{G}$, ist schon bekannt; das dritte Relationenpaar, verbunden mit der aus der Definition erkennbaren Gleichheit $\overset{0}{H} = 0$, giebt $\overset{-n}{H} = -(-1)^n \overset{n}{H}$; das vierte Paar giebt nach und nach

$$-\overset{-1}{E} = \overset{1}{E} + \frac{2}{x}\overset{0}{J}, \quad \overset{-2}{E} = -\overset{0}{E} + \frac{2}{x}\left(-\overset{-1}{E}\right) + \frac{2}{x}\overset{1}{J}, \ldots,$$

$$(-1)^n\overset{-n}{E} = -(-1)^{n-2}\overset{-n+2}{E} + 2\frac{n-1}{x}(-1)^{n-1}\overset{-n+1}{E} + \frac{2}{x}\overset{n-1}{J},$$

dient also als Recursionsskale zur schrittweisen Berechnung von $(-1)^n \overset{-n}{E}$.

Da schon $\frac{2}{x}\overset{0}{J} = 2\overset{0}{O} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty}\left(\overset{2\lambda+1}{J} + \overset{2\lambda-1}{J}\right)$ mittelst (7ª) S. 7 der angef. Abh., so ist klar, dass $(-1)^n \overset{-n}{E}$ keiner ganzen Entwicklung fähig ist, sondern für $x = 0$ unendlich wird. Da ich einmal dabei bin, die Folgen der Relationen zu zergliedern, so will ich das Geschäft sogleich zu Ende führen, obgleich das die E Function betreffende Ergebniss erst dann verwerthet werden kann, wenn das vorhin gestellte Ziel schon erreicht ist. Da $\overset{0}{Y}$ nicht verschwindet, so verlangt für $n = 0$ die erste der Y betreffenden Relationen durchaus $\overset{-1}{Y} = -\overset{1}{Y}$, und dann ziehen diejenigen für $n = -1, -2, \ldots$ nothwendig $\overset{-n}{Y} = (-1)^n \overset{n}{Y}$ nach sich. Man hat also zugleich

$$\overset{n}{Y} - \log x \,.\, \overset{n}{J} = \overset{n}{G} + \overset{n}{H} + \overset{n}{E}, \quad \overset{n}{Y} - \log x \,.\, \overset{n}{J} = -\overset{n}{G} - \overset{n}{H} + (-1)^n \overset{-n}{E},$$

und hieraus durch Addition und Subtraction:

$$\tfrac{1}{2}\left((-1)^n \overset{-n}{E} + \overset{n}{E}\right) = \overset{n}{Y} - \log x \,.\, \overset{n}{J}, \quad \tfrac{1}{2}\left((-1)^n \overset{-n}{E} - \overset{n}{E}\right) = \overset{n}{G} + \overset{n}{H}.$$

Gehen wir nun daran, $\overset{n}{G}$, $\overset{n}{H}$, $\overset{n}{E}$ homogen und linear durch Bessel'sche Functionen auszudrücken, so ist für $\overset{n}{G}$ die Sache sehr leicht. Da $\overset{n+1}{S} + \overset{n-1}{S} = 4\overset{n}{O}$ war, so ist $\overset{n+1}{G} + \overset{n-1}{G} = -2\overset{n}{O}$. Summirt man die Gleichung

$$(-1)^\lambda\left(\overset{n-2\lambda}{G} + \overset{n-2\lambda-2}{G}\right) = -(-1)^\lambda \,.\, 2 \,.\, \overset{n-2\lambda-1}{O}$$

von $\lambda = 0$ bis $\lambda = n - 1$ und halbirt das Ergebniss, so hat man

$$\overset{n}{G} = -\sum_{\lambda=0}^{\lambda=n-1}(-1)^\lambda \,.\, \overset{n-2\lambda-1}{O}, \tag{7}$$

wo rechts die Terme für $\lambda = m$ und $\lambda = n - 1 - m$ einander gleich sind.

Bei der Entwicklung der Function $\overset{n}{H}$ nach Bessel'schen Functionen müssen wir von der ähnlichen Entwicklung der constanten Zahl 1, die in Formel (7ª) S. 7 der angef. Abh. enthalten ist, nämlich $1 = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} \overset{n}{J}(x)$, ausgehen, die entweder direct dadurch, dass man sieht, dass $\frac{(1-1)^n}{(2n)!}$ der Coefficient von x^{2n} ist, oder mittelst der Formeln $\frac{1}{2i\pi}\int \overset{2m}{O}\, dx = 1$, $\frac{1}{2i\pi}\int \overset{2m+1}{O}\, dx = 0$ verificirt werden kann. Da $\overset{0}{H} = 0$ ist, so giebt die erste Relation

$$\overset{1}{H} = \frac{1}{x}\left(1 - \overset{0}{J}\right) = \frac{2}{x}\sum_{n=1}^{n=\infty} \overset{2n}{J} = \Sigma \frac{1}{2n}\left(\overset{2n+1}{J} + \overset{2n-1}{J}\right) = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{1}{\lambda}\left(\overset{1+2\lambda}{J} - \overset{1-2\lambda}{J}\right)$$

Sobald man $\overset{0}{H}$, $\overset{1}{H}$ kennt, so reicht die zweite Relation in Verbindung mit der ähnlichen für J zur Fortsetzung aus und giebt

$$\overset{n}{H} = \tfrac{1}{2}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \tfrac{1}{2}\left(\overset{n+2\lambda}{J} - \overset{n-2\lambda}{J}\right), \tag{8}$$

was man zum Ueberfluss noch an der ersten Relation prüfen mag. [Will man (8) direct verificiren, so gebrauche man die Formeln

$$\frac{(n-m-1)!}{m!} = \sum_{\lambda=n-m}^{\lambda=m} \frac{1}{\lambda} \frac{(-1)^{\lambda-n+m}}{(\lambda-n+m)!\,(m-\lambda)!},$$

$$\frac{(-1)^m}{m!\,(m+n)!}\left(\mathfrak{S}\frac{1}{m+n} - \mathfrak{S}\frac{1}{m}\right) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m} \frac{1}{\lambda} \frac{(-1)^{m-\lambda}}{(m-\lambda)!\,(m+n+\lambda)!} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=m+n} \frac{1}{\lambda} \frac{(-1)^{m+\lambda}}{(m+\lambda)!\,(m+n-\lambda)!},$$

die beide aus

$$\frac{1}{a(a+1)\ldots(a+n)} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=n} \frac{1}{a+\lambda} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda!\,(n-\lambda)!}$$

herfliessen].

Dass endlich die Formel stattfindet:

$$\overset{n}{E} = -\overset{n}{J}\sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \frac{1}{\lambda} - \sum_{\lambda=n+1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} \overset{n-2\lambda}{J} - \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\infty} \frac{(-1)^\lambda}{\lambda} \overset{n+2\lambda}{J}, \tag{9}$$

ist in der angef. Abh. S. 52 bewiesen auf Grund der aus den zwei Relationen sich ergebenden Differentialgleichung

$$x^2 \frac{\partial^2 \overset{n}{E}}{\partial x^2} + x \frac{\partial \overset{n}{E}}{\partial x} + (x^2 - n^2)\overset{n}{E} = 2x \overset{n+1}{J}.$$

Substituirt man darin $\overset{n}{E} = \sum_{m=0}^{m=\infty} A_m \overset{n+2m}{J}$, so folgt

$$\overset{n+1}{J} = \frac{2}{x}\sum_{m=1}^{m=\infty} m(n+m) A_m \overset{n+2m}{J} = \Sigma \frac{m(n+m)}{n+2m} A_m \left(\overset{n+2m+1}{J} + \overset{n+2m-1}{J}\right),$$

woraus für ein positives m sich $A_m = -(-1)^m \frac{n+2m}{m(n+m)}$ ergiebt, während $A_0 = -\mathfrak{S}\frac{1}{n}$ aus dem Anfangsterm des anfänglichen Ausdrucks zu entnehmen ist. [Der directe Beweis hängt von der Richtigkeit der Gleichheit

$$\sum_{\lambda=1}^{\lambda=p-n} \frac{1}{\lambda} \frac{p!\,(p-n)!}{(p+\lambda)!\,(p-n-\lambda)!} + \sum_{\lambda=n+1}^{\lambda=p} \frac{1}{\lambda} \frac{p!\,(p-n)!}{(p-\lambda)!\,(p-n+\lambda)!} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{p}$$

ab, von der man sich dadurch überzeugt, dass man darin $n-1$

statt n setzt, die alte Gleichung von der neuen abzieht, und, da dann der laufende Divisor λ aufgeht, mittelst eines bekannten Satzes über Binomialcoefficienten die Summation ausführt. Man bekommt $\frac{1}{n}$. Da übrigens die Gleichheit für $n = p$ richtig ist, so ist sie überhaupt richtig.]

Es bleibt noch übrig, jeden der drei Theile $\overset{n}{G}$, $\overset{n}{H}$, $\overset{n}{E}$ besonders durch eine Integralform auszudrücken. Ersetzt man t in

$$\frac{(n-\lambda-1)!}{\lambda!} = \binom{n-\lambda-1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-t}\, t^{n-2\lambda-1}\, dt$$

durch xt, so bekommt man

$$\overset{n}{G} = -\int_0^\infty e^{-xt} \sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \binom{n-\lambda-1}{\lambda} (2t)^{n-2\lambda-1}\, dt.$$

Nun ist

$$\sum_{\lambda=0}^{\lambda<\frac{n}{2}} \binom{n-\lambda-1}{\lambda} (2 \operatorname{fin} \theta)^{n-2\lambda-1} \operatorname{cof} \theta = \tfrac{1}{2} (e^{n\theta} - (-1)^n e^{-n\theta});$$

folglich

$$\overset{n}{G} = -\int_0^\infty e^{-x \operatorname{fin}\theta}\, \tfrac{1}{2}(e^{n\theta} - (-1)^n e^{-n\theta})\, d\theta, \tag{10}$$

was mit dem Ausdruck (15^d) (S. 16 der angef. Abh.) für $\overset{n}{O}$ im Einklang ist. Ferner folgt aus (4):

$$\overset{n+2\lambda}{J} - \overset{n-2\lambda}{J} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin\varphi - n\varphi) \sin(2\lambda\varphi)\, d\varphi,$$

und, da $\Sigma \frac{\sin(2\lambda\varphi)}{\lambda} = \frac{\pi}{2} - \varphi$ ist, so hat man den Integralausdruck

$$\overset{n}{H} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(x \sin\varphi - n\varphi) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) d\varphi. \tag{11}$$

Aus (6), (10) und (11) folgt

$$2)\ \overset{n}{E} = \left[\log\frac{2}{x} + \Gamma'(1)\right] \cdot \overset{n}{J} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi \sin(x \sin\varphi - n\varphi)\, d\varphi - (-1)^n \int_0^\infty e^{-x \operatorname{fin}\theta - n\theta}\, d\theta.$$

§ 5.

Nachtrag.

Man kann die für ein beliebiges Element a gültige Formel

$$\overset{a}{J}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(2x\sin\varphi - a\varphi)\, d\varphi - \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-2x\sinh\varphi - a\varphi}\, d\varphi$$

mit geringerer Mühe beweisen, als im ersten Bande der Mailänder Annalen geschehen ist. Um im Summenausdruck den Binomialcoefficient $\binom{a+2n}{n}$ anbringen zu können, multiplicire man ihn mit

$$\frac{1}{\Gamma(a+2n+1)} = \frac{1}{2i\pi}\int_w e^z z^{-a-2n-1}\, dz,$$

eine Formel, die, wenn ich nicht irre, Weierstrass in seiner Abhandlung über Facultäten gegeben hat. Dabei ist unter w eine Integrationscurve zu verstehen, welche im Punkte $-\infty$ beginnt, und, rechtläufig um 0 herumgehend, zu $-\infty$ zurückkehrt. Der Summenausdruck

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{a+2n}}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(a+n+1)}$$

wird dadurch zu

$$S = \frac{1}{2i\pi}\int_w e^z \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+2n}{n} \left(\frac{x}{z}\right)^{a+2n} \frac{dz}{z}.$$

Da

$$e^{-a\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a+2n}{n} (2\cosh\theta)^{-a-2n-1} \cdot 2\sinh\theta,$$

so lange als $\cosh\theta$ absolut grösser als 1 ist (d. h., wenn $\theta = \varepsilon + i\zeta$, ε, ζ reell, so lange als $\sinh^2\varepsilon > \sin^2\zeta$), so setze man ($x$ als positiv angenommen) $z = 2x\cosh\theta$ und lasse N eine positive sehr grosse Zahl bedeuten. Dann ist

$$S = \frac{1}{2i\pi}\int_{N-i\pi}^{N+i\pi} e^{2x\cosh\theta - a\theta}\, d\theta.$$

Der Integrationsweg soll durchs endliche Gebiet gehen und die Gegend des Horizonts, wo die reelle Componente von $x\cosh\theta$ positiv ist, vermeiden, aber seine Enden sind in den zwei angrenzenden Gegenden des Horizonts, wo jene reelle Componente negativ ist, verschiebbar. Wenn also x durch allmäliges Wachsen seiner Phase von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ in $e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot x$ übergeht, wo das neue x eine positive Zahl bedeutet, die durch

$\frac{y}{2}$ ersetzt werden mag, so geht S in $e^{i\frac{a\pi}{2}}\overset{a}{J}(y)$ über, und man bekommt durch entsprechendes Zurückschieben der Grenzen:

$$\overset{a}{J}(y) = \frac{1}{2i\pi}\int_{N-i\frac{3\pi}{2}}^{N+\frac{i\pi}{2}} e^{2ix\cos\theta - a\left(\theta+\frac{i\pi}{2}\right)}\, d\theta.$$

Führt man nun θ von $N-\frac{3i\pi}{2}$ nach $-\frac{3i\pi}{2}$, von hier nach $\frac{i\pi}{2}$, endlich von hier nach $N+\frac{i\pi}{2}$ und setzt auf der ersten Wegstrecke $\theta = \varphi - \frac{3i\pi}{2}$, auf der zweiten $\theta = i\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)$, auf der dritten $\theta = \varphi + \frac{i\pi}{2}$, so wird das Argument der Exponentialfunction auf der ersten Strecke zu $-y\sin\varphi - a\varphi + ia\pi$, auf der letzten zu $-y\sin\varphi - a\varphi - ia\pi$. Man kann also die betreffenden Integrale zu

$$-\frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^N e^{-y\sin\varphi - a\varphi}\, d\varphi$$

vereinigen. Klappt man auch noch beide Hälften des auf die mittlere Strecke fallenden Integrals zusammen, so hat man

$$\overset{a}{J}(y) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(y\sin\varphi - a\varphi)\, d\varphi - \frac{\sin a\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-y\sin\varphi - a\varphi}\, d\varphi.$$

Bern, 4. Mai 1870.

Notiz über die im vorstehenden Aufsatz angewandte Ausdrucksweise. Wenn die complexe Variable x gleich

$$r\, e^{i\varphi}$$

gesetzt wird, so heisst r der *absolute Werth* und φ die *Phase* von x. — Wächst die Phase von $x - a$, während a constant bleibt, so heisst die Bewegung der Variable x um a *rechtläufig*, die entgegengesetzte *rückläufig*.

C. N.

Nouvelle démonstration de théorèmes sur des séries de points correspondants sur deux courbes.

Par H. G. Zeuthen à Copenhague.

Dans une correspondance aux *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences à Paris**) j'ai donné — comme introduction à une communication relative à des surfaces dont les points se correspondent un-à-un — une démonstration géométrique**) du théorème de Riemann sur lequel Mr. Clebsch a fondé la division des courbes en *genres*. Par une généralisation de cette même démonstration on peut parvenir à prouver un lemme d'où dérivent, à côté du théorème de Riemann, beaucoup d'autres théorèmes géométriques. Je démontrerai ici ce lemme, et je donnerai des exemples de son application.

Notations. Nous désignons par (C_1) et (C_2) des courbes planes, par m_1, r_1, β_1, p_1 et m_2, r_2, β_2, p_2 leurs ordres, classes, nombres de points cuspidaux et genres, de façon que nous ayons pour chacune des deux courbes

$$r + \beta - 2m = 2(p - 1). \tag{1}$$

Nous supposerons qu'il existe une relation, qui ne contient pas des transcendantes, qui lie les points des deux courbes les uns aux autres, de façon qu'à chaque point P_2 de (C_2) correspondent x_1 points P_1 de (C_1) et à chaque point P_1 de (C_1) x_2 points P_2 de (C_2). Nous désignerons par y_1 et y_2 les nombres des coïncidences de deux points qui, respectivement sur (C_1) et (C_2), correspondent à un même point de l'autre courbe***). Toutefois nous ne comprenons aux nombres y_1 et y_2 celui des couples de points P_1 et P_2 qui se correspondent ainsi,

---

*) Tome LII page 742.

**) Après la publication de cette démonstration j'ai appris, que Mr. E. Bertini, professeur au Lycée Parini à Milan a appliqué *antérieurement* le même procédé, à peu près, à la démonstration du théorème de Riemann. *Giornale di Matematiche* ad Uso degli Studenti Vol. VII. p. 105—106.

***) On ne regarde pas ici comme coïncidents les deux points d'une courbe qui se trouvent à un même point double.

qu'*en même temps* deux points correspondants à P_1 coïncident à P_2 et, réciproquement, deux points correspondants à P_2 coïncident à P_1. Nous désignons séparément le nombre de ces couples par z. Nous attribuerons enfin aux deux courbes β' couples de points cuspidaux qui se correspondent.

Nous aurons à étudier une courbe (D), lieu des points d'intersection des droites $A_1 P_1$ et $A_2 P_2$ qui joignent deux points fixes du plan A_1 et A_2 à deux points correspondants P_1 et P_2.

Détermination de l'ordre de la courbe (D). Désignons par G_1 et G_2 les points où $A_1 P_1$ et $A_2 P_2$ rencontrent une droite arbitraire (L). Une droite $A_1 G_1$ rencontre la courbe (C_1) à m_1 points P_1, à chacun desquels correspondent x_2 points P_2. Par conséquent, à chaque point G_1 correspondent $m_1 x_2$ points G_2. De même, à chaque point G_2 correspondent $m_2 x_1$ points G_1. Il y aura donc $m_1 x_2 + m_2 x_1$ coïncidences de points correspondants G_1 et G_2. Celles-ci ont lieu aux points d'intersection de la droite (L) avec (D), et cette courbe sera donc de l'ordre $m_1 x_2 + m_2 x_1$.

Seconde détermination du même ordre. On voit qu'à chaque droite par A_1 correspondent $m_1 x_2$ droites par A_2. Elle rencontre la courbe (D) aux $m_1 x_2$ points d'intersection avec ces droites et à un nombre de points qui coïncident à A_1. L'ordre de la multiplicité de ce point sur la courbe (D) sera indiqué par le nombre des tangentes au même point. Celles-ci seront les $m_2 x_1$ droites du faisceau A_1 qui correspondent à la droite $A_2 A_1$ du faisceau A_2. On voit donc, que la droite par A_1 rencontre (D) à $m_1 x_2 + m_2 x_1$ points. — Cette seconde déduction nous montre en même temps, que *la courbe* (D) *a à* A_1 *un point multiple de l'ordre* $m_2 x_1$; de même, *elle a à* A_2 *un point multiple de l'ordre* $m_1 x_2$.

Détermination de la classe de la courbe (D). Une droite $A_1 P_1$ sera tangente à la courbe (D), lorsque deux des droites correspondantes coïncident à une seule $A_2 P_2$, *sans qu'*en même temps deux des droites qui correspondent à $A_2 P_2$ coïncident en $A_1 P_1$. Dans ce dernier cas le point d'intersection de $A_1 P_1$ avec $A_2 P_2$ serait un point double ou cuspidal de (D). On verra donc

1°. qu'une tangente de A_1 à la courbe (C_1) sera tangente à (D) à tous les x_2 points où elle rencontre les droites qui joignent A_2 aux x_2 points correspondants à son point de contact avec (C_1);

2°. qu'une droite qui joint A_1 à un point cuspidal de (C_1) sera tangente à (D) à tous ses points de rencontre avec les droites qui joignent A_2 aux points correspondants au point cuspidal de (C_1), à *moins* que ces points ne soient au nombre des β' points qui sont eux-mêmes cuspidaux;

3°. qu'une droite joignant A_1 à un des y_2 points de (C_1) auxquels correspondent deux points coïncidents de (C_2) sera une tangente simple de (D).

Le nombre des tangentes trouvées ainsi, qui sont les *seules* *) qui partent de A_1 et ont des points de contact différents de A_1, sera

$$r_1 x_2 + (\beta_1 x_2 - \beta') + y_2 .$$

En y ajoutant le double du nombre $m_2 x_1$ des tangentes à ce point multiple, on trouve que la classe de la courbe (D) sera

$$r_1 x_2 + \beta_1 x_2 - \beta' + y_2 + 2 m_2 x_1 .$$

En cherchant le nombre des tangentes qui partent du point A_2, on trouve pour la même classe la valeur suivante

$$r_2 x_1 + \beta_2 x_1 - \beta' + y_1 + 2 m_1 x_2 .$$

Les deux résultats, que nous avons trouvés, devant être égaux on aura la formule suivante

$$r_1 x_2 + \beta_1 x_2 + y_2 + 2 m_2 x_1 = r_2 x_1 + \beta_2 x_1 + y_1 + 2 m_1 x_2 ,$$

ou bien, en réduisant au moyen de l'équation (1)

$$y_1 - y_2 = 2 x_2 (p_1 - 1) - 2 x_1 (p_2 - 1) . \tag{2}$$

C'est cette formule qui nous servira de *lemme* à la démonstration de plusieurs théorèmes.

Note. La formule (2) se déduit presque immédiatement du théorème au moyen duquel Mr. Cayley a étendu le principe de correspondance à une courbe quelconque **). En effet, on trouvera au moyen de ce théorème

$$y_1 + 2 z = 2 x_2 (x_1 - 1) + 2 x_2 p_1 ,$$
$$y_2 + 2 z = 2 x_1 (x_2 - 1) + 2 x_1 p_2 .$$

Ces deux équations ne donnent pas seulement l'équation (2), mais fournissent aussi, dans les cas où l'on sait trouver z, le moyen de déterminer séparément les valeurs de y_1 et y_2 au lieu de leur différence. Néanmoins, je n'en ferai pas usage ici, ayant pour but de montrer la portée des considérations géométriques simples que je viens d'exposer, et ne connaissant aucune démonstration simple et complète du théorème de Mr. Cayley ***).

*) On s'assure, de la manière déjà indiquée, que toute autre droite $A_1 P_1$ à laquelle correspondent deux droites coïncidentes passe par un point double ou cuspidal de (D). — Le nombre des points cuspidaux sera, en général, $z + \beta'$. Ce nombre peut s'augmenter aux frais de la classe, sans que la formule (2), que nous allons déduire, soit altérée. On en aura un exemple dans le cas où, pour une des deux courbes, une des y coïncidences a lieu à un des β points cuspidaux. (Voir les applications 3 et 6.)

**) Phil. Transactions 1868 page 146.

***) J'ai essayé en vain d'en fonder une sur la formule (2) et sur les procédés qui y ont conduit.

Applications de la formule (2).

I. Lorsque les points des deux courbes se correspondent un-à-un, on a $x_1 = x_2 = 1$ et $y_1 = y_2 = 0$. On trouve par conséquent $p_1 = p_2$. *Les courbes sont donc du même genre* (Théorème de Riemann). — Lorsque les points de l'une des courbes correspondent par groupes aux points de l'autre (chaque groupe à un point, et réciproquement), on a $x_2 = 1$, $y_2 = 0$, et par conséquent

$$y_1 = 2\,(p_1 - 1) - 2\,x_1\,(p_2 - 1)\,.$$

II. On peut au moyen de la formule (2) trouver *le genre p_3 de l'enveloppe (C_3) des droites qui joignent les points correspondants des deux séries* sur les courbes (C_1) et (C_2). Les points de cette enveloppe correspondent à ceux de la courbe (C_1) [ou (C_2)]. En gardant les notations x_1, y_1, x_2, y_2 et z pour la correspondance des points de (C_1) et (C_2), et en désignant par ξ_1, ξ_3, η_1, η_3, ζ les nombres qui indiquent la correspondance de points de (C_1) et (C_3), on a

$$\xi_1 = 1\ ,\ \xi_3 = x_2\ ,\ \eta_1 = 0\ ,\ \eta_3 = y_2 + z\ ,\ (\text{et } \zeta = 0)\,,$$

d'où

$$2\,(p_3 - 1) = y_2 + z + 2\,x_2\,(p_1 - 1)\ \{\text{ou} = y_1 + z + 2\,x_1\,(p_2 - 1)\}$$

Si $x_2 = 1$, on trouve, conformément au théorème de Riemann, $p_3 = p_1$.

III. Supposons maintenant, que les deux séries correspondantes soient déterminés par les intersections des deux courbes avec les courbes d'un système (μ, ν), c'est à dire d'un système de courbes où il y a μ qui passent par un point quelconque du plan, ν qui sont tangentes à une droite quelconque. Alors, les y_1 coïncidences auront lieu en deux cas différents: 1°. lorsqu'une courbe du système est tangente à la courbe (C_1) ou passe par un de ses points cuspidaux, et 2°., lorsque deux des courbes du système qui passent par un même point de (C_2) coïncident. Dans le premier cas, les deux points coïncidents correspondent à tous les points où la courbe du système rencontre (C_2), et dans le second, le point de (C_2) a des points correspondants coïncidents à tous les points où les courbes coïncidentes rencontrent (C_1). Le nombre y_2 étant composé d'une manière analogue, on aura — en désignant par n l'ordre d'une courbe du système, par t le nombre des courbes du système qui sont tangentes à (C_1) et par m' l'ordre de l'enveloppe des courbes du système, et en supposant que (C_2) soit une droite —

$$p_2 = 0\ ,\ x_1 = \mu\,.\,n\,m_1\ ,\ x_2 = \mu\,.\,n$$

$$y_1 = t\,n + \beta_1\,\mu\,n + m'\,n\,m_1\ ,\qquad y_2 = \nu\,n\,m_1 + m'\,m_1\,n.$$

La substitution de ces valeurs dans la formule (2) donne la formule suivante, due à Mr. Chasles*),

$$[t = \mu\ r_1 + \nu\ m_1 .$$

Nous n'avons pas eu égard, dans cette démonstration, aux systèmes dont toutes les courbes ont des points doubles ou cuspidaux, mais on voit sans difficulté, que ces singularités ne feront qu'introduire à y_1 et y_2 des termes égaux qui se détruiront.

IV. Dans l'exemple précédent [III. application de (2)] les deux termes qui dépendaient de m' se détruisaient. La même chose n'aura pas lieu dans les cas où toutes les courbes du système ont déjà des contacts avec la courbe fixe (C_1), et il sera donc au moins difficile de trouver, au moyen de notre procédé, les nombres des courbes qui ont des contacts multiples ou d'un ordre supérieur avec des courbes données. Mais comme on sait déjà déterminer — grâce à la formule de Mr. de Jonquières**), générale jusqu'aux limites indiquées par son auteur — beaucoup de ces nombres, notre procédé peut servir à déterminer l'ordre m' de l'enveloppe des courbes d'un système. Nous nous contenterons ici de faire cette recherche dans le cas le plus simple, et sans doute le plus important, en cherchant *l'ordre m' de l'enveloppe (C') des courbes de l'ordre n qui passent par $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ points fixes et qui sont tangentes à une courbe fixe (C_1).*

A cet effet, nous appliquerons la formule (2) aux séries suivantes: 1°. celle des points de contact des courbes du système avec (C_1), et 2°. celle de leurs points d'intersection avec une droite fixe. Alors on a

$$x = \mu\ ,\quad x_2 = n\ ,\quad y_2 = \nu\ ,\quad p_2 = 0 .$$

Deux points de contact, correspondant à un même point d'intersection avec la droite, coïncident,

1°. lorsque le dernier point est sur l'une des deux courbes (C_1) et (C'), (qui — à côté des points fixes — composent l'enveloppe complète), et

2°. lorsque la courbe du système est osculatrice à (C_1).

Suivant la formule de Mr. de Jonquières, étendue par Mr. Cayley au cas d'une courbe donnée de points cuspidaux***), le nombre des courbes osculatrices sera

$$3\,(m_1\,n - 2 + 2\,p_1) - 2\,\beta_1 .$$

On aura par conséquent

$$y_1 = m_1 + m' + n\,\{3\,(m_1\,n - 2 + 2\,p_1) - 2\,\beta_1\} .$$

---

*) Compte Rendu de l'Académie des Sciences 15 février 1864 (dans une Note).

**) Crelle: Journal de Mathématiques, tome 66 p. 289—321. Dans le cas d'un système de coniques on peut faire usage de mes formules et de celles de Mr. Cayley (Nouvelles Annales et Comptes Rendus 1866).

***) Phil. Transactions 1868 page 110.

Nous avons encore à nous rappeler, que le théorème de Mr. de Jonquières donne *pour le système actuel* $\nu = 2(n-1)\mu$. La même chose ayant lieu pour un système de courbes qui passent par $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ points fixes (un faisceau, où la caractéristique $\mu = 1$), on aura, suivant le théorème de Chasles que nous venons de prouver:

$$\mu = r_1 + 2(n-1)m_1 .$$

En faisant toutes ces substitions on trouve au moyen de l'équation (2):

$$m' = m_1(n^2 - 1).$$

On aurait trouvé le même résultat en appliquant l'équation (2) aux séries des points *d'intersection* des courbes du système avec la courbe (C_1) et avec une droite quelconque*).

Note. Au premier abord il m'a semblé étonnant, que m' ne devient pas zéro pour $n = 2$, quoique l'enveloppe cherchée ne soit le lieu que de ceux d'entre les points d'intersection de deux courbes consécutives qui sont différents des points fixes et du point de contact avec (C_1), et que le nombre de ces derniers points soit *quatre* pour un système de coniques. Ce fait n'est pourtant pas difficile à expliquer.

En effet, bien que deux coniques propres, qui ne coïncident**) pas, n'aient que quatre points communs, deux coniques composées de droites en auront une infinité dans le cas où une même droite fait partie de toutes les deux coniques. Voilà ce qui aura lieu pour certaines coniques consécutives du système actuel. Une conique composée de la droite passant par deux des points fixes et de celle qui en joint le troisième à un point d'intersection de la première droite avec la courbe, compte ainsi pour 2 ou 1 au nombre μ des coniques passant par un de ses points, suivant qu' on prenne ce point sur l'une ou sur l'autre des droites dont elle est composée. L'enveloppe trouvée sera donc composée de trois droites m_1-tuples dont chacune passe par deux des trois points fixes.

Lorsque $n > 2$, on voit sans difficulté, que le système ne contient, en général, aucune courbe composée***). Par conséquent, tout point de l'enveloppe sera un point d'intersection de deux courbes consécutives du système. Celles-ci se rencontrent déjà aux $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ points fixes et au point de contact avec (C_1). Comme les points d'intersection

*) Alors il est à remarquer qu'au nombre des points où l'enveloppe cherchée rencontre (C_1) se trouvent aussi les $3(n-1)m_1$ courbes du réseau, déterminé par les $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ points fixes, qui ont des points doubles sur (C_1).

**) Comme chaque point de contact pris sur (C_1) ne donne qu'une seule courbe du système, il ne sera que les courbes osculatrices à (C_1) qui coïncident *entièrement* avec les courbes consécutives ou qui sont *stationnaires* dans le système.

***) Voir le mémoire déjà cité de Mr. de Jonquières.

de deux courbes de l'ordre n sont entièrement déterminées, lorsqu'on en connaît $\frac{n(n+3)}{2} - 1$, l'enveloppe trouvée (C') devient le *lieu des* $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *points qui avec* $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ *points fixes et un point qui se meut sur une courbe* (C_1) *font la base d'un faisceau variable* de l'ordre n. L'ordre de ce lieu étant $m_1(n^2-1)$, on voit, qu'il existe $m_1 m_2(n^2-1)$ faisceaux de l'ordre n qui ont pour points-base $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ points donnés et deux autres points qui se trouvent sur deux courbes données des ordres m_1 et m_2.

V. Nous appliquerons encore la formule (2) à la recherche du *nombre des branches de la courbe* (C'), trouvée dans l'exemple précédent, *qui passent par chacun des* $\frac{n(n+3)}{2} - 2$ *points fixes.*

Regardons, à cet effet, les séries suivantes: 1°. des tangentes des courbes du système à un des points fixes (ou bien, la série des points d'intersection de ces tangentes avec une droite fixe quelconque) et 2°. des points où les courbes rencontrent une droite fixe. Alors, on aura, en désignant par k le nombre cherché,

$$x_1 = \mu \quad , \quad x_2 = \mu \cdot n \quad , \quad y_1 = m_1 + m' \quad , \quad y_2 = \nu + k \cdot n,$$

d'où $$k = m_1 \cdot n.$$

VI. Comme les points d'une courbe gauche correspondent un-à-un à ceux de sa projection sur un plan, la formule (2) sera aussi applicable à des séries de points sur des courbes gauches. Nous en donnerons ici un exemple. Soit (C_1) une section plane d'une surface gauche (G), et (C_2) la courbe où la même surface rencontre une surface donnée (S) de l'ordre n, et prenons pour correspondants les points de ces courbes qui sont sur une même génératrice de la surface gauche. Alors

$$x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = n \quad , \quad y_1 = 0,$$

et y_2 sera composé du *nombre* ν *des génératrices de* (G) *qui sont tangentes à* (S) et de celui des génératrices qui rencontrent son arête cuspidale. En désignant l'ordre de cette courbe par c, on trouve pour le nombre ν l'expression suivante

$$\nu = 2(p_2 - 1) - 2n(p_1 - 1) - c \cdot m_1$$

où les genres p_1 et p_2 dépendent des singularités des deux surfaces (G) et (S).

Plusieurs des résultats que j'ai donnés dans un mémoire sur les singularités ordinaires d'une courbe gauche*) pourraient aussi être déduits au moyen de notre formule (2). —

*) Annali di Matematica Serie II, Tomo III. pag. 175—217.

Notiz über zwei in der Wärmetheorie auftretende bestimmte Integrale.

Von G. F. Meyer in Memmingen.

Die Werthe der für die Wärmetheorie sehr wichtigen Integrale

$$(1) \qquad u = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}} \cos\alpha\sqrt{2}\,,$$

$$(2) \qquad v = \int_0^\infty e^{-x^2} \sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}} \sin\alpha\sqrt{2}\,,$$

bestimmte Dirichlet in höchst sinnreicher Weise auf dem Wege, welcher in den von Hattendorff herausgegebenen Vorlesungen Riemann's über partielle Differentialgleichungen, Seite 134—136 vollständig wiederholt ist. Vielleicht ist auch folgende Notiz über diese Integrale nicht ohne Interesse.

Die beiden Integrale u und v will ich in der kürzern Form

$$s = u - vi = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2} i}\, dx$$

schreiben; alsdann folgt durch Differentiation nach α

$$\frac{ds}{d\alpha} = -2i \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2} i} \frac{\alpha}{x^2}\, dx\,,$$

mithin durch Einführung der neuen Variabeln $x_1 = \frac{\alpha}{x}$

$$\frac{ds}{d\alpha} = -2i \int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{x_1^2} - x_1^2 i}\, dx_1\,.$$

Wird aber nochmals nach α derivirt, so entspringt

$$\frac{d^2s}{d\alpha^2} = 4\alpha i \int_0^\infty e^{-x^2 i - \frac{\alpha^2}{x^2}} \frac{dx}{x^2} = 4i \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2} i}\, dx\,,$$

d. i.

$$\frac{d^2 s}{d\alpha^2} = 4 i s .$$

Hieraus fliesst weiter

$$s = c_1 e^{2\alpha\sqrt{i}} + c_2 e^{-2\alpha\sqrt{i}},$$

und beachtet man nun, dass $s = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2} i}\, dx$ mit α nicht unbegrenzt wachsen kann, so muss offenbar die willkürliche Constante c_1 den Werth Null besitzen. Für $\alpha = 0$ aber ist $s = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ und daher auch $c_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Das Integral s ist sonach gleichbedeutend mit dem Ausdrucke

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2\alpha\sqrt{i}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}(1 \pm i)},$$

und demnach hat man

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}} \cos \alpha\sqrt{2},$$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right) dx = \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha\sqrt{2}} \sin \alpha\sqrt{2} .$$

Um über das Vorzeichen des letzten Integrales Auskunft zu gewinnen, braucht man nur zu beachten, dass durch eine zweimalige Differentiation des Cosinusintegrales nach α das Sinusintegral sich ergiebt, die zweite Derivirte von $e^{-\alpha\sqrt{2}} \cos \alpha\sqrt{2}$ aber mit dem Pluszeichen behaftet ist. Mithin kann in der letztern Gleichung nur das obere Zeichen gelten.

Will man durchweg die Werthermittlung der beiden Integrale u und v nicht von der Integration einer Differentialgleichung abhängig machen, so kann man — freilich viel weitläufiger — folgendes Verfahren benutzen.

Mittelst der Laplace'schen Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos c\theta\, d\theta}{l^2 + \theta^2} = \frac{\pi}{l}\, e^{-lc}\ ,\ c > 0,\ l > 0;$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\theta \sin c\theta\, d\theta}{l^2 + \theta^2} = \pi\, e^{-lc}\ ,\ c > 0,\ l > 0,$$

beweist man leicht, dass

$$\int_0^\infty \frac{x \sin 2\alpha x}{x^4 + 1}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-\alpha\sqrt{2}} \sin \alpha\sqrt{2}$$

ist. Man braucht zu dem Behufe nur den Bruch $\frac{x}{x^4+1}$ in Partialbrüche zu zerfällen und bei der Behandlung der erzeugten vier Theilintegrale das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{c\theta i}\, d\theta}{l+\theta i} = \begin{cases} 0, & c<0 \\ 2\pi e^{-lc}, & c>0, \end{cases}$$

welches, wie man sieht, eine Combination der Laplace'schen Integrale und der evidenten Gleichung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{l \sin c\theta - \theta \cos c\theta}{l^2+\theta^2}\, d\theta = 0$ ist, fortwährend im Auge zu behalten.

Berücksichtigt man anderseits die für ein ganzes a bloss durch theilweise Integration zu begründende Formel Euler's

$$\int_0^{\infty} e^{-zx^2} \sin \theta x \,.\, x^{a-1}\, dx = \frac{\Gamma(a)}{(z^2+\theta^2)^{a/2}} \sin a\psi, \quad \left(\psi = \operatorname{arctg} \frac{\theta}{z},\ z>0\right),$$

so folgt sogleich die Beziehung:

$$\frac{1}{x^4+1} = \int_0^{\infty} e^{-zx^2} \sin z\, dz\,.$$

Mithin entspringt nunmehr die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x \sin 2\alpha x\, dx}{x^4+1} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x \sin 2\alpha x\, dx \int_0^{\infty} e^{-x^2 z} \sin z\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \sin z\, dz \int_0^{\infty} e^{-zx^2}\, x \sin 2\alpha x\, dx\,.$$

Aus der bekannten Relation

$$\int_0^{\infty} e^{-zx^2} \cos 2\alpha x\, dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{z}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{z}},$$

aber folgt durch Derivation nach α:

$$\int_0^{\infty} e^{-zx^2}\, x \sin 2\alpha x\, dx = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{z}}\, e^{-\frac{\alpha^2}{z}} \cdot \frac{\alpha}{2}\,.$$

Daher die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x \sin 2\alpha x\, dx}{x^4+1} = \frac{\alpha}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\alpha^2}{z}} \frac{\sin z}{z\sqrt{z}}\, dz\,,$$

und hieraus folgt, wenn $\frac{\alpha}{\sqrt{z}} = x$ gesetzt wird,

$$\frac{\alpha}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{z}}\frac{\sin z}{z\sqrt{z}}\,dz=\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx,$$

also ist, wie vorhin,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\sin\left(\frac{\alpha^2}{x^2}\right)dx=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\sin\alpha\sqrt{2}\,.$$

Das Cosinusintegral, welches man auf demselben Wege aus dem Integrale

$$\int_0^\infty\frac{x^3\sin 2\alpha x}{1+x^4}\,dx=\frac{\pi}{2}\,e^{-\alpha\sqrt{2}}\cos\alpha\sqrt{2}$$

ableiten könnte, ergiebt sich am einfachsten durch zweimalige Differentiation des Integrals v nach α.

Ueber Flächen, welche Schaaren rationaler Curven besitzen.

Von MAX NOETHER in HEIDELBERG.

In der Flächentheorie concentrirt sich das Hauptinteresse, sowohl von geometrischem als algebraischem Gesichtspunkte aus, auf das Studium der Curven und Curvenschaaren, welche auf einer Fläche liegen können, da ihre Kenntniss einerseits den geometrischen Zusammenhang der Fläche mit andern Gebilden liefert und andrerseits zur Untersuchung der Art der Irrationalität, welche mit der Flächengleichung verbunden ist, nothwendig ist. Indem ich hauptsächlich von letzterem Gesichtspunkt ausgehe, werde ich in dieser Abhandlung solche Flächen einer Betrachtung unterziehen, aus welchen ein Flächenbüschel eine Schaar rationaler Curven, nämlich Curven, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen lassen, so ausschneidet, dass jede Fläche des Büschels die gegebene Fläche in mehreren beweglichen Curven schneiden kann. Die allgemeinen Flächen dieser Art werde ich durch eindeutige Transformationen auf speciellere Flächenfamilien zurückführen, welche sich übersichtlicher behandeln und sich übrigens selbst noch weiter reduciren lassen; insbesondere werde ich mich aber mit solchen Flächen beschäftigen, welche von jeder Fläche des Büschels in *einer* beweglichen rationalen Curve geschnitten werden, und von ihnen das Haupttheorem beweisen, dass ihre Coordinaten sich immer *rational* durch zwei Parameter ausdrücken lassen, und zwar so, dass man diese Parameter auch umgekehrt als rationale Functionen der Coordinaten der Fläche darstellen kann, so dass hiedurch ein Punkt für Punkt *eindeutiges* Entsprechen zwischen der Fläche und einer Ebene hergestellt ist. Der Gang des Beweises wird so genommen werden, dass er zugleich auch diese in zwei Parametern rationale Darstellung der Coordinaten der Fläche selbst liefert. Daher wird es dann möglich sein, die Geometrie dieser Art von Flächen aus der Geometrie der Ebene vollständig zu entwickeln, in welchem Punkte sich die Abhandlung somit an die

Arbeiten*) des Herrn Clebsch reiht, in denen an einer Reihe von Flächen, der allgemeinen Flächen 3^{ter} Ordnung und specielleren Flächen 4^{ter} und 5^{ter} Ordnung, die Abbildung auf einer Ebene gezeigt ist. Als ein Beispiel der Anwendung der vorgelegten Methode der Abbildung behandle ich näher eine merkwürdige Fläche 6^{ter} Ordnung, welche eine Doppelgerade und eine diese nicht schneidende doppelte Raumcurve 3^{ter} Ordnung enthält.

Diese Arbeit ist zugleich dazu bestimmt, einige Punkte, welche ich in einer, in den Göttinger Nachrichten, Jahrg. 1869, Nr. 15 enthaltenen Note über algebraische Functionen angeregt habe, zu erledigen. Den Gang eines Theils der hier folgenden Untersuchungen habe ich schon ib. Jahrg. 1870, Nr. 1 kurz angedeutet.

§ 1.

Abbildbare Flächen und ebene Systeme.

Wenn eine Fläche auf einer Kegelfläche (speciell einer Ebene) eindeutig abbildbar ist, so muss sie, entsprechend der Schaar der Erzeugenden der Kegelfläche, eine einfach unendliche Schaar von rationalen Curven besitzen, welche ein Flächenbüschel, jede Fläche im Allgemeinen mehrere bewegliche Curven, ausschneidet. Eine solche Fläche kann dann, ohne dass sie auf einer Ebene abbildbar ist, keine weitere rationale Curve mehr besitzen; denn einer solchen würde auch auf der Kegelfläche eine, von einer Erzeugenden derselben verschiedene, rationale Curve entsprechen, d. h. der Kegel wäre über einer rationalen Curve beschrieben und könnte folglich auf einer Ebene abgebildet werden.

Wenn umgekehrt auf einer Fläche F eine von einem Flächenbüschel, dessen Parameter λ sei, ausgeschnittene Schaar Σ von rationalen Curven bekannt ist, so sieht man sofort, dass man die Abbildung von F auf einer Kegelfläche wirklich leisten kann, sobald man auf jeder Curve der Schaar Σ so viel Punkte eindeutig kennt, als erforderlich sind, um die Coordinaten dieser Curve rational durch einen Parameter ϱ ausdrücken zu können. Denn eine Curve von Σ ist durch eine algebraische Function von λ, also durch die Werthe zweier Parameter λ, μ, zwischen welchen eine algebraische Gleichung $f(\lambda,\mu)=0$ besteht, bestimmt; die Coordinaten der Fläche werden daher dann rationale Functionen des Parameters ϱ, während die Coefficienten dieser

*) S. besonders Crelle's Journal, Bd. 65 u. 68; Math. Annalen, Bd. 1; Abhandlungen der Göttinger Societät, 1870, Band 15.

Functionen sich als rationale Functionen von λ und μ darstellen, welche durch eine Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ mit einander verbunden sind. Diese Gleichung lässt sich als die einer Kegelfläche auffassen, welche über der Curve $f(\lambda, \mu) = 0$ beschrieben ist, wobei der Parameter ϱ die Punkte jeder Erzeugenden bestimmt. Und da durch jeden Punkt der Fläche im Allgemeinen nur eine Curve der Schaar geht, und da wir weiter vorausgesetzt haben, dass man, wenn eine solche Curve durch die Werthe von λ und μ fixirt ist, keine weitere Gleichung mehr aufzulösen hat, um die Coordinaten dieser Curve rational durch ϱ ausdrücken zu können, so ergeben sich auch umgekehrt die Coordinaten λ, μ, ϱ der Kegelfläche als rationale Functionen der Coordinaten der Fläche F.

Anders verhielte es sich, wenn es nicht möglich wäre, auf jeder Curve von Σ genau so viel Punkte anzugeben, als erforderlich und hinreichend sind, um die Coordinaten der Curve als rationale Functionen eines Parameters ϱ darzustellen. In diesem Falle wäre man also genöthigt, auf jeder Curve unter den bekannten Punkten eine hinreichende Zahl für die Basispunkte *auszuwählen*, wodurch eine weitere Irrationalität in die Darstellung der Coordinaten von F einginge. Dabei wäre es nun wohl noch möglich, die Coordinaten von F eindeutig durch die Coordinaten einer Kegelfläche auszudrücken, aber die Umkehrung dieser Darstellung könnte nicht mehr auf rationale Functionen führen.

Unter den Punkten jeder Curve der Schaar Σ kann man immer ihre vielfachen Punkte als bekannt annehmen. Wenn die Curve eine Raumcurve ist, so werden an die Stelle eines Theils dieser Punkte die scheinbaren Doppelpunkte, auf einen beliebigen Punkt des Raums bezogen, treten. Die übrigen einfachen Punkte der Curve, welche nothwendig sind, um dieselbe einer Geraden eindeutig entsprechen lassen zu können, werden im Allgemeinen nur dadurch festzulegen sein, *dass man eine auf der Fläche F liegende Curve aufsucht, welche jede Curve der Schaar in der erforderlichen Anzahl von Punkten schneidet.* Die Theorie der Abbildung der Flächen der betrachteten Art ist somit darauf zurückgeführt, solche Curven der Fläche aufzusuchen.

Dass dieser Gang auch bei den bisher bekannten Abbildungen von Flächen auf Ebenen eingeschlagen worden ist, lehrt ein Blick auf dieselben. Ich nehme als Beispiel die Fläche 4^{ter} Ordnung mit einer Doppelgeraden. Ein Büschel von Ebenen, dessen Achse die Doppelgerade ist, schneidet in einer Schaar von Kegelschnitten. Nun hat Herr Clebsch nachgewiesen (s. Math. Ann. Bd. I pag. 260), dass eine endliche Anzahl von Kegelschnitten auf der Fläche liegt, welche jedes Glied der Schaar in je einem Punkte schneiden. Nimmt man also einen beliebigen dieser Kegelschnitte heraus, so ist hiedurch auf jedem Kegelschnitt der Schaar je *ein* Punkt eindeutig bestimmt, und es wird

möglich, durch einen Geradenbüschel, der in diesem Punkte seinen Scheitel hat, den betreffenden Kegelschnitt der Schaar als Gerade auf eine Ebene zu projiciren, was hier gleichbedeutend mit einer eindeutigen Abbildung ist.

Ich werde die Fragen, welche sich hier in Betreff der Abbildung der rationalen Curven auf Geraden aufgeworfen haben, in dem nächsten § beantworten. Für die auf höheren Kegelflächen abzubildenden Flächen ist die Schaar rationaler Curven eine gegebene; dagegen liegen auf den auf Ebenen abzubildenden Flächen unzählig viele Schaaren solcher Curven. Dass man aber hier von irgend einer einfach unendlichen der Schaaren ausgehen kann, beweist man auf folgende Weise durch die Untersuchung der ebenen Systeme, deren gegenseitige Ueberführung sich auf eine diesen eigenthümliche Art behandeln lässt.

Wenn eine Fläche auf einer Ebene eindeutig abbildbar ist, so entspricht bei einer gegebenen Abbildung irgend einer rationalen, einfach unendlichen Curvenschaar der Fläche, welche von einem Flächenbüschel ausgeschnitten wird, ein Büschel rationaler Curven auf der Ebene. Es ist daher gezeigt, dass man die Abbildung immer so einrichten kann, dass der Curvenschaar der Fläche ein *Geradenbüschel* der Ebene entspricht, sobald nachgewiesen ist, dass man durch eine Cremona'sche Transformation, durch welche zwei ebene Systeme in einander übergeführt werden, einem beliebigen Büschel rationaler Curven einer Ebene einen Geradenbüschel der zweiten Ebene entsprechen lassen kann.

Auf der Ebene E sei ein Büschel rationaler Curven n^{ter} Ordnung gegeben, dessen gemeinschaftliche Basispunkte α_i i fache Punkte $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, nämlich α_1 einfache, α_2 Doppelpunkte etc. seien. Die beiden Annahmen, des Büschels und des Rationalen, geben die zwei Beziehungen:

$$(1) \qquad \frac{n \cdot n+3}{2} - 1 = \sum_1^{n-1} \frac{i \cdot i+1}{2} \alpha_i ,$$

$$(2) \qquad \frac{n-1 \cdot n-2}{2} = \sum_1^{n-1} \frac{i \cdot i-1}{2} \alpha_i ,$$

aus welchen sogleich die weiteren folgen:

$$(3) \qquad n^2 = \sum_1^{n-1} i^2 \alpha_i ,$$

$$(4) \qquad 3n - 2 = \sum_1^{n-1} i \alpha_i .$$

Gleichung (3) sagt aus, dass die Curven des Büschels ausser den angenommenen Basispunkten sich nicht mehr schneiden.

Nach Herrn Cremona reichen diese Bedingungen, im Falle der Curvenbüschel durch Zufügung eines weitern einfachen Basispunktes zu den Basispunkten einer zweifach unendlichen Schaar von rationalen Curven aus dieser entstanden ist, hin, um die Ebene E so auf einer Ebene E' abbilden zu können, dass dem Curvenbüschel auf E ein Geradenbüschel auf E' entspricht. In der That braucht man nur diese zweifach unendliche Schaar von Curven n^{ter} Ordnung, bei der ein einfacher Basispunkt des Büschels fortgefallen ist, als Transformationscurven zu benutzen, um die gesuchte Ueberführung zu erhalten.

Indess braucht unter den Basispunkten des Curvenbüschels nicht nothwendig ein einfacher Basispunkt enthalten zu sein; dann aber giebt es keine Transformation n^{ter} Ordnung mehr, durch welche die Ueberführung in einen Geradenbüschel zu bewerkstelligen wäre. Ich werde daher jetzt einen ganz allgemeinen Weg zeigen, auf dem der Curvenbüschel immer in einen Geradenbüschel übergeführt werden kann, und hiezu einen Satz beweisen, der mehrfacher Anwendung fähig ist:

Ein Büschel rationaler Curven n^{ter} Ordnung auf einer Ebene kann immer durch eine Transformation zweiter Ordnung auf einen Büschel von niedrigerer als der n^{ten} Ordnung gebracht werden.

Die Transformation 2^{ter} Ordnung besteht darin, dass man auf der Ebene E des Curvenbüschels eine zweifach unendliche Schaar von Kegelschnitten mit drei gemeinschaftlichen festen Grundpunkten annimmt, und dieser Schaar die zweifach unendliche Geradenschaar einer Ebene E' eindeutig entsprechen lässt. Legt man nun diese 3 Fundamentalpunkte der Transformation resp. in einen m_1, m_2, m_3 fachen Basispunkt des Büschels rationaler Curven n^{ter} Ordnung der Ebene E, so entspricht diesem Büschel auf der Ebene E' eindeutig Punkt für Punkt ein Büschel rationaler Curven der Ordnung

$$2n - m_1 - m_2 - m_3 ,$$

mit einem $(n - m_2 - m_3)$, einem $(n - m_3 - m_1)$ und einem $(n - m_1 - m_2)$ fachen Basispunkte an Stelle der m_1, m_2, m_3 fachen Punkte, während den übrigen Basispunkten bei dem transformirten Büschel wiederum Basispunkte gleicher Ordnung entsprechen. Man kann nun die 3 Fundamentalpunkte des Kegelschnittbündels in die 3 Basispunkte höchster Vielfachheit des Curvenbüschels auf E hineinlegen, und in diesem Fall wird, wie ich jetzt beweisen will, die resultirende Ordnung $2n - m_1 - m_2 - m_3$ immer kleiner als n.

Es sei der höchste Basispunkt ein $(n - m)$ facher, der zweithöchste ein $(m - k)$ facher, also

$$n > m, \qquad n - m \geqq m - k .$$

Wenn nun der dritthöchste Basispunkt nicht niedriger, als ein $(k+1)$ facher Punkt, so ist die resultirende Ordnung des Büschels auf E'

nicht höher als $2n - (n-m) - (m-k) - (k+1) = n-1$. Ich habe daher zu zeigen, dass von den übrigen Basispunkten wenigstens einer ein höherer als ein k facher Punkt sein muss, und werde dies thun, indem ich annehme, dass alle Basispunkte, die beiden höchsten ausgenommen, von der k^{ten} oder niedrigerer Ordnung seien und die Unrichtigkeit dieser Annahme nachweise. Es sei also:

$$m - k \leqq k .$$

Aus Gleichung (2) folgt, dass ausser den beiden höchsten Basispunkten noch

$$\frac{n-1 \,.\, n-2}{2} - \frac{n-m \,.\, n-m-1}{2} - \frac{m-k \,.\, m-k-1}{2}$$

$$= n(m-1) - m(m-k) + 1 - \frac{k \,.\, k+1}{2}$$

Doppelpunkte unter den Basispunkten enthalten sind, welche den vorhandenen k fachen, $(k-1)$ fachen Punkten etc. so äquivalent sind, dass ein i facher Punkt für $\frac{i \,.\, i-1}{2}$ Doppelpunkte zählt. Es seien λ_0 k fache, λ_1 $(k-1)$ fache, ..., λ_{k-2} Doppelpunkte als Basispunkte. Man kann zeigen, dass ihr Beitrag zu

$$\sum_{1}^{n-1} i\,\alpha_i$$

diesen Ausdruck schon $> 3n-2$ macht, so dass dann nach Gleichung (4) den Bedingungen eines Büschels nicht zu genügen ist.

Es wird nämlich ihr Beitrag

$$\sum_{2}^{n-1} i\,\alpha_i = (n-m) + (m-k) + k\,\lambda_0 + (k-1)\,\lambda_1 + \cdots + 2\,\lambda_{k-2} .$$

Dieser Ausdruck wird nun ein Minimum, wenn man λ_0 den grösstmöglichen Werth giebt, welcher die Gleichung (2) befriedigt, da dann die geringste Anzahl Constanten in der Gleichung des Büschels absorbirt, also auch die rechte Seite der Gleichung (1) zu einem Minimum wird. Dieser grösstmögliche Werth ist nach dem Obigen

$$\lambda_0 = \frac{2}{k \,.\, k-1} \cdot \left\{ n(m-1) - m(m-k) + 1 - \frac{k \,.\, k+1}{2} \right\} ,$$

wenn zugleich

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{k-2} = 0$$

gesetzt wird. Wenn daher

$$(5)\quad (n-m) + (m-k) + \frac{2}{k-1} \cdot \left\{ n(m-1) - m(m-k) + 1 - \frac{k \,.\, k+1}{2} \right\} > 3n-2,$$

so ist um so mehr auch der obige Ausdruck

$$\sum_{2}^{n-1} i\,\alpha_i > 3n-2 .$$

Die Ungleichung (5) geht aber über in

$$(m-k)(n-m) > k \,.\, k-1\,,$$

und diese ist wegen $m-k \leqq k$, $n-m > k-1$ erfüllt.

Somit muss die Summe der Ordnungen der 3 höchsten Basispunkte eines Büschels rationaler Curven n^{ter} Ordnung immer $> n$ sein, und der Curvenbüschel kann immer durch eine Transformation 2^{ter} Ordnung, deren 3 Fundamentalpunkte in die 3 höchsten Basispunkte des Büschels fallen, auf einen Büschel von niedrigerer, als der n^{ten} Ordnung reducirt werden. Durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens, also durch eine Reihenfolge von Transformationen zweiter Ordnung, wird daher offenbar der Curvenbüschel als ein Geradenbüschel eindeutig abgebildet.

Wir bezeichnen noch eine weitere interessante Anwendung dieses Satzes, von der wir in der Folge Gebrauch machen werden. Eine zweifach unendliche Schaar rationaler Curven n^{ter} Ordnung der Ebene, die linear von 2 Parametern abhängen, lässt sich durch eine Reihenfolge von Transformationen 2^{ter} Ordnung auf die zweifach unendliche Schaar von Geraden einer Ebene Punkt für Punkt eindeutig beziehen, da hiezu nur erforderlich, dass die linke Seite von Ungleichung (5) $> 3n-3$, was der Fall ist. Mit andern Worten:

Man kann irgend eine Cremona'sche Transformation, die zwei ebene Systeme in einander überführt, durch eine Reihenfolge von Transformationen zweiter Ordnung ersetzen, indem man nur die 3 Fundamentalpunkte einer solchen Transformation jeweils in die höchsten Basispunkte des Systems hineinlegt.

Die Cremona'schen Transformationen sind somit nichts anderes, als Verbindungen von Transformationen 1^{ter} und 2^{ter} Ordnung, die sich für nicht homogene Coordinaten in die Form setzen lassen:

$$s = \frac{\alpha\sigma+\beta\zeta+\gamma}{\alpha''\sigma+\beta''\zeta+\gamma''}, \qquad z = \frac{\alpha'\sigma+\beta'\zeta+\gamma'}{\alpha''\sigma+\beta''\zeta+\gamma''};$$

$$s' = \frac{as+b}{cs+d}, \qquad z' = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}.$$

§ 2.

Das Problem der Abbildung.

Nach den Untersuchungen des § 1. über die Abbildungen von Flächen auf Kegelflächen haben wir die Bedingungen aufzustellen, unter welchen eine rationale Curve, die einer Schaar solcher Curven angehört, eindeutig in eine Gerade übergeführt werden kann. Es genügt dabei, die rationale Curve als eine *ebene* Curve anzunehmen, da man eine Raumcurve einer solchen durch Projection von einem beliebigen Punkte aus eindeutig entsprechen lassen kann.

Ich will gleich den folgenden allgemeineren Satz beweisen:

Man kann irgend eine Curve C von der n^{ten} Ordnung auf die Normalcurve ihres Geschlechts p eindeutig zurückführen; wenn ein fester Punkt P von C eindeutig bekannt ist.

In der That, diese Zurückführung geschieht*), für $p > 2$, durch eine Transformation $(n-3)^{ter}$ Ordnung, wobei die Transformationscurven durch die i fachen Punkte von C $(i-1)$ fach hindurchgehen und ausserdem durch $p-3$ feste Punkte von C hindurchzulegen sind. Nimmt man daher für diese $p-3$ festen Punkte den Punkt P und die $p-4$ Punkte, die diesem auf C unendlich benachbart liegen, d. h. schreibt man den Transformationscurven vor, C im Punkte P $(p-3)$ punktig zu berühren, so hat man eine eindeutige Transformation, bei welcher nur der Punkt P benutzt ist, und durch welche C in die betreffende Normalcurve $(p+1)^{ter}$ Ordnung übergeht.

Aehnlich verfährt man für $p = 2$, 1 oder $p = 0$. Insbesondere legt man, für $p = 0$, in der Ebene der rationalen Curve C einen Büschel von Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung, welche durch jeden i fachen Punkt von C $(i-1)$ fach hindurchgehen und in dem festen Punkt P von C mit dieser Curve eine $(n-3)$ punktige Berührung haben. Diese Bedingungen sind linear und, nach Gleich. (2), § 1., an der Zahl $\frac{n-1 \cdot n-2}{2} + n - 3 = \frac{n \cdot n-1}{2} - 2$. Jede Curve dieses Büschels schneidet C noch in *einem* beweglichen Punkte, wieder nach (2), § 1., so dass sich die Coordinaten der Curve als rationale Functionen des Parameters des Curvenbüschels $(n-2)^{ter}$ Ordnung darstellen. Man hätte auch einen Curvenbüschel $(n-1)^{ter}$ Ordnung benutzen können, so einen Geradenbüschel für die Kegelschnitte.

Diese Bemerkungen erlauben schon, das Problem, welches bei der Abbildung von Flächen auf Kegelflächen zu lösen ist, enger zu begrenzen. Im Falle die Fläche auf einer Ebene abbildbar ist, lässt sich, wie ich nachgewiesen habe, die Abbildung immer so einrichten, dass irgend einer einfach unendlichen Schaar Σ rationaler Curven der Fläche, die von einem Flächenbüschel ausgeschnitten wird, ein Geradenbüschel der Ebene entspricht; und im Falle der Abbildung auf einer Kegelfläche entspricht der Schaar Σ rationaler Curven der Fläche die Schaar der Erzeugenden des Kegels. Da nun dem Scheitelpunkt dieser Geraden der Bildfläche, oder den unzählig vielen Curven der Bildfläche, welche die Geraden derselben in je *einem* Punkte schneiden und welche sämmtlich von gleichem Geschlecht sind, wiederum Curven desselben Geschlechts auf der abzubildenden Fläche entsprechen, Curven, die mit jeder Curve der auf der Fläche liegenden Schaar Σ

*) Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, § 18 ff.

je *einen* Punkt gemein haben, so folgt, indem man aus diesen Curven eine beliebige herauswählt, dass man bei einer abbildbaren Fläche für jede ihrer Schaaren Σ immer auf jeder Curve derselben eindeutig *einen* festen Punkt finden kann, dadurch dass auf der Fläche eine Curve existirt, welche jede Curve der Schaar in *einem* Punkte schneidet.

Umgekehrt habe ich oben nachgewiesen, dass die Kenntniss *eines* Punktes auf jeder Curve einer Schaar Σ genügt, um die Coordinaten jeder dieser Curven rational durch einen Parameter ausdrücken zu können, ohne dass eine weitere Irrationalität in diese Darstellung eingeht, als diejenige, welche die Curve der Schaar bestimmt. Für Flächen, für welche eine Abbildung auf einer Kegelfläche möglich sein soll, stellt sich daher hier die Aufgabe der Abbildung folgendermassen:

Es ist auf der Fläche eine einfach unendliche Schaar rationaler Curven aufzusuchen, welche ein Flächenbüschel, eine Fläche im Allgemeinen mehrere Curven, ausschneidet. Sodann hat man eine Curve C aufzusuchen, welche ganz auf der Fläche liegt und die Curven der Schaar in je einem einfachen Punkte schneidet.

Das Geschlecht dieser Curve C ist sodann das nämliche, wie das einer ebenen Schnittcurve der Kegelfläche, welche der vorliegenden Fläche F entspricht, und bestimmt somit die algebraische Classe, zu welcher die Kegelfläche und die Fläche F gehört, das *Curvengeschlecht* der Fläche F. Wenn C eine rationale Curve, lässt sich die Fläche auf einer Ebene abbilden.

Ich werde aber jetzt zeigen, dass sich das Problem der Abbildung noch viel weiter reduciren lässt. Dies beruht auf einer besondern Eigenschaft der rationalen Curven.

Man kann nämlich einer rationalen Curve n^{ter} Ordnung, *ohne Benutzung irgend eines Punktes derselben* ausser den vielfachen Punkten, eindeutig eine rationale Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung entsprechen lassen. Es sei in der x-Ebene eine rationale Curve n^{ter} Ordnung gegeben, C, mit α_i $i$fachen Punkten $(i = 2, 3, \ldots, n-1)$, so, dass

$$\Sigma \frac{i \,.\, i-1}{2} \cdot \alpha_i = \frac{n-1 \,.\, n-2}{2}.$$

Ich lege in der Ebene dieser Curve C Curven Q von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche durch jeden $i$fachen Punkt der Curve $(i-1)$fach, und ausserdem durch $n-4$ feste, übrigens beliebige Punkte dieser Ebene einfach hindurchgehen. Die Curvenschaar Q genügt dann

$$\Sigma \frac{i-1 \,.\, i}{2} \alpha_i + n - 4 = \frac{n-1 \,.\, n-2}{1.\ 2.} + n - 4$$

Bedingungen und ist somit eine

$$\frac{n-2 \,.\, n+1}{2} - \frac{n-1 \,.\, n-2}{2} - (n-4) = 2$$

fach unendliche Schaar. Aus dieser Schaar nehme ich drei Curven Q_1, Q_2, Q_3 heraus, welche nicht einem Büschel angehören, und transformire die C mittelst der eindeutigen Substitution:

$$\varrho y_1 = Q_1$$
$$\varrho y_2 = Q_2$$
$$\varrho y_3 = Q_3 .$$

Hiebei entspricht der Curve C in der y-Ebene Punkt für Punkt eindeutig eine Curve C', deren Grad gleich der Anzahl der Schnittpunkte von C' mit einer beliebigen Geraden $\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$, also gleich der Anzahl der beweglichen Schnittpunkte von C mit einer Curve der Schaar Q:

$$\alpha_1 Q_1 + \alpha_2 Q_2 + \alpha_3 Q_3 = 0 ,$$

oder gleich

$$n \,.\, n - 2 - \Sigma i \,.\, i - 1 \,.\, \alpha_i = n - 2 .$$

Somit führt eine solche Transformation auf eine rationale Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung.

Wendet man nun das nämliche Verfahren auf die Curve C' von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung an, so wird man auf eine Curve $(n-4)^{\text{ter}}$ Ordnung geführt, welche C' Punkt für Punkt eindeutig entspricht. Durch eine Fortsetzung dieses Verfahrens gelangt man also endlich, wenn n ungerade ist, zu einer Curve dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, wenn n gerade, zu einem Kegelschnitt. Die Curve dritter Ordnung mit Doppelpunkt wird aber durch einen Strahlenbüschel, der seinen Scheitelpunkt in diesem Doppelpunkt hat, eindeutig auf eine Gerade projicirt, und ihre Coordinaten werden rationale Functionen dritter Ordnung des Parameters dieses Strahlenbüschels. Auf dem Kegelschnitt dagegen muss man *einen* Punkt eindeutig kennen, um ihn durch einen Strahlenbüschel auf eine Gerade projiciren zu können. Bei den Curven n^{ter} Ordnung mit einem $(n-1)$ fachen Punkte degenerirt die Schaar Q überhaupt in den Geradenbüschel, dessen Scheitel der $(n-1)$ fache Punkt ist, und die Coordinaten einer solchen Curve werden rationale Functionen des Parameters dieses Büschels. Man hat daher den Satz:

Die rationalen Curven lassen sich, ohne Benutzung eines einfachen Punktes derselben, eindeutig in eine Gerade oder einen Kegelschnitt überführen, je nachdem ihre Ordnung ungerade oder gerade ist. Nur die Curven $2n^{\text{ter}}$ Ordnung mit einem $2n-1$ fachen Punkte verhalten sich noch wie die Curven ungerader Ordnung.

Dieser Satz vereinfacht das Problem der Abbildung von Flächen auf Kegelflächen sehr bedeutend. Wenn auf der Fläche eine Schaar rationaler Curven, die von einem Flächenbüschel ausgeschnitten wird, bekannt ist, so liefert derselbe direct die Abbildung der Fläche, wenn

die Curven der Schaar *ungerader* Ordnung oder auch $2n^{ter}$ Ordnung mit $2n-1$ fachem Punkte sind, und führt im andern Falle die Fläche auf eine einfachere zurück, die eine Schaar von Kegelschnitten besitzt. Ich werde diese Reduction jetzt auseinandersetzen.

§ 3.

Reduction der Flächen auf einfachere Flächenfamilien. Abbildbarkeit auf der Ebene.

Wir setzen voraus, dass auf der Fläche F eine Schaar S von rationalen Curven, die ein Flächenbüschel, jede Fläche im Allgemeinen mehrere bewegliche Curven gleicher Ordnung *), ausschneidet, bekannt sei.

Um nur eine Schaar ebener Curven behandeln zu müssen, nehmen wir zunächst beliebig im Raume einen Ebenenbüschel an, der dem Flächenbüschel, welcher S ausschneidet, projectivisch ist, und projiciren sodann von einem beliebigen Punkte des Raumes aus jede Curve der Schaar S auf diejenige Ebene des Ebenenbüschels, welche der die Curve aus F ausschneidenden Fläche entspricht. Diese Projectionen Σ von S erzeugen eine zweite Fläche Φ, welche der Fläche F Punkt für Punkt eindeutig entspricht. Die Fläche Φ enthält eine Schaar Σ von rationalen Curven, welche von einem Ebenenbüschel, im Allgemeinen mehrere bewegliche Curven gleicher Ordnung von *einer* Ebene des Büschels, ausgeschnitten werden. Die Achse dieses Büschels ist im Allgemeinen eine vielfache Gerade der Fläche Φ.

Jede Curve der Schaar Σ lässt sich nun auf die Weise behandeln, die durch den obigen Satz über die rationalen Curven bezeichnet ist. Eine Curve $C_{\lambda,\mu}$ von Σ ist durch die beiden Parameter λ, μ, welche die Curve aus der Schaar aussondern, und für welche eine algebraische Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ besteht, bestimmt; dabei sei λ der Parameter des Ebenenbüschels, welcher Σ ausschneidet. $C_{\lambda,\mu}$ sei von der n^{ten} Ordnung.

In der Ebene E_λ der Curve $C_{\lambda,\mu}$ legen wir die zweifach unendliche Schaar $Q_{\lambda,\mu}$ von Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung, welche durch jeden i fachen Punkt von $C_{\lambda,\mu}$ $(i-1)$ fach, und ausserdem durch $(n-4)$ feste Punkte der Ebene E_λ hindurchgehen. Wenn man diese Schaar $Q_{\lambda,\mu}$ zur Transformation von $C_{\lambda,\mu}$ benutzt, so entspricht der $C_{\lambda,\mu}$ nach dem Obigen Punkt für Punkt eindeutig eine neue rationale Curve

*) Diese letztere Annahme schliesst keine Beschränkung ein; denn die Fläche zerfällt, wenn die beweglichen Curven, die von jeder Fläche eines *Flächenbüschels* ausgeschnitten werden, ungleicher Ordnung sind.

$C'_{\lambda,\mu}$, die von der $(n-2)^{ten}$ Ordnung ist, und die in einer Ebene E'_λ eines mit E projectivischen Ebenenbüschels liegt. Um für jede Curve $C_{\lambda,\mu}$ so verfahren zu können, wird es nur nöthig sein, die $n-4$ festen Punkte der E_λ, welche sich auf $C_{\lambda,\mu}$ beziehen, eindeutig von den Parametern λ, μ der Curve $C_{\lambda,\mu}$ abhängen zu lassen. Da bei diesem Verfahren dann keine weiteren Punkte ausser den vielfachen Punkten auf $C_{\lambda,\mu}$ zu benutzen sind, und somit keine weitere Irrationalität, als die durch $f(\lambda,\mu)=0$ gegebene, eingeht, so erhält man eine zweite Schaar Σ' von rationalen Curven $C'_{\lambda,\mu}$ der $(n-2)^{ten}$ Ordnung, welche eine Fläche Φ' erzeugen, die Φ Punkt für Punkt eindeutig entspricht. Die Ordnung dieser Fläche Φ' hängt noch von der Wahl der $n-4$, zu jeder Curve $C_{\lambda,\mu}$ gehörigen festen Punkte ab; aber ein Ebenenbüschel schneidet aus Φ' eine Schaar von rationalen Curven $(n-2)^{ter}$ Ordnung aus, und zwar jede Ebene des Büschels ebensoviele Curven, als eine Ebene E aus Φ ausschneidet, Curven, die sich ebenfalls durch die Beziehung $f(\lambda,\mu)=0$ bestimmen.

Durch eine wiederholte Anwendung dieses Verfahrens gelangt man, wenn n *ungerade* ist, endlich zu einer eindeutigen Abbildung der gegebenen Fläche F auf einer Fläche $\Phi^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}$, aus welcher ein Ebenenbüschel eine Schaar rationaler Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkt, eine Ebene im Allgemeinen mehrere Curven, ausschneidet. Diese Flächen sind aber direct auf einer Kegelfläche abbildbar, indem man jede der Curven von ihrem Doppelpunkt aus auf eine Gerade projicirt. Man lässt den Projectionsstrahl an der von den Doppelpunkten der Curven dritter Ordnung erzeugten Curve und an der vielfachen Geraden α von $\Phi^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}$, welche die Achse des Ebenenbüschels ist, gleiten; ein solcher Strahl schneidet eine Curve, durch deren Doppelpunkt er geht, nur noch in *einem* beweglichen Punkte, und umgekehrt gehört zu einem Punkte der Fläche im Allgemeinen nur *ein* Projectionsstrahl. Die Coordinaten der Fläche $\Phi^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}$ werden also dann rationale Functionen von λ, μ und einem Parameter ϱ, der die Punkte der vielfachen Geraden α von $\Phi^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}$ bestimmt, und jedem Punkte der Fläche entspricht bei dieser Abbildung nur *ein* Werthsystem von λ, μ, ϱ. Es ist hiedurch eine Punkt für Punkt eindeutige Abbildung der gegebenen Fläche F auf einer Kegelfläche $f(\lambda,\mu)=0$ geliefert.

Die nämliche Methode der Abbildung, wie die bei der Fläche $\Phi^{\left(\frac{n-3}{2}\right)}$ befolgte, wendet man überhaupt an, wenn die Curven der Schaar S von F von der n^{ten} Ordnung sind und einen $(n-1)$ fachen Punkt besitzen. Diese Flächen lassen sich direct durch Projection von den Punkten der $(n-1)$ fachen Curve der Fläche aus abbilden.

Von den Flächen mit einer Schaar S von Curven ungerader Ordnung bleiben nur noch die windschiefen Flächen zu erledigen. Die Coordinaten einer solchen Fläche lassen sich direct als rationale Functionen von λ, μ, ϱ darstellen, wo ϱ der Parameter irgend eines Ebenenbüschels, also die Punkte der Erzeugenden der windschiefen Fläche bestimmt, und wo eine Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$ besteht, welche die Irrationalität eines ebenen Querschnitts dieser Fläche angibt. Diese Darstellung ist auch eindeutig umkehrbar, repräsentirt also eine Abbildung. Ich werde im § 7. noch insbesondere die auf einer Ebene abbildbaren windschiefen Flächen näher untersuchen.

Wenn die Curven der Schaar S von F von *gerader* Ordnung sind, so gelangt man (den schon behandelten speciellen Fall ausgenommen) durch eine Reihe von eindeutigen Abbildungen auf Flächen Φ hindurch auf die oben angegebene Weise endlich zur Abbildung von F auf einer Fläche φ, aus welcher ein Ebenenbüschel eine Schaar von Kegelschnitten, eine Ebene im Allgemeinen mehrere Kegelschnitte, ausschneidet. Die weitere Behandlung einer solchen Fläche φ erfordert nun complicirte geometrische Untersuchungen, da sich die Aufgabe darbietet, eine Curve C auf φ aufzusuchen, welche die Kegelschnitte der Schaar in je *einem* Punkte schneidet. Das Geschlecht einer solchen Curve C stimmt überein mit dem der Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$, welche zur Fläche F oder φ gehört. Wenn eine solche Curve C bekannt ist, kann man direct die Abbildung der Fläche F oder φ auf der Kegelfläche $f(\lambda, \mu) = 0$ leisten.

Ich werde mich hier darauf beschränken, die Zurückführung der Flächen F auf die Flächenfamilie der φ nachgewiesen zu haben. Ich mache noch darauf aufmerksam, dass diese Zurückführung, sowie die vorhin geleistete Abbildung der Flächen F mit Curven S von ungerader Ordnung, *ohne Auflösung irgend einer höhern Gleichung*, nur durch Eliminationsprocesse geschieht, sobald nur die Schaar S bekannt ist.

Nur den besonders interessanten Fall, in dem die Schaar S auf F so von einem Flächenbüschel ausgeschnitten wird, dass jede Fläche des Büschels in nur *einer* beweglichen Curve schneidet, will ich in § 4. etc. vollständig durchführen, durch Untersuchung der Flächen φ von der r^{ten} Ordnung mit einer $(r-2)$fachen Geraden, auf welche Flächen jene durch unsere Methode zurückgeführt werden. Ich werde die Existenz der Curven C auf diesen Flächen nachweisen und die Curven selbst angeben, so dass hiedurch die Abbildung dieser Flächen φ und F auf einer Ebene geleistet ist. Diesen Nachweis vorausgesetzt, können wir daher die Lösung des Problems der Abbildung algebraischer Flächen auf Ebenen dahin aussprechen:

Sobald eine Fläche eine einfach unendliche Schaar rationaler Curven besitzt, welche von einem Flächenbüschel, je eine bewegliche Curve von

einer Fläche des Büschels, ausgeschnitten werden, lässt sich die Fläche Punkt für Punkt eindeutig auf einer Ebene abbilden.

Bei der Abbildung, welche diese Methode liefert, bildet sich die Curvenschaar der Fläche, von der man ausgegangen, als ein Geradenbüschel der Ebene ab, wobei sich die ebenen Schnitte der Fläche im Allgemeinen nicht durch Curven von möglichst niedriger Ordnung abbilden werden. Da indess eine solche Abbildung aus jener durch eine Cremona'sche Transformation hervorgehen muss, so liefert der Satz am Schlusse des § 1. das Mittel, zu einer solchen Abbildung zu gelangen. Man hat nur eine Reihenfolge von Transformationen 2^{ter} Ordnung auszuführen und die 3 Grundpunkte einer solchen Transformation jeweils in die höchsten Fundamentalpunkte der Bildebene hineinzulegen. Wenn auf diese Weise keine Erniedrigung der Ordnung der Abbildungsfunctionen mehr stattfindet, so ist die Ordnung schon eine möglichst niedrige.

Indem ich hier die Abkürzungen übergehe, welche dieses ganze Reductionsverfahren in speciellen Fällen erleiden kann, will ich noch die hier erlangten Resultate mit den Sätzen in Verbindung bringen, die ich in der oben citirten Note, Göttinger Nachrichten, 1869 Nr. 15, ausgesprochen habe.

Zu jeder Fläche F, welche eine von einem Flächenbüschel ausgeschnittene Schaar S von rationalen Curven besitzt, gehört eine Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$, durch welche die Curven der Schaar so bestimmt werden, dass die Werthsysteme λ, μ, welche dieser Gleichung genügen, und die Curven von S einander eindeutig entsprechen. Wenn die Schaar S bekannt ist, ergibt sich die Gleichung $f(\lambda, \mu) = 0$, indem man die reductible Gleichung, welche die von einer Fläche λ des Büschels ausgeschnittenen Curven repräsentirt, in ihre Factoren zerlegt.

Es sei nun F' eine zweite Fläche, die F Punkt für Punkt eindeutig entspricht. Ihre Schaar sei S' und die zugehörige Curvengleichung $f'(\lambda, \mu) = 0$. Da die sämmtlichen Curven einer Fläche F, ob sie nun die Curven der Schaar S in je einem oder in mehreren Punkten schneiden, ein Geschlecht haben müssen, das gleich oder grösser ist, als das Geschlecht der Curve $f(\lambda, \mu) = 0$ (die Curven von S selbst ausgenommen), so folgt, dass bei der Abbildung von F auf F' die Curven der Schaaren S und S' einander Glied für Glied entsprechen müssen, und dass $f(\lambda, \mu) = 0$ somit das gleiche Geschlecht, wie $f(\lambda, \mu) = 0$, haben muss. Das Geschlecht von $f(\lambda, \mu) = 0$ habe ich das *Curvengeschlecht* der Fläche F genannt. *Daher ist die Gleichheit des Curvengeschlechts zweier Flächen ein nothwendiges Criterium für die Möglichkeit einer Abbildung der beiden Flächen aufeinander.*

Die Bestimmung des Curvengeschlechts einer Fläche, auf der eine Schaar S bekannt ist, macht nach dem Obigen keine Schwierigkeit. So führen diejenigen Flächen, aus welcher die Flächen eines Büschels je 2 bewegliche rationale Curven ausschneiden, auf die Gleichung einer hyperelliptischen Curve; und die windschiefen Flächen r^{ter} Ordnung mit einer $(r-2)$ fachen Geraden und einer diese nicht schneidenden Doppelgeraden, ebenso die Flächen $(r+2)^{ter}$ Ordnung mit einer $(r-2)$ fachen Geraden und einer diese nicht schneidenden doppelten Raumcurve 4^{ter} Ordnung erster Species etc., haben das Curvengeschlecht $r-3$.

Wenn $f(\lambda, \mu) = 0$ das Geschlecht 0 hat, so kann man statt λ, μ einen einzigen Parameter den Curven der Schaar S eindeutig zuordnen, mit andern Worten, es ist dann immer möglich, und dies auf unzählig viele Weisen, einen Flächenbüschel anzugeben, von dem jede Fläche die Fläche F nur in *einer* Curve der Schaar S schneidet. In diesem Falle gibt aber unser obiger Satz die Abbildbarkeit auf einer Ebene. Daher lässt sich dieser Satz dahin erweitern, dass die Bedingung, dass das Curvengeschlecht der Fläche F gleich 0 ist, ein *nothwendiges* und *hinreichendes* Criterium für die Abbildbarkeit von F auf einer Ebene ist.

In einem Aufsatz in den Math. Annalen, Bd. 2, pag. 293 habe ich ein weiteres allgemeines Criterium, die Gleichheit des *Flächengeschlechts*, für die Möglichkeit des eindeutigen Entsprechens zweier Flächen nachgewiesen. Das Flächengeschlecht p einer Fläche F von der n^{ten} Ordnung ist gleich der Anzahl der von einander linear unabhängigen Flächen $(n-4)^{ter}$ Ordnung, welche man durch die vielfachen Curven und Knotenpunkte von F, durch eine i fache Curve $(i-1)$ mal, durch einen i fachen conischen Knotenpunkt $(i-2)$ mal, gehen lassen kann. Für die hier betrachteten Flächen mit Schaaren rationaler Curven ist das Flächengeschlecht gleich 0, wie sich aus ihrer Abbildung auf Kegelflächen oder Flächen φ ergibt. Diese Bedingung, dass $p = 0$ ist, kann bei einer vorliegenden Fläche bequem dazu dienen, zu entscheiden, ob die Fläche überhaupt eine Schaar rationaler Curven besitzen kann. Die Frage, ob die hier nach dem Curvengeschlecht entwickelten Classen alle Classen innerhalb $p = 0$ begreifen, lasse ich hier unentschieden.

§ 4.

Flächen φ von der n^{ten} Ordnung mit einer $(n-2)$ fachen Geraden.

Zum vollständigen Beweis der im vorigen § aufgestellten Sätze wird noch der Nachweis der Abbildbarkeit auf der Ebene für diejenigen Flächen erfordert, auf welche die Flächen mit einer einfachen

Schaar rationaler Curven gerader Ordnung zurückgeführt worden sind, nämlich die Flächen φ, n^{ter} Ordnung mit einer $(n-2)$ fachen Geraden, aus welchen ein Ebenenbüschel eine einfache Schaar Σ von Kegelschnitten ausschneidet. Ich werde diesen Nachweis zugleich mit einer directen Durchführung der Abbildung geben.

Die Gleichung dieser Flächen φ ist von der Form:

$$(1) \qquad 0 = x_3^{n-2} u_0 + x_3^{n-3} x_4 . u_1 + \cdots\cdots + x_4^{n-2} . u_{n-2},$$

wo die u_i homogene Functionen 2^{ter} Ordnung in x_1, x_2, x_3, x_4 sind. Die Schaar der Kegelschnitte wird von dem Ebenenbüschel

$$(2) \qquad 0 = x_4 - \lambda x_3$$

ausgeschnitten und ergibt sich aus (2) in Verbindung mit (1) oder in Verbindung mit der Gleichung:

$$(3) \qquad 0 = u_0 + u_1 \lambda + u_2 \lambda^2 + \cdots + u_{n-2} \lambda^{n-2}.$$

Der Nachweis, den wir führen wollen, knüpft sich an die Betrachtung der Geradenpaare, in welcher eine Anzahl der Kegelschnitte dieser Schaar Σ zerfällt. Ein solches Zerfallen tritt ein, wenn eine Ebene (2) das zugehörige Hyperboloid (3) berührt, wofür die Bedingung, wenn man mit $u_{i,ik}$ die Coefficienten von u_i bezeichnet, die folgende wird:

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} u_{0,11}+u_{1,11}\lambda+\cdots+u_{n-2,11}\lambda^{n-2}, & -, & -, & u_{0,14}+u_{1,14}\lambda+\cdots+u_{n-2,14}\lambda^{n-2}, & 0 \\ - & - & - & - & 0 \\ - & - & - & - & -\lambda \\ u_{0,41}+u_{1,41}\lambda+\cdots+u_{n-2,41}\lambda^{n-2}, & -, & -, & u_{0,44}+u_{1,44}\lambda+\cdots+u_{n-2,44}\lambda^{n-2}, & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Da dieses eine Gleichung vom Grade $3(n-2)+2 = 3n-4$ für λ ist, so gibt es $3n-4$ Paare von je zwei sich schneidenden Geraden, welche durch die $(n-2)$ fache Gerade gehen, auf der Fläche φ.

Wir wollen indess noch den Fall berücksichtigen, dass die Fläche φ Doppelpunkte besitzt, deren Zahl $= s$ sei. Man erkennt leicht, dass einer jeden der durch die $(n-2)$ fache Gerade und die Doppelpunkte gehenden Ebenen eine Doppelwurzel λ der Gleichung (4) entspricht. Die Zahl der Geradenpaare von φ, welche nicht durch die Knotenpunkte gehen, beträgt daher nur $3n-2s-4$. Da überdies die Gleichung (4) nur $3n-4$ Wurzeln haben kann, so gibt dies zugleich eine obere Grenze für die Zahl der möglichen Knotenpunkte, nämlich $\frac{3n-4}{2}$. Diese Zahl kann nur dadurch überschritten werden, dass die Knotenpunkte besondere Lagenverhältnisse annehmen, so dass Ebenen des Büschels (2) die Fläche längs gerader Linien berühren; indess bleiben unsere folgenden Betrachtungen auch für solche Fälle gültig.

Unsere Aufgabe ist, unter Benutzung dieser Daten eine rationale Curve C zu suchen, welche ganz auf der Fläche gelegen ist und jeden Kegelschnitt der Schaar Σ in *einem* Punkte schneidet. Ich will hier sogleich diese Curve näher bezeichnen:

Es existirt auf der Fläche φ eine rationale Curve C $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche $n-3$ Punkte mit der $(n-2)$fachen Geraden a von φ gemein hat.

Um diese Curve C vollständiger zu bestimmen, muss ich zwischen geraden und ungeraden n unterscheiden.

1. Es sei $n = 2m$. Die Curve C entsteht als Schnitt zweier Flächen, einer Fläche $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer $(m-2)$fachen Geraden in a, und einer Fläche m^{ter} Ordnung mit einer $(m-1)$fachen Geraden in a. Ihr Schnitt ist in der That ausserhalb a von der Ordnung $(m-1)\,m-(m-2)\,(m-1) = 2m-2 = n-2$.
2. Es sei $n = 2m+1$. Die Curve C entsteht als Schnitt zweier Flächen m^{ter} Ordnung, welche die vielfache Gerade a von φ zur $(m-1)$fachen Geraden haben. Dieser Schnitt ist ausser a von der Ordnung $m^2-(m-1)^2 = 2m-1 = n-2$.

Man übersieht direct, dass eine solche Curve C rational ist und mit a $(n-3)$ Punkte gemein hat; denn jede Ebene des Ebenenbüschels schneidet aus jeder der beiden Flächen, deren Schnitt C ist, *eine* Gerade aus, bestimmt also ausserhalb a *einen* Schnittpunkt, welcher dem Parameter des Ebenenbüschels eindeutig entspricht.

Um nun den Grad der Vielfachheit der Schaar von Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung zu finden, welche a in $n-3$ Punkten schneiden, suche ich die Zahl der windschiefen Flächen m^{ter} Ordnung der betrachteten Art auf. Wenn eine Fläche von der Ordnung m eine gegebene Gerade als $r$fache Gerade besitzen soll, wird in dieser Fläche eine Anzahl N_r von Constanten absorbirt, die gleich

$$N_r = \frac{r\,.\,r+1}{2\,.\,3}\cdot(3m-2r+5).$$

Man findet diese Zahl, indem man die Bedingungen aufstellt, unter welchen eine Fläche, die eine Gerade $(r-1)$fach enthält, durch diese Gerade noch einmal hindurchgeht; die Zahl dieser Bedingungen wird

$$N_r - N_{r-1} = r(m-r+2),$$

welche Gleichung in Verbindung mit $N_1 = m+1$ die Zahl N_r ergibt*).

*) In ganz ähnlicher Weise ergiebt sich für die Zahl der Bedingungen, welche eine Fläche m^{ter} Ordnung erfüllen muss, wenn sie eine Curve der Ordnung $\mu\nu$, die der Schnitt zweier Flächen μ^{ter} und ν^{ter} Ordnung ist, als $r$fache Curve enthalten soll (vorausgesetzt, dass m eine gewisse von μ, ν, r abhängige Grösse übersteigt):

Es gibt daher eine

$$\frac{m+1 \cdot m+2 \cdot m+3}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 1 - \frac{m-1 \cdot m}{2 \cdot 3}(m+7) = 3m$$

fach unendliche Schaar von Flächen m^{ter} Ordnung im Raume, die eine gegebene Gerade als $(m-1)$fache Gerade besitzen.

1. Für $n = 2m$. Die fraglichen Curven $(2m-2)^{ter}$ Ordnung werden aus φ von Flächen $(m-1)^{ter}$ Ordnung ausgeschnitten, welche a zur $(m-2)$fachen Geraden haben. Von diesen Flächen gibt es eine $3(m-1)$fache Schaar. Durch eine gegebene der Curven geht nur eine einzige dieser Flächen, denn eine solche Curve erfordert von der Fläche $(m-1)^{ter}$ Ordnung noch die Erfüllung von

$$(m-1)(2m-2) - (m-2)(2m-3) + 1 = 3(m-1)$$

linearen Bedingungen. Ferner geht durch jede der Curven eine zweifach unendliche Schaar von Flächen m^{ter} Ordnung mit $(m-1)$facher Geraden a; denn damit die Curve auf der Fläche m^{ter} Ordnung liege, muss sie mit ihr noch

$$m(2m-2) - (m-1)(2m-3) + 1 = 3m - 2$$

Punkte gemein haben. Combinirt man daher die $3(m-1)$fache Schaar von Flächen $(m-1)^{ter}$ Ordnung mit einer $3m-2$fachen Schaar der Flächen m^{ter} Ordnung, so erhält man alle Curven der betrachteten Art und jede nur einmal, woraus hervorgeht, dass es eine

$$3(m-1) + 3m - 2 = 6m - 5$$

fach unendliche Schaar von rationalen Curven $(2m-2)^{ter}$ Ordnung gibt, welche $2m-3$ Punkte mit einer gegebenen Geraden gemein haben.

2. Für $n = 2m+1$. Damit eine der Flächen m^{ter} Ordnung durch eine der Curven $(2m-1)^{ter}$ Ordnung gehe, muss sie mit ihr noch

$$m(2m-1) - (m-1)(2m-2) + 1 = 3m - 1$$

Punkte gemein haben; also geht durch jede der Curven eine einfach unendliche Schaar der Flächen m^{ter} Ordnung. Man hat daher, um sämmtliche Curven der betrachteten Art zu erhalten, eine $(3m-1)$fache Schaar der Flächen m^{ter} Ordnung mit einer weitern $(3m-1)$fachen Schaar zu combiniren, woraus folgt, dass es eine $2(3m-1) = 6m-2$fach unendliche Schaar der gesuchten Curven gibt.

Durch Zusammenfassen dieser beiden Resultate findet man:

$$N_r = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{r \cdot r+1}{2 \cdot 3} \cdot \mu\nu \cdot \{6m - (2r+1)(\mu+\nu) + 12\};$$

und ähnlich, wenn die $r$fache Curve eine Raumcurve 3^{ter} Ordnung ist:

$$N_r = \frac{r \cdot r+1}{2 \cdot 3} \cdot \{9m - 10r + 13\}.$$

Es existirt eine $(3r+1)$*fach unendliche Schaar von Raumcurven* r^{ter} *Ordnung, welche* $r-1$ *Punkte mit einer gegebenen Geraden* a *gemein haben.*

Im Raume gibt es eine $(3r+5)$ fach unendliche Schaar von rationalen Raumcurven r^{ter} Ordnung, welche die Eigenschaft haben, $r-1$ Punkte zu besitzen, durch welche sich eine Gerade legen lässt. Ausgenommen ist $r=1, 2, 3, 4$, in welchen Fällen resp. eine 4, 8, 12, 16 fache Schaar existirt.

Man kann den Curven r^{ter} Ordnung nun weitere Bedingungen auflegen, z. B. durch feste Punkte des Raumes oder durch Gerade zu gehen, welche die gegebene Gerade schneiden. Die obige Entwicklung zeigt, dass ein fester Punkt zwei lineare Bedingungen mit sich bringt, nämlich eine für jede der beiden Flächen, deren Schnitt die Curve ist. Die Anzahl s dieser festen Punkte hat zur obern Grenze

1. Für ein gerades r: $s=\frac{3r}{2}$. Es existirt dann noch eine einfach unendliche Schaar von Curven, welche auf einer Fläche von der Ordnung $\frac{r}{2}$ liegen, welche die Gerade a zur $\left(\frac{r}{2}-1\right)$ fachen Geraden hat. Die Fläche ist durch die s Punkte eindeutig bestimmt, und ein weiterer fester Punkt müsste auf dieser Fläche angenommen werden.

2. Für ein ungerades r: $s=\frac{3r+1}{2}$. Es existirt dann noch eine einzige Curve, die durch diese s Punkte hindurchgeht und a in $r-1$ Punkten schneidet.

Sollen die Curven r^{ter} Ordnung, die mit a $r-1$ Punkte gemein haben, noch durch eine Gerade gehen, welche selbst a schneidet, so wird hierdurch den Curven *eine* Bedingung vorgeschrieben. Ich werde aber jetzt nachweisen, dass, sobald nur feste Punkte und der Schnitt mit solchen Geraden die Bedingungen bilden und die Anzahl dieser Bedingungen $=3r+1$ ist, die Anzahl der Curven, welche diesen Bedingungen genügen, im Allgemeinen gleich *eins* ist.

Es sei den Curven r^{ter} Ordnung, die eine Gerade a in $r-1$ Punkten schneiden, vorgeschrieben, durch s $\left(s \leqq \frac{3r+1}{2}\right)$ feste Punkte des Raumes zu gehen und $3r-2s+1$ feste Gerade b, die sämmtlich a, aber nicht sich schneiden, in je einem Punkte zu treffen.

Ich nehme aus den $3r-2s+1$ Geraden b $3r-2s$ beliebige heraus und lege durch dieselben und durch die s festen Punkte eine Fläche von der Ordnung $2r-s$, welche a als $(2r-s-1)$ fache Gerade besitzt. Diese Fläche ist durch diese Bedingungen vollständig und eindeutig bestimmt; denn es existirt, wenn die Bedingungen für die $(2r-s-1)$ fache Gerade erfüllt sind, noch eine $3(2r-s)$ fache Schaar solcher Flächen, und jede der $3r-2s$ Geraden b bringt 2,

jeder der s Punkte eine lineare Bedingung mit sich. Aber diese Fläche enthält auch alle Curven, welche den vorgeschriebenen Bedingungen genügen; denn sie hat mit jeder solchen Curve

$$(r-1)(2r-s-1)+s+(3r-2s)=r(2r-s)+1$$

Punkte gemein, also einen mehr, als der Schnitt einer Curve r^{ter} Ordnung mit einer Fläche von der Ordnung $2r-s$ betragen kann. Durch einen Punkt der Fläche $(2r-s)^{\text{ter}}$ Ordnung geht im Allgemeinen nur *eine* der Curven, wie z. B. eine Abbildung der Fläche auf der Ebene lehrt, bei der der Curvenschaar der Fläche ein Curvenbüschel der Ebene entspricht. Da nun die noch nicht benutzte der $3r-2s+1$ Geraden b die Fläche $(2r-s)^{\text{ter}}$ Ordnung ausserhalb a nur in *einem* Punkte schneidet und durch diesen Punkt nur *eine* Curve geht, so ist die Anzahl der allen Bedingungen genügenden Curven gleich 1. Diesen letztern, auf der Abbildung der Fläche beruhenden Schluss kann man auch dadurch ersetzen, dass man noch eine weitere Fläche $(2r-s)^{\text{ter}}$ Ordnung betrachtet, welche durch $3r-2s$ andere der $3r-2s+1$ Geraden geht. Beide Flächen haben dann $3r-2s-1$ der Geraden gemein und enthalten sämmtliche Curven r^{ter} Ordnung, welche *allen* Bedingungen genügen; ihr Schnitt ist aber von der Ordnung:

$$(2r-s)^2-(2r-s-1)^2-(3r-2s-1)=r,$$

der Schnitt besteht also aus *einer* Curve r^{ter} Ordnung.

Hiermit ist eine ganze Reihe geometrischer Sätze erwiesen, die wir direct für die Abbildungsaufgaben benutzen werden und so zusammenfassen können:

Wenn eine Gerade a, ferner s feste Punkte $\left(s \leqq \frac{3r+1}{2}\right)$ beliebig im Raume und $3r-2s+1$ Gerade b, welche sämmtlich a, aber nicht sich, schneiden, gegeben sind, so existirt nur eine Curve r^{ter} Ordnung, welche durch die s festen Punkte geht, die Gerade a $(r-1)$ mal und die Geraden b je einmal schneidet.

Ich kehre nach diesen Vorbereitungen zu der Fläche φ, von der n^{ten} Ordnung mit der $(n-2)$ fachen Geraden a und s Knotenpunkten, zurück. Nach dem Frühern enthält diese Fläche $3n-2s-4$ solcher Paare von je zwei sich schneidenden Geraden, welche in Ebenen liegen, die durch die Gerade a, aber nicht durch die Knotenpunkte gehen.

Man nehme nun aus diesen Geradenpaaren $3n-2s-5$ beliebige Paare und aus diesen Paaren je *eine* Gerade heraus, und lege eine Curve C von der Ordnung $n-2$, welche diese $3n-2s-5$ Geraden je einmal, die vielfache Gerade a $(n-3)$ mal schneidet und durch die s Doppelpunkte der Fläche φ hindurchgeht. Nach dem obigen

Satze existirt *eine* Curve, welche diesen Bedingungen genügt. Diese Curve C schneidet aber die Fläche φ in

$$(n-2)(n-3)+2s+(3n-2s-5)=n(n-2)+1$$

Punkten *und liegt somit ganz auf der Fläche*. Da sie ferner mit a $(n-3)$ Punkte gemein hat, so schneidet sie jeden Kegelschnitt der Schaar Σ, welche von dem Ebenenbüschel aus der Fläche ausgeschnitten wird, in *einem* Punkte, und führt somit zu einer Abbildung der Fläche auf einer Ebene, indem man jeden Kegelschnitt der Schaar Σ von diesem auf ihm eindeutig bestimmten Punkte aus durch einen Strahlenbüschel projicirt.

Hiedurch ist der Beweis der Abbildbarkeit der Flächen φ und damit zugleich der Beweis der in § 3. *ausgesprochenen Sätze geführt.*

Die hier gefundene Curve C schneidet die Ebene, in welcher das letzte noch unbenutzte Geradenpaar der Fläche φ liegt, in einem Punkte, also eine *bestimmte* der Geraden dieses Paares in einem Punkte. Hieraus folgt, dass man die sämmtlichen Curven $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung von der verlangten Eigenschaft auf der Fläche φ erhält, wenn man die Geraden der ersten $3n-2s-5$ Geradenpaare beliebig unter sich combinirt, indem man nur aus jedem Paare immer eine der Geraden herausnimmt. Die Anzahl dieser Combinationen beträgt $2^{3n-2s-5}$.

Im Falle n gerade, gibt es eine einzige Fläche von der Ordnung $\frac{n}{2}-1$, welche durch eine solche Curve hindurchgeht und a zur $\left(\frac{n}{2}-2\right)$fachen Geraden hat. Diese Fläche schneidet φ dann noch in einer weitern der Curven C von der Ordnung $n-2$.

Im Falle n ungerade, gibt es dagegen eine einfach unendliche Schaar von Flächen von der Ordnung $\frac{n-1}{2}$, welche durch eine der Curven C hindurchgehen und die Gerade a zur $\left(\frac{n-3}{2}\right)$fachen Geraden besitzen. Jede Fläche dieser Schaar schneidet φ noch ausserdem in einer rationalen Curve von der Ordnung $n-1$, die ganz ähnliche Eigenschaften hat, wie die Curve C von der Ordnung $n-2$; denn sie schneidet ebenfalls die Kegelschnitte der Schaar Σ in je einem Punkte, und da sie selbst einer Schaar angehört, so hat man hiedurch eine Abbildung, bei der die Coordinaten der Fläche rationale Functionen der Parameter dieser Schaar und des Ebenenbüschels werden. Man kann statt dessen den Flächen $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ter}}$ Ordnung die Bedingung auflegen, eine der Geraden, welche von der Curve C geschnitten wird, vollständig zu enthalten; es existirt dann ebenfalls nur *eine* solche Fläche, die φ noch in einer weitern Curve C von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung schneidet.

Wir haben also folgende Resultate:

Auf den Flächen φ existiren $2^{3n-2s-5}$ Curven C von der $(n-2)^{ten}$ Ordnung, welche jedes Glied der Kegelschnittschaar Σ in je einem Punkte schneiden. Die Curven gehen sämmtlich durch die Knotenpunkte der Fläche, und jede der Curven trifft je eine Gerade jedes Geradenpaares, welches nicht durch die Knotenpunkte geht. Im Falle n gerade, liegen je zwei solcher Curven, welche durch sich je zu einem Paar ergänzende Gerade gehen, auf einer Fläche von der Ordnung $\frac{n}{2}-1$, die a zur $\left(\frac{n}{2}-2\right)$fachen Geraden hat, von welchen Flächen es daher $2^{3n-2s-6}$ gibt. Je zwei solche adjungirte Curven schneiden sich in $\frac{3n}{2}-3$ Punkten, welche nicht auf der vielfachen Geraden liegen; die Fläche $\left(\frac{n}{2}-1\right)^{ter}$ Ordnung ist daher eine $\left(\frac{3n-6}{2}\right)$fach berührende, d. h. sie berührt in der höchstmöglichen Anzahl von Punkten.

Im Falle n ungerade, geht durch jede der Curven C ein Flächenbüschel $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{ter}$ Ordnung, mit a als $\left(\frac{n-3}{2}\right)$facher Geraden, von dem jede Fläche φ noch in einer rationalen Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung mit $n-2$ Punkten auf a schneidet. Diese Flächen sind $\left(\frac{3n-5}{2}\right)$fach berührende. Schreibt man einer solchen Fläche $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{ter}$ Ordnung vor, eine der Geraden, durch welche die betrachtete Curve C geht, ganz zu enthalten, so ist sie dadurch eindeutig bestimmt. Diese Fläche schneidet dann φ noch in einer weitern Curve C' von der $(n-2)^{ten}$ Ordnung, welche ebenfalls durch die ausgezeichnete Gerade geht, durch die ergänzende Gerade ihres Paares, wie C, nicht, welche aber ausserdem, in Bezug auf die übrigen Geradenpaare, durch diejenigen Geraden geht, welche die der Curve C zugehörigen Geraden je zu einem Paar ergänzen. Solche zwei adjungirte Curven C und C', die nur eine gemeinschaftliche Gerade treffen, schneiden sich noch in $\frac{3n-7}{2}$ Punkten. Die Fläche $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{ter}$ Ordnung, welche durch beide Curven und durch die ausgezeichnete Gerade geht, ist eine $\left(\frac{3n-3}{2}\right)$fach berührende, da sie noch in den 2 Punkten berührt, in welchen diese Gerade die beiden Curven schneidet, d. h. die Fläche berührt in der höchstmöglichen Anzahl von Punkten. Solcher Flächen gibt es $2^{3n-2s-6} \cdot 2^{3n-2s-5} = 2^{6n-4s-11}$.

Die Aufsuchung dieser Curven C und die Abbildung der Flächen φ erfordert die Auflösung *einer* höhern Gleichung vom Grade $3n-2s-4$, welche die Geradenpaare der Fläche liefert, und die von $3n-2s-5$

quadratischen Gleichungen*). Diese Gleichungen sind zugleich die einzigen, auf welche unsere Methode der Abbildung von Flächen überhaupt führt. Ich bemerke noch, dass die hier angegebenen Zahlen für die Fläche φ noch eine Voraussetzung einschliessen; denn die Curven C sind unter der Annahme gefunden worden, dass die Geradenpaare, welche sie bestimmen, eine von einander unabhängige Lage haben. Aber eine Fläche n^{ter} Ordnung ist schon durch die Bedingungen, eine Gerade a als $(n-2)$ fache Gerade und $2n-1$ Gerade, welche a schneiden, einfach zu enthalten, vollständig und eindeutig bestimmt. Unsere Betrachtungen erweisen aber jedenfalls die Existenz von Curven C, und da man sodann durch eine Abbildung der Fläche zeigen kann, dass die gegenseitige Abhängigkeit der Lage der Geradenpaare nicht unendlich viele den Bedingungen genügende Curven C zulässt, so ergibt sich mit der Endlichkeit der Zahl dieser Curven auch die Gültigkeit der oben angegebenen Zahlen.

§ 5.

Abbildung der Flächen φ auf der Ebene.

Ich wende mich jetzt zur Ausführung der Abbildung einer Fläche n^{ter} Ordnung mit einer $(n-2)$ fachen Geraden auf der Ebene. Die geringen Modificationen, welche die folgende Abbildung durch Knotenpunkte erleidet, werde ich weiter unten erwähnen. Es wird wieder nöthig, die beiden Fälle, dass n gerade oder ungerade ist, getrennt zu behandeln.

1. Es sei n *gerade*: $n = 2m$.

Auf dem in § 4. angegebenen Wege sei eine Curve C von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung aufgesucht, und die Fläche $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit der $(m-2)$ fachen Geraden a bekannt, welche durch C hindurchgeht. Da diese Fläche die Fläche φ in zwei Curven C, C' schneidet, durch welche man noch Flächen m^{ter} Ordnung mit einer $(m-1)$ fachen Geraden in a legen kann, deren vollständiger Schnitt mit der Fläche $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung aus C, C' und a besteht, so nimmt die Gleichung der gegebenen Fläche φ die Form an:

$$(A_1x_3^{m-1}+A_2x_3^{m-2}x_1\cdots+A_mx_4^{m-1})(B_1x_3^{m-1}+B_2x_3^{m-2}x_4\cdots+B_mx_4^{m-1})$$
$$=(C_1x_3^{m-2}+C_2x_3^{m-3}x_4\cdots+C_{m-1}x_4^{m-2})(D_0x_3^m+D_1x_3^{m-1}x_4\cdots+D_mx_4^m),$$

wo die A, B, C, D lineare homogene Ausdrücke in x_1, x_2, x_3, x_4 sind. Um aus dieser Gleichung die schon erwähnte Abbildung zu erhalten,

*) Das entsprechende algebraische Problem findet sich bereits von Herrn Camille Jordan, in seinem Werke: „Traité des Substitutions et des Équations algébriques", Nr. 435, behandelt.

zerlegt man sie durch Einführung zweier Parameter $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ und $\frac{\xi_3}{\xi_1}$ in die drei Gleichungen:

$$(2)\begin{cases}\xi_2 x_3 - \xi_1 x_4 = 0\\ \xi_3(C_1\xi_1^{m-2} + C_2\xi_1^{m-3}\xi_2 + \cdots + C_{m-1}\xi_2^{m-2}) = A_1\xi_1^{m-1} + A_2\xi_1^{m-2}\xi_2 + \cdots + A_m\xi_2^{m-1}\\ \xi_3(B_1\xi_1^{m-1} + B_2\xi_1^{m-2}\xi_2 + \cdots + B_m\xi_2^{m-1}) = D_0\xi_1^m + D_1\xi_1^{m-1}\xi_2 + \cdots + D_m\xi_2^m.\end{cases}$$

Diese Gleichungen geben nicht nur die Verhältnisse der ξ als rationale Functionen der x, sondern auch umgekehrt die Verhältnisse der x als rationale Functionen der ξ, und zwar werden die x proportional mit Functionen n^{ter} Ordnung der ξ.

Die geometrische Bedeutung dieser Abbildung schliesst sich eng an unsere frühern Betrachtungen an, wie sich aus den Gleichungen (2) ergibt. Denn die beiden ersten derselben stellen eine Gerade vor, die an der $(n-2)$ fachen Geraden a und an einer Curve C der Fläche gleitet; dabei ist $\frac{\xi_2}{\xi_1}$ der Parameter λ des Ebenenbüschels $x_4 - \lambda x_3 = 0$, und $\frac{\xi_3}{\xi_1}$ lässt sich als der Parameter eines Büschels von Flächen m^{ter} Ordnung auffassen, welche durch C gehen und a zur $(m-1)$ fachen Geraden haben.

Durch Auflösen der Gleichungen (2) erhält man:

$$(3)\qquad \varrho x_i = \frac{\partial R}{\partial \alpha_i}\ ,\quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

wobei

$$R = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ 0 & 0 & -\xi_2 & \xi_1\\ X_1 & X_2 & X_3 & X_4\\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 \end{vmatrix}$$

Hierbei sind die X Functionen $(m-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der ξ, welche für $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ $(m-2)$ fach verschwinden, die Y Functionen m^{ter} Ordnung der ξ, die für $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ $(m-1)$ fach verschwinden. Der Punkt $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ ist also ein $(2m-2) = (n-2)$ facher Fundamentalpunkt.

Von den $4m^2$ Punkten, in welchen sich $\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = 0$ und $\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = 0$ schneiden, fallen $(2m-2)^2$ in den Punkt $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ und $8m-4$ ausserhalb dieses Punktes. Für diese Punkte verschwindet auch $\frac{\partial R}{\partial \alpha_3} X_3 + \frac{\partial R}{\partial \alpha_4} X_4$, also auch

$$(\xi_1 X_3 + \xi_2 X_4)(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) = 0,$$

und auch $\frac{\partial R}{\partial \alpha_3}$ und $\frac{\partial R}{\partial \alpha_4}$ sind für diejenigen der $8m-4$ Punkte 0, für welche

$$X_1 Y_2 - X_2 Y_1 = 0.$$

Für $2m$ der $8m-4$ Punkte verschwindet aber $\xi_1 X_3 + \xi_2 X_1$; denn für die Punkte, in denen $\frac{\partial R}{\partial \alpha_1} = 0$, $\frac{\partial R}{\partial \alpha_2} = 0$, $\xi_1 X_3 + \xi_2 X_4 = 0$ hat man auch $\xi_1 Y_3 + \xi_2 Y_4 = 0$, welche beiden letztern Gleichungen $m(m+1)$ Schnittpunkte liefern, von denen $(m-1)m$ in den Punkt $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ fallen. In den übrigen $8m-4-2m = 6m-4 = 3n-4$ Punkten verschwindet $X_1 Y_2 - X_2 Y_1$ und somit die sämmtlichen Functionen $\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}$.

Die Functionen (3) haben daher noch $3n-4$ einfache Fundamentalpunkte.

2. Es sei n *ungerade*: $n = 2m+1$. Vermöge des Flächenbüschels m^{ter} Ordnung, welcher a zur $(m-1)$ fachen Geraden hat und durch eine der Curven C hindurchgeht, nimmt die Gleichung der Fläche n^{ter} Ordnung die Form an:

$$\begin{aligned}&(A_1\, x_3^{m-1} + A_2\, x_3^{m-2}\, x_4 \cdots + A_m\, x_4^{m-1})(B_0\, x_3^m + B_1\, x_3^{m-1}\, x_1 \cdots + B_m x_4^m)\\ =\ &(C_1\, x_3^{m-1} + C_2\, x_3^{m-2}\, x_4 \cdots + C_m\, x_4^{m-1})(D_0\, x_3^m + D_1\, x_3^{m-1}\, x_4 \cdots + D_m x_4^m)\end{aligned} \quad 1)$$

wo die A, B, C, D wieder lineare Ausdrücke sind. Diese Form ist aber den folgenden drei Gleichungen äquivalent:

$$\begin{cases}\xi_2 x_3 - \xi_1 x_4 = 0\\ \xi_3(C_1\, \xi_1^{m-1} + C_2\, \xi_1^{m-2}\xi_2 \cdots + C_m\, \xi_2^{m-1}) = B_0 \xi_1^m + B_1 \xi_1^{m-1}\, \xi_2 \cdots + B_m \xi_2^m\\ \xi_3(A_1 \xi_1^{m-1} + A_2 \xi_1^{m-2}\xi_2 \cdots + A_m \xi_2^{m-1}) = D_0 \xi_1^m + D_1 \xi_1^{m-1}\, \xi_2 \cdots + D_m \xi_2^m,\end{cases} \quad 2)$$

welche Gleichungen die Abbildung liefern. Die Auflösung derselben gibt wieder Functionen von der Form (3), wobei aber die X und Y Functionen m^{ter} Ordnung werden, welche in $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ einen $(m-1)$ fachen Punkt haben. Eine der obigen analoge Entwicklung zeigt, dass die Coordinaten x der Fläche φ auch hier proportional werden mit Functionen $(2m+1) = n^{\text{ter}}$ Ordnung der ξ, welche in $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ einen $(n-2)$ fachen Punkt, und ausserdem $6m-1 = 3n-4$ einfache Punkte gemeinschaftlich haben. Auch die geometrische Bedeutung der Abbildung ist der sub 1. ähnlich. Durch Zusammenfassen dieser Resultate sub 1. und 2. ergiebt sich nun:

Die ebenen Schnitte der Fläche n^{ter} Ordnung mit einer $(n-2)$ fachen Geraden bilden sich auf der Ebene durch Curven n^{ter} Ordnung ab, welche einen festen $(n-2)$ fachen und $3n-4$ feste einfache Punkte gemeinschaftlich haben.

Hiebei stellt der $(n-2)$ fache Fundamentalpunkt eine rationale Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung der Fläche, und die einfachen Fundamentalpunkte diejenigen $3n-4$ Geraden der Fläche vor, durch welche diese Curve $(n-2)^{\text{ter}}$ Ordnung *nicht* geht.

Umgekehrt reicht auch das hier angegebene ebene System, bei beliebiger Wahl der $3n-3$ Fundamentalpunkte, vollständig hin, um

die abgebildete Fläche n^{ter} Ordnung zu characterisiren; denn einmal gibt es eine dreifach unendliche Schaar von Curven n^{ter} Ordnung mit einem festen $(n-2)$ fachen und $3n-4$ festen einfachen Punkten, der die dreifach unendliche Schaar von ebenen Schnitten der Fläche entsprechen kann. Sodann aber entspricht hiebei dem ebenen System eine Fläche n^{ter} Ordnung mit einer Doppelcurve von der Ordnung $\frac{n-2\cdot n-3}{1\cdot 2}$, die hier in eine $(n-2)$ fache Gerade übergehen muss. Diesen letztern Punkt kann man auf folgende Weise einsehen. Unter dem System von Curven n^{ter} Ordnung, welchem die ebenen Schnitte der Fläche entsprechen, ist eine einfach unendliche Schaar enthalten, welche in einen Geradenbüschel, dessen Scheitelpunkt der $(n-2)$ fache Fundamentalpunkt ist, und in eine feste Curve $(n-1)^{ter}$ Ordnung zerfällt, die in dem $(n-2)$ fachen Fundamentalpunkt einen $(n-3)$ fachen Punkt besitzt und durch die einfachen Fundamentalpunkte einfach hindurchgeht, wodurch diese Curve S völlig und eindeutig bestimmt ist. Dem Geradenbüschel muss hier nun eine Schaar von Kegelschnitten entsprechen, welche von einem Ebenenbüschel aus der Fläche ausgeschnitten wird. Die Axe dieses Büschels ist also eine $(n-2)$ fache Gerade der Fläche. Zugleich sieht man, dass die Curve S die *Abbildung der $(n-2)$ fachen Geraden* der Fläche ist.

Ich bemerke weiter, dass die hier gefundene Abbildung der Fläche n^{ter} Ordnung auch diejenige ist, bei welcher den ebenen Schnitten Curven der möglichst niedrigen Ordnung auf der Ebene entsprechen. Denn wendet man eine Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung an, indem man die drei Grundpunkte dieser Transformation in den $(n-2)$ fachen und zwei der einfachen Fundamentalpunkte der Ebene hineinlegt, so wird die dreifach unendliche Schaar von Curven n^{ter} Ordnung in eine solche von der Ordnung $2n-(n-2)-2=n$ transformirt, mit einem dem erstern ähnlichen System von Fundamentalpunkten.

Es bleibt jetzt noch übrig, den Fall zu berücksichtigen, dass die Fläche φ Doppelpunkte besitzt. Ein Doppelpunkt tritt nun dadurch ein, dass zwei der einfachen Fundamentalpunkte der Bildebene mit dem $(n-2)$ fachen Fundamentalpunkt auf einer geraden Linie liegen; und diese Art der Abbildung entspricht auch genau den Modificationen, welchen die Hülfsflächen m^{ter} und $(m-1)^{ter}$ Ordnung, die wir früher behandelt haben, in diesem Fall unterliegen. Denn diese Flächen müssen, nach der Entwicklung des § 4., durch die Knotenpunkte der Fläche φ hindurchgelegt werden. Wenn also z. B. $(x_1=x_2=x_3=0)$ ein Knotenpunkt von φ ist, so geschieht dies dadurch, dass in der Gleichungsform (1) A_m, B_m, C_{m-1}, D_m, in der Gleichungsform (4) A_m, B_m, C_m, D_m lineare Functionen von x_1, x_2, x_3 werden. Dann

folgt aber aus (2) und (5), dass X_4 und Y_4 in (3) den Factor ξ_1 erhalten, wodurch die Abbildung (3) in die folgende übergeht:

$$(6) \qquad \begin{cases} \varrho x_1 = \xi_1 Q \\ \varrho x_2 = \xi_1 R \\ \varrho x_3 = \xi_1 S \\ \varrho x_4 = \xi_2 S, \end{cases}$$

wo Q, R, S Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung sind, welche den Punkt $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ zum $(n-3)$ fachen Punkt und ausserdem noch $3n-6$ feste Punkte gemeinschaftlich haben. Als Fundamentalpunkte treten daher hier der Punkt $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ als $(n-2)$ facher Punkt, die $3n-6$ weiteren Basispunkte von Q, R, S einfach und ferner die beiden Punkte auf, in welchen die Gerade $\xi_1 = 0$ die Curve $S = 0$ ausserhalb $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ schneidet. Dem Doppelpunkte $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ der Fläche entspricht hiebei die Gerade $\xi_1 = 0$, und dem Geradenpaar der Fläche, welches durch den Doppelpunkt geht, die beiden einfachen Fundamentalpunkte, welche auf der Geraden $\xi_1 = 0$ liegen. $S = 0$ ist die Abbildung der $(n-2)$ fachen Geraden der Fläche. Aehnlich liegen im Allgemeinen, den s Knotenpunkten der Fläche φ entsprechend, s mal je zwei einfache Fundamentalpunkte mit dem $(n-2)$ fachen auf einer Geraden.

Ich will im Folgenden bei der Fläche φ nur die Abbildung der $(n-2)$ fachen Geraden näher betrachten. Eine weitere Untersuchung der Abbildung der Fläche würde zeigen, dass ausser den schon betrachteten Geradenpaaren und der Kegelschnittschaar keine weitern Curven unter der Ordnung $n-2$ auf der Fläche liegen. Von dieser Ordnung existiren nur die schon behandelten $2^{3m-2s-5}$ Curven C. Als specielle Fälle der hier durchgeführten Abbildung der Flächen φ lassen sich die bekannten Abbildungen der Fläche 2^{ter} Ordnung (wobei die Curven C in zwei Punkte ausarten), der Fläche 3^{ter} Ordnung und der Fläche 4^{ter} Ordnung mit einer Doppelgeraden ansehen.

§ 6.

Die Abbildung der $(n-2)$ fachen Geraden der Flächen φ.

Im ersten Bande der Math. Ann., pag. 270., hat Herr Clebsch die Gleichung der Abbildung der Doppelcurve einer abbildbaren Fläche entwickelt. Eine Erweiterung dieser Untersuchung, welche ich in meiner Abhandlung, Math. Ann. Bd. 2., pag. 312, gegeben habe, führt zu folgendem Resultate.

Die Fläche N^{ter} Ordnung, $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ sei durch die Functionen n^{ter} Ordnung

$$\varrho x_i = \varphi_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad , \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

auf der Ebene abgebildet. Man bilde nun die Gleichung

$$\frac{\Omega}{\Theta} = 0,$$

wo

$$\Omega = \sum_i z_i \cdot \frac{\partial F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)}{\partial \varphi_i}$$

$$\Theta = \sum \pm z_1 \frac{\partial \varphi_2(\xi)}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \varphi_3(\xi)}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \varphi_4(\xi)}{\partial \xi_3}.$$

Im Falle bei dieser Abbildung auf $F = 0$ keine Fundamentalpunkte, die einfache Punkte von $F = 0$ sind, auftreten, ist Θ in Ω theilbar, und $\frac{\Omega}{\Theta} = 0$ stellt die Abbildung der auf $F = 0$ befindlichen vielfachen Curven und Flächen dar, aber so, dass $\frac{\Omega}{\Theta} = 0$ durch die Abbildung einer μ fachen Curve von $F = 0$ $(\mu - 1)$ fach, durch die Abbildung eines μ fachen Knotenpunkts von $F = 0$ $(\mu - 2)$ fach hindurchgeht.

Wenn auch auf $F = 0$ ein Fundamentalpunkt, der ein einfacher Punkt von $F = 0$ ist, existirt, so ist der betreffende Factor, welcher die dem Fundamentalpunkt auf der Ebene entsprechende Curve darstellt, in Θ einfach, nicht aber in Ω enthalten, und muss von Θ abgesondert werden.

Die Ordnung von $\frac{\Omega}{\Theta}$ ist $(N-4)n+3$, und einen r fachen Fundamentalpunkt der Ebene hat diese Curve $\frac{\Omega}{\Theta}$ zum $[(N-4)r+1]$ fachen Punkte. Wenn also auf F eine μ fache Curve und nur 2 fache Knotenpunkte existiren, und die Abbildung von F auf der Ebene soll derart sein, dass auf F kein einfacher Punkt als Fundamentalpunkt auftritt, so müssen die Zahlen n und r den Bedingungen genügen, dass

$(N-4)n+3$ und $(N-4)r+1$ und folglich auch $n-3r$ ganze *Vielfache* von $\mu - 1$ sind.

Diese Zahlen finden sich bei unserer Fläche φ von der n^{ten} Ordnung, mit einer $(n-2)$ fachen Geraden a und s Doppelpunkten, bestätigt. Es wird hier $N = n$, $\mu = n-2$, $r = n-2$ oder $= 1$, und die vielfache Gerade der Fläche bildet sich ab als Curve $S = 0$, von der Ordnung $n-1$, welche in dem $(n-2)$ fachen Fundamentalpunkt einen $(n-3)$ fachen Punkt besitzt und durch die $3n-4$ einfachen Fundamentalpunkte einfach hindurchgeht. Das Geschlecht dieser eindeutig bestimmten Curve S ist $n-3$. Ferner hat diese Curve die Eigenschaft, ihre Coordinaten als hyperelliptische Functionen eines Parameters darstellen zu lassen. Denn fügt man zur Gleichung der Curve S die Gleichung des Geradenbüschels, dessen Scheitel in dem $(n-3)$ fachen Punkte von S liegt, so ergeben sich, da jede dieser

Geraden in zwei beweglichen Punkten schneidet, die Coordinaten der Curve in der Form:

$$\varrho\,\xi_i = P_i + Q_i \cdot \sqrt{R}, \qquad (i = 1, 2, 3),$$

wo P_i, Q_i, R rationale ganze Functionen eines Parameters λ und R auf den Grad $2n - 4$ steigt. Die beiden Punkte, in welchen eine Gerade des Büschels die Curve schneidet, entsprechen den beiden Punkten der vielfachen Geraden, welche ein Kegelschnitt der Schaar mit dieser gemein hat.

Um aber weiter die Curve S nach den Punkten zu studiren, welche *einen* Punkt der vielfachen Geraden a von φ abbilden, ist es zweckmässig, ähnlich wie es für den specielleren Fall der Fläche 4^{ter} Ordnung von Herrn Clebsch, Math. Ann., Bd. 1., pag. 284, geschehen, die $(n - 3)$ allenthalben endlichen Integrale einzuführen, welche der betrachteten Curve S zugehören, und auf diese das Abel'sche Theorem in der von Herrn Clebsch (Crelle, Bd. 63.) gegebenen Form anzuwenden.

Die obern Grenzen dieser Integrale sind die Coordinaten der beweglichen Punkte der Curve S; die untere Grenze sei ein beliebiger fester Punkt der Curve. Die $n - 3$ endlichen Integrale unterscheide ich von einander durch unten angefügte Indices, während der Buchstabe selbst und der oben angefügte Index sich auf den Punkt beziehen soll, dessen Coordinaten die obere Grenze des Integrals bilden. Es seien nun

$$u_1^{(i)},\ u_2^{(i)},\ \ldots\ u_{n-3}^{(i)}\ ,\quad [i = 1, 2, \ldots, r(n-1)]$$

die Werthe der $n - 3$ Integrale, welche sich auf den i^{ten} Schnittpunkt einer Curve r^{ter} Ordnung mit der Curve S beziehen. Dann bestehen nach dem Abel'schen Theorem die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} u_1^{(1)} + u_1^{(2)} + \cdots + u_1^{r(n-1)} = r \cdot c_1 \\ u_2^{(1)} + u_2^{(2)} + \cdots + u_2^{r(n-1)} = r \cdot c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ u_{n-3}^{(1)} + u_{n-3}^{(2)} + \cdots + u_{n-3}^{r(n-1)} = r \cdot c_{n-3}, \end{cases}$$

wo die c_i Constanten bedeuten, die unabhängig sind von der Curve r^{ter} Ordnung. Wir werden diese Gleichungen hier nur auf solche Fälle anwenden, in denen, nach der Theorie der Abel'schen Functionen, das Bestehen derselben auch umgekehrt beweist, dass die $(n - 1)r$ Punkte, auf welche sich die Integrale der linken Seiten beziehen, Schnittpunkte einer Curve r^{ter} Ordnung mit S sind.

Es sei nun weiter die constante Summe der $n - 3$ endlichen Integrale u_k, ausgedehnt über die $n - 3$ im $(n - 2)$ fachen Fundamentalpunkte vereinigt liegenden Punkte der Curve S, bezeichnet durch

$$A_k\ ,\quad (k = 1, 2, \ldots, n - 3),$$

und die Werthe der Integrale für den i^{ten} einfachen Fundamentalpunkt bezeichnet durch:

$$a_1^{i},\ a_2^{i} \ldots\ldots a_{n-3}^{i} \quad ; \quad i = 1, 2, \ldots, 3n-4.$$

Um die Punkte der Curve S zu erhalten, deren entsprechende Punkte auf q in einen Punkt der vielfachen Geraden zusammenfallen, betrachte ich zunächst die Abbildungen ebener Schnitte der Fläche. Es sind Curven n^{ter} Ordnung, welche durch $3n-4$ feste Punkte von S einfach gehen und in dem $(n-3)$ fachen Punkt von S einen $(n-2)$ fachen Punkt haben. Da jede solche Curve die Abbildung eines ebenen Schnittes ist, so sind die $n-2$ beweglichen Punkte, in welcher eine solche S schneidet, immer die Abbildung eines Punktes der vielfachen Geraden. Die endlichen Integrale für solche $n-2$ Punkte seien, dem h^{ten} dieser Punkte entsprechend, mit

$$v_1^{(h)},\ v_2^{(h)}, \ldots\ldots v_{n-3}^{(h)} \quad , \quad h = 1, 2, \ldots, n-2)$$

bezeichnet. Für eine einen ebenen Schnitt abbildende Curve T gehen daher die Gleichungen (1) über in das System:

$$(2)\quad \begin{cases} v_1^{(1)} + v_1^{(2)} \cdots + v_1^{(n-2)} - n-2\ A_1 + a_1^{(1)} + a_1^{(2)} \cdots + a_1^{(3n-4)} = n \cdot c_1 \\ v_2^{(1)} + v_2^{(2)} \cdots + v_2^{(n-2)} + n-2\ A_2 - a_2^{(1)} + a_2^{(2)} \cdots + a_2^{(3n-4)} = n \cdot c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_{n-3}^{(1)} + v_{n-3}^{(2)} \cdots + v_{n-3}^{(n-2)} + n-2\ A_{n-3} + a_{n-3}^{(1)} + a_{n-3}^{(2)} \cdots + a_{n-3}^{(3n-4)} = n \cdot c_{n-3} \end{cases}$$

Es sei nun mit ε eine Zahl bezeichnet, die $= 0, 2, 4 \ldots$, wenn n gerade, und $= 1, 3, 5 \ldots$, wenn ungerade, sein kann. Ich greife aus den Curven n^{ter} Ordnung, T, eine bestimmte T' heraus, welche S in gewissen $n-2$ Punkten schneidet. Durch diese $n-2$ Punkte ν lege ich eine Curve von der Ordnung $\frac{n+\varepsilon-2}{2}$, welche in dem $(n-3)$ fachen Punkt von S einen $\frac{n+\varepsilon-4}{2}$ fachen Punkt besitzt, also eine rationale Curve, und lasse diese Curve überdies durch ε beliebige Punkte l von S gehen, wodurch dieselbe gerade bestimmt ist. Diese Curve schneidet dann S noch in

$$(n-1) \cdot \frac{n+\varepsilon-2}{2} - (n-3) \cdot \frac{n+\varepsilon-4}{2} - (n-2) - \varepsilon = n-3$$

Punkten p. Die Gleichungen (1) geben daher für den Schnitt von S mit dieser Curve, wenn man die Integrale, die sich auf die festen Punkte $l^{(i)}$ beziehen, mit

$$l_1^{(i)},\ l_2^{(i)}, \ldots\ l_{n-3}^{(i)} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots \varepsilon),$$

und die auf die Punkte $p^{(i)}$ bezüglichen Integrale mit

$$p_1^{(i)},\ p_2^{(i)}, \ldots p_{n-3}^{(i)} \quad , \quad (i = 1, 2, \ldots n-3)$$

bezeichnet:

$$(3)\quad \begin{cases} \nu_1^{(1)}+\nu_1^{(2)}\cdots+\nu_1^{(n-2)}+\frac{n+\varepsilon-4}{2}\cdot A_1+l_1^{(1)}\cdots+l_1^{(\varepsilon)}+p_1^{(1)}+\cdots+p_1^{(n-3)}=\frac{n+\varepsilon-2}{2}\cdot c_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \nu_{n-3}^{(1)}+\nu_{n-3}^{(2)}\cdots+\nu_{n-3}^{(n-2)}+\frac{n+\varepsilon-4}{2}\cdot A_{n-3}+l_{n-3}^{(1)}\cdots+l_{n-3}^{(\varepsilon)}+p_{n-3}^{(1)}+\cdots+p_{n-3}^{(n-3)}=\frac{n+\varepsilon-2}{2}\cdot c_{n-3} \end{cases}$$

Dieses System von Gleichungen (3) besteht neben dem System (2). Verbindet man beide, indem man je eine Gleichung (2) von der entsprechenden in (3) subtrahirt, so erhält man das folgende System, das sich ebenfalls auf die Curve T' bezieht:

$$(4)\quad \begin{cases} p_1^{(1)}+p_1^{(2)}\cdots+p_1^{(n-3)}=\frac{n-\varepsilon}{2}\cdot A_1+a_1^{(1)}\cdots+a_1^{(3n-4)}-l_1^{(1)}\cdots-l_1^{(\varepsilon)}-\frac{n-\varepsilon+2}{2}\cdot c_1 \\ p_2^{(1)}+p_2^{(2)}\cdots+p_2^{(n-3)}=\frac{n-\varepsilon}{2}\cdot A_2+a_2^{(1)}\cdots+a_2^{(3n-4)}-l_2^{(1)}\cdots-l_2^{(\varepsilon)}-\frac{n-\varepsilon+2}{2}\cdot c_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ p_{n-3}^{(1)}+p_{n-3}^{(2)}\cdots+p_{n-3}^{(n-3)}=\frac{n-\varepsilon}{2}\cdot A_{n-3}+a_{n-3}^{(1)}\cdots+a_{n-3}^{(3n-4)}-l_{n-3}^{(1)}\cdots-l_{n-3}^{(\varepsilon)}-\frac{n-\varepsilon+2}{2}\cdot c_{n-3} \end{cases}$$

Nach dem Jacobi'schen Umkehrproblem der Abel'schen Functionen lassen diese $n-3$ Gleichungen aber eine eindeutige Auflösung für die $n-3$ Punkte p zu, und bestimmen dieselben als eindeutige Functionen der rechten Seiten dieser Gleichungen. Hier tritt nun der besondere Umstand ein, dass diese rechten Seiten vollständig constant sind, indem sie in keiner Weise von der individuellen Curve T' abhängen, welche aus der dreifach unendlichen Schaar von Curven T herausgenommen wurde. Dies beweist den folgenden Satz:

Legt man durch ε beliebige feste Punkte der Curve S eine Curve K von der Ordnung $\frac{n+\varepsilon}{2}-1$, welche in dem $(n-3)$fachen Punkt von S einen $\left(\frac{n+\varepsilon}{2}-2\right)$fachen Punkt besitzt, und lässt diese Curve K weiter durch irgend ein System Q von $(n-2)$ Punkten von S gehen, welches einem Punkte der vielfachen Geraden a von φ entspricht, wodurch dann die Curve K gerade bestimmt ist, so schneidet eine solche Curve K, welches System Q man auch wählen mag, die Curve S immer in demselben System P von $n-3$ weitern Punkten.

Und umgekehrt, wenn die ε Punkte l fest gegeben sind, findet man aus (4) eindeutig ein Punktsystem P von $n-3$ Punkten p. Legt man sodann eine Curve K von der Ordnung $\frac{n+\varepsilon}{2}-1$, die im $(n-3)$fachen Punkte von S einen $\left(\frac{n+\varepsilon}{2}-2\right)$fachen Punkt hat, und durch die ε Punkte l und das Punktsystem P hindurchgeht, so schneidet diese K die Curve S noch in $n-2$ Punkten, für welche neben (4) auch (3), also auch das Gleichungssystem (2) besteht. In Bezug auf die Gleichungen (2), welche sich auf den Schnitt von S mit einer Curve n^{ter} Ordnung beziehen, die einen $(n-2)$fachen Punkt in dem

$(n-3)$ fachen Punkt von S hat, lässt sich aber der Satz des Abel'schen Theorems umkehren; das Bestehen dieser Gleichungen beweist, dass die Punkte v ein Punktsystem Q bilden, welches einem Punkte der vielfachen Geraden der Fläche entspricht. Jede Curve des Büschels von Curven K, welche hier bestimmt worden sind, schneidet daher S in solchen $n-2$ Punkten, die ein Punktsystem Q bilden, woraus der Satz folgt, der diese Systeme Q auffinden lehrt:

Zu irgend welchen festen Punkten l der Curve S, von der Anzahl ε, existiren auf der Curve S gewisse $n-3$, durch die Punkte l vollständig bestimmte Punkte p. Jede Curve K des Büschels von rationalen Curven der Ordnung $\frac{n+\varepsilon}{2}-1$, welche in dem $(n-3)$fachen Punkt von S einen $\left(\frac{n+\varepsilon}{2}-2\right)$fachen Punkt besitzen und durch die Punkte l und p einfach hindurchgehen, schneidet die Curve S noch in einem System Q von $n-2$ Punkten, welches einem Punkt der vielfachen Geraden der Fläche entspricht. Die einfach unendliche Schaar dieser Systeme Q stellt also die Abbildung der Punkte der vielfachen Geraden vor.

Es fragt sich nun, was diesen Sätzen auf der Fläche φ entspricht. Den Curven K von der Ordnung $\frac{n+\varepsilon}{2}-1$, mit einem $\left(\frac{n+\varepsilon}{2}-2\right)$fachen Punkt in dem $(n-2)$ fachen Fundamentalpunkt der Ebene, entsprechen auf der Fläche Raumcurven von der Ordnung

$$n\cdot\frac{n+\varepsilon-2}{2}-(n-2)\cdot\frac{n+\varepsilon-4}{2}=2n+\varepsilon-4,$$

welche

$$(n-1)\frac{n+\varepsilon-2}{2}-(n-3)\cdot\frac{n+\varepsilon-4}{2}=2n+\varepsilon-5$$

Punkte mit der vielfachen Geraden gemein haben. Es ist eine $(n+\varepsilon-2)$fach unendliche Schaar von rationalen Curven L.

Für ein gerades ε, also für $n=2m$, werden diese Curven L von Flächen der Ordnung $n-2+\frac{\varepsilon}{2}$ ausgeschnitten, welche die vielfache Gerade a zur $\left(n-3+\frac{\varepsilon}{2}\right)$fachen Geraden haben und durch diejenige rationale Curve C von der $(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung hindurchgehen, welche der dem $(n-2)$fachen Fundamentalpunkte entsprechenden Curve C adjungirt ist.

Für ein ungerades ε, für $n=2m+1$, legt man die Flächen der Ordnung $n-1+\frac{\varepsilon-1}{2}$, welche a zur $\left(n-2+\frac{\varepsilon-1}{2}\right)$fachen Geraden haben, und lässt sie noch durch irgend eine der Curven derjenigen einfach unendlichen Schaar von Curven $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung der Fläche hindurchgehen, welche der dem $(n-2)$fachen Fundamentalpunkt entsprechenden Curve C adjungirt ist.

Da hier bei der Abbildung eine der $2^{3n-2\varepsilon-5}$ Curven C der Fläche bevorzugt ist, so gibt es $2^{3n-2\varepsilon-5}$ solcher $(n+\varepsilon-2)$ fach unendlichen Schaaren von Raumcurven $(2n+\varepsilon-4)^{\text{ter}}$ Ordnung, die $2n+\varepsilon-5$ Punkte mit a gemein haben, auf der Fläche.

Ich wähle nun eine $(n+\varepsilon-2)$ fach unendliche Schaar, die einer Curve C zugeordnet ist, heraus, und schreibe den Curven dieser Schaar weiter vor, durch ε beliebig gewählte Punkte l' der vielfachen Geraden einfach hindurchzugehen. Die durch diese festen Punkte (bei festen Tangentenebenen) gehenden Curven bilden noch eine $(n-2)$ fach unendliche Schaar. Aber unter dieser Schaar gibt es eine einfach unendliche Schaar von Curven K', welche in der vielfachen Geraden einen $(n-2)$ fachen Punkt besitzen, und ihr entspricht in der Abbildung der Büschel der Curven K, welche durch ein Punktsystem Q und ein System von Punkten l, die l' entsprechen, hindurchgehen. Da diese Punkte l nun auf S ein Punktsystem P bestimmen, so folgt, dass alle Raumcurven K' der Fläche durch ein constantes, nur von den Punkten l' abhängiges, System Π von $n-3$ weitern festen Punkten von a hindurchgehen, und zwar so, dass auch die Tangenten der Curven in jedem dieser Punkte immer in der nämlichen Tangentenebene der vielfachen Geraden für jede Curve der Schaar liegen. Auf diese Weise gibt es, wenn die Zahl ε und die Punkte l' mit ihren Tangentenebenen fest gewählt sind, noch $2^{3n-2\varepsilon-5}$ Punktsysteme Π.

Unter diesen Curven K' gibt es solche mit zwei zusammenfallenden Zweigen in dem $(n-2)$ fachen Punkt. Dies tritt dann ein, wenn dieser Punkt ein Rückkehrpunkt der vielfachen Geraden a, d. h. ein solcher Punkt, in dem zwei der $n-2$ Tangentenebenen zusammenfallen, ist. Die Zahl dieser Rückkehrpunkte ist $4n-12$; denn jedem Werth λ des Parameters des Ebenenbüschels durch a entsprechen zwei Werthe μ des Parameters des Punktsystems von a, indem jeder der Kegelschnitte der Schaar a in zwei Punkten schneidet, und jedem Werthe von μ entsprechen $n-2$ Werthe von λ, welche die $n-2$ Tangentenebenen *eines* Punktes von a bestimmen. Man hat daher eine Gleichung vom Grade $n-2$ in λ, vom Grade 2 in μ, und die Discriminante dieser Gleichung, in Bezug auf λ genommen, ist vom Grade $4n-12$ für μ. Ebensoviel Curven des Büschels K der Bildebene gibt es, welche S berühren.

Es ist noch zu bemerken, dass eine Raumcurve K' dann in eine Gerade und eine Curve der Ordnung $2n+\varepsilon-5$ zerfällt, wenn die entsprechende ebene Curve K durch einen der $3n-4$ einfachen Fundamentalpunkte hindurchgelegt wird. Ausserdem gehen die Curven K' durch alle Knotenpunkte der Fläche einfach hindurch. Wir haben daher die folgenden Resultate:

Auf der vielfachen Geraden a der Fläche φ gibt es $4n - 12$ *Rückkehrpunkte, in denen je zwei der Tangentenebenen zusammenfallen.*

Nimmt man auf a ε *Punkte l mit fester Tangentenebene beliebig an* ($\varepsilon = 0, 2, 4 \ldots$ *für ein gerades* n, $\varepsilon = 1, 3, 5 \ldots$ *für ein ungerades* n), *so gibt es auf der Fläche* $2^{3n-2\varepsilon-5}$ *einfach unendliche Schaaren von rationalen Raumcurven der Ordnung* $(2n + \varepsilon - 4)$, *welche durch die Punkte l innerhalb der festen Tangentenebenen einfach hindurchgehen, welche ferner in irgend einem der Punkte der vielfachen Geraden einen* $(n - 2)$ *fachen Punkt besitzen, welche weiter durch je ein bestimmtes von* $2^{3n-2\varepsilon-5}$ *Systemen von* $n - 3$ *Punkten* Π *auch so hindurchgehen, dass die Zweige der Curven für jeden dieser Punkte in der nämlichen Tangentenebene liegen, und welche endlich durch die Knotenpunkte der Fläche hindurchgehen und noch* $\frac{n+\varepsilon}{2} - 2$ *Punkte mit je einer der* $2^{3n-2\varepsilon-5}$ *Curven C von der* $(n-2)^{\text{ten}}$ *Ordnung gemein haben.*

Jede dieser Schaaren enthält $4n - 12$ *solcher Curven, in deren* $(n - 2)$ *fachem Punkt zwei Zweige der Curve zusammenfallen, und diese singulären Punkte fallen in je einen der Rückkehrpunkte von a. Ferner gibt es in einer solchen Schaar* $3n - 4$ *Curven, welche in eine Gerade und eine Raumcurve* $(2n + \varepsilon - 5)^{\text{ter}}$ *Ordnung, die noch einen* $(n - 3)$ *fachen Punkt in a besitzt, zerfallen.*

§ 7.

Anwendungen. 1) Windschiefe Flächen n^{ter} Ordnung mit einer $(n-1)$ fachen Geraden.

Ich werde mich im Folgenden, in der Absicht, die praktische Anwendbarkeit der hier dargelegten Methode der Abbildung auf der Ebene nachzuweisen, mit drei specielleren Flächenarten beschäftigen, bei deren Abbildung die verschiedenen Theile der Methode zur Verwendung kommen; zuerst mit den windschiefen Flächen n^{ter} Ordnung mit einer $(n-1)$ fachen Geraden, um dabei durch successive Transformationen 2^{ter} Ordnung die möglichst niedrige Abbildung zu entwickeln; sodann mit der Fläche 5^{ter} Ordnung, welche eine Raumcurve 4^{ter} Ordnung erster Species zur Doppelcurve hat, um durch Projectionen die Fläche auf eine Fläche φ zurückzubringen, und endlich mit einer Fläche 6^{ter} Ordnung mit einer Doppelgeraden und doppelter Raumcurve 3^{ter} Ordnung, um die Schaar rationaler Curven 4^{ter} Ordnung dieser Fläche auf die Kegelschnittschaar einer Fläche φ zu reduciren.

Die windschiefen Flächen n^{ter} Ordnung mit einer $(n-1)$ fachen Geraden bildet man durch Projection von einem Punkte der vielfachen Geraden aus auf der Ebene ab. Dabei bildet sich die vielfache Gerade

a einer solchen Fläche Φ als $(n-1)$ facher Fundamentalpunkt A ab, und ausserdem existiren $n-1$ einfache Fundamentalpunkte B der Bildebene, welche den $n-1$ vom Projectionscentrum P ausgehenden Geraden der Fläche Φ entsprechen. Der dreifach unendlichen Schaar von ebenen Schnitten der Fläche entspricht eine dreifach unendliche Schaar von Curven n^{ter} Ordnung mit einem $(n-1)$ fachen Punkte in A und $n-1$ einfachen festen Punkten B, genommen aus der $(n+1)$ fachen Schaar solcher Curven der Bildebene. Dem Punkte P der vielfachen Geraden a entsprechen die $n-1$ Verbindungslinien der Punkte B mit dem Punkte A.

Durch eine Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung, deren Grundpunkte in den Punkt A und zwei der Punkte B hineinzulegen sind, gehen die betrachteten Curven n^{ter} Ordnung der Bildebene über in Curven von der Ordnung

$$2n-(n-1)-2=n-1,$$

mit einem festen $(n-2)$ fachen Punkte A' und $n-3$ festen einfachen Punkten B'. Dabei bildet sich die vielfache Gerade a der Fläche Φ auf der neuen Bildebene als eine Gerade ab, mit welcher jede der Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung $n-1$ Punkte gemein hat, die auf dieser Geraden eine gewisse Lage gegeneinander haben, welche von $n-2$ Bedingungen abhängt. Dem Punkte P von a entsprechen die $n-3$ Verbindungslinien des Punktes A' mit den Punkten B' und ausserdem zwei Punkte auf der a abbildenden Geraden.

Bei weiterer Transformation zweiter Ordnung gehen die Curven $(n-1)^{ter}$ Ordnung in solche von der $(n-2)^{ten}$ Ordnung über, mit einem festen $(n-3)$ fachen Punkte A'' und $n-5$ festen einfachen Punkten B''. Die vielfache Gerade a bildet sich als Kegelschnitt ab, welcher durch den Punkt A'' einfach hindurchgeht. Dem Punkte P entsprechen die $n-5$ Verbindungslinien von A'' mit den B'', und ausserdem vier Punkte auf dem a abbildenden Kegelschnitte.

Indem man so fortfährt, bis sich die Ordnung der die ebenen Schnitte abbildenden Curven nicht weiter erniedrigen lässt, findet man die folgende Abbildung:

1. für ein gerades $n: n=2m$. Man erhält, nach $m-1$ Transformationen zweiter Ordnung, für die Abbildung ebener Schnitte von Φ Curven von der $(m+1)^{ten}$ Ordnung, mit einem festen m fachen Punkte α und einem festen einfachen Punkte β. Die vielfache Gerade a von Φ bildet sich ab als Curve S von der Ordnung $m-1$, welche in α einen $(m-2)$ fachen Punkt besitzt. Dem Punkte P der vielfachen Geraden entspricht die Verbindungslinie der beiden Punkte α, β, und ausserdem $2m-2$ Punkte auf der Curve S.

2. für ein ungerades $n: n=2m+1$. Man erhält, nach m suc-

cessiven Transformationen zweiter Ordnung, für die Abbildung ebener Schnitte von Φ Curven von der Ordnung $m+1$, mit einem festen m fachen Punkte α. Die vielfache Gerade a bildet sich ab als Curve S von der Ordnung m, mit einem $(m-1)$fachen Punkte in α. Dem Punkt P entsprechen, wie jedem andern Punkte von a, $2m$ Punkte von S.

Ich bemerke, dass, wenn man von der Abbildung durch Curven n^{ter} Ordnung mit einem festen $(n-1)$ fachen Punkte A und $n-1$ festen einfachen Punkten B ausgeht, die Reihenfolge der hier benutzten Transformationen zweiter Ordnung äquivalent ist, für $n=2m$ mit einer einzigen Transformation m^{ter} Ordnung, deren Curven A zum $(m-1)$ fachen und $2m-2$ der Punkte B zu einfachen Punkten haben; für $n=2m+1$ mit einer Transformation $(m+1)^{ter}$ Ordnung, deren Curven A zum m fachen, die B zu einfachen Punkten haben.

Die Curvenschaaren, welche auf diesen windschiefen Flächen Φ liegen, kann man nach dem Princip classificiren, welches Herr Clebsch bei den windschiefen Flächen dritter Ordnung, Math. Annalen, Bd. 1, pag. 634 angewendet hat. Man kann nämlich alle Curven der Fläche, die wirkliche vielfache Punkte enthalten, als specielle Fälle solcher betrachten, die nur scheinbare Doppelpunkte besitzen. Indem man nun diese nach ihrer Ordnung und der Zahl ihrer scheinbaren Doppelpunkte von einander unterscheidet, findet man diese beiden Merkmale characterisirt durch die beiden Zahlen r, γ, wenn die entsprechende Curve der Bildebene von der Ordnung r ist und γ fach durch den Fundamentalpunkt α der Bildebene hindurchgeht.

Es sei zuerst der Fall, dass n *ungerade*, $n=2m+1$, behandelt.

Die durch (r, γ) characterisirten Curven auf der Fläche Φ seien als eine besondere *Familie* bezeichnet. Die Ordnung dieser Raumcurven sei N, ihr Geschlecht p, so dass:

$$\begin{cases} N=(m+1)r-m\gamma \\ p=\frac{r-1\,.\,r-2}{2}-\frac{\gamma\,.\,\gamma-1}{2}=\frac{r-1-\gamma\,.\,r-2+\gamma}{2}. \end{cases}$$

Wenn man diese Familien nach p ordnet und die Bezeichnungen:

$$\begin{cases} x=r-2+\gamma \\ y=r-1-\gamma \end{cases}$$

einführt, so hat man:

$$\begin{cases} r=\frac{x+y+3}{2}, \qquad \gamma=\frac{x-y+1}{2}, \\ N=\frac{x+(2m+1)y+2m+3}{2}, \qquad p=\frac{xy}{2}. \end{cases}$$

Hier ist $\gamma \leqq r-1$, für $r>1$, daher x und y nicht negativ, das eine gerade, das andere ungerade. Die sämmtlichen hier existirenden Familien sind die folgenden:

1. $r = 1$, $\gamma = 1$. Die Schaar der Geraden durch den Punkt α sind die Bilder der *Erzeugenden* der Fläche Φ.

2. $\gamma = r - 1$, $p = 0$. Dies giebt für die Fläche Φ eine *unendliche Schaar von Curvenfamilien* des Geschlechts 0. Von jeder Ordnung $N \geqq m + 1$ existirt eine solche Familie, deren Glieder jede Erzeugende *einmal* treffen; es giebt eine $2(N - m)$ fach unendliche Schaar solcher Curven N^{ter} Ordnung auf der Fläche. Hierher gehört auch noch, dem Punkte α entsprechend, *eine einzelne rationale Raumcurve* m^{ter} *Ordnung* der Fläche, die jede Erzeugende in *einem* Punkte trifft.

3. Ausserdem giebt es, jedem p entsprechend, nur eine *endliche Anzahl* von Curvenfamilien. Man erhält die entsprechenden Zahlen x, y, indem man die Zahl $2p$ auf alle möglichen Arten in einen geraden und einen ungeraden Factor zerlegt, unter Beachtung der Bedingung $y \leqq x + 1$.

Insbesondere ist hier die Zerlegung $x = 2p$, $y = 1$ zu erwähnen, die auf $r = p + 2$, $\gamma = p$ führt. Dieser Zerlegung entspricht auf der Fläche Φ eine $(3p + 5)$ fach unendliche Schaar von Raumcurven der Ordnung $2m + p + 2$, welche zwei Punkte mit jeder Erzeugenden gemein haben.

Für den Fall, dass n *gerade*, $n = 2m$, hat die Abbildung einen m fachen Punkt α und einen einfachen Fundamentalpunkt β. Dieser Punkt β stellt eine bestimmte Erzeugende der windschiefen Fläche vor, welche nur in der Abbildung, nicht auch auf der Fläche, besonders ausgezeichnet ist. Wenn man daher die allgemeinen Curven der Fläche untersucht, muss jede Curve der Bildebene von der Ordnung r, die in α einen γ fachen Punkt besitzt, in β einen $(r - \gamma)$ fachen Punkt besitzen; denn dann schneidet diese entsprechende Curve der Fläche *jede* der Erzeugenden in $(r - \gamma)$ Punkten und geht nicht durch den Punkt P der vielfachen Geraden a hindurch. Auch hier kann man daher die Curven der Fläche nach der Characteristik (r, γ) in Familien eintheilen und hat nun:

$$\begin{cases} N = (m+1)\,r - m\gamma - (r - \gamma) = mr - (m-1)\,\gamma \\ p = \dfrac{r-1 \,.\, r-2}{2} - \dfrac{\gamma \,.\, \gamma - 1}{2} - \dfrac{r-\gamma \,.\, r-\gamma-1}{2} = (\gamma - 1)\,(r - \gamma - 1). \end{cases}$$

Ordnet man wieder nach p und setzt

$$x = r - \gamma - 1\,,$$

so folgt:

$$r = x + \gamma + 1\,, \qquad p = x\,(\gamma - 1)\,, \qquad N = m\,(x + 1) + \gamma\,.$$

1. $p = 0$, $\gamma = 1$. Man erhält eine *unendliche Schaar von Curvenfamilien* des Geschlechts 0, von der Ordnung $N = m\,(r - 1) + 1$, wo r alle Werthe durchläuft. Darunter sind, für $r = 1$, die *Erzeu-*

genden der Fläche enthalten. Diese Curven schneiden die vielfache Gerade a in $N - r + 1$ Punkten und bilden eine $(2r - 1)$ fache Schaar.

2. $p = 0$, $\gamma = r - 1$. Man erhält eine *zweite unendliche Schaar von Curvenfamilien* des Geschlechts 0, von jeder Ordnung $N \geqq m$. Ihre Glieder treffen die Erzeugenden der Fläche in je *einem* Punkte. Eine Familie N bildet eine $2(N - m) + 1$ fach unendliche Schaar von Curven. Die Familie $N = m + 1$ ist schon sub 1. enthalten.

3. $p > 0$. Für jedes grössere p giebt es nur *eine endliche Anzahl von Curvenfamilien*, die man erhält, indem man p in zwei Factoren, x und $\gamma - 1$, zerlegt. Insbesondere existirt hier, für $x = p$, $\gamma = 2$, eine $(3p + 5)$ fach unendliche Schaar von Raumcurven der Ordnung $m(p + 1) + 2$, welche jede Erzeugende in $p + 1$ Punkten schneiden, und, für $x = 1$, $\gamma = p + 1$, eine $(3p + 5)$ fach unendliche Schaar von Raumcurven der Ordnung $2m + p + 1$, welche jede Erzeugende in 2 Punkten schneiden.

In Betreff der Abbildung der vielfachen Geraden a der Fläche Φ finden sich auch hier die am Anfange des § 6. gemachten Bemerkungen bestätigt. Für den Fall $n = 2m$ existirt hier auf der Fläche Φ ein Punkt P, einer der $2m - 1$ in einen Punkt der Geraden a zusammenfallenden Punkte, dem auf der Bildebene eine Gerade entspricht, welche die beiden Fundamentalpunkte α und β verbindet. Somit erhält die Function θ des § 6. einen linearen Factor, der abzusondern ist, und die Abbildung der vielfachen Geraden wird von der Ordnung

$$\frac{(2m - 4)(m + 1) + 4}{2m - 2} = m,$$

mit einem $\frac{(2m - 4)m + 2}{2m - 2} = (m - 1)$ fachen Punkte in α und einem $\frac{(2m - 4) + 2}{2m - 2} = 1$ fachen Punkte in β. Und da diese Abbildung zerfällt in die dem Punkt P entsprechende Gerade und eine weitere Curve S, so wird diese letztere Curve, als die eigentliche Abbildung von a, wie schon erwähnt, von der Ordnung $m - 1$, mit einem $(m - 2)$ fachen Punkte in α.

§ 8.

Anwendungen. 2) Fläche fünfter Ordnung mit einer Doppelcurve vierter Ordnung erster Species*).

Die Gleichung einer solchen Fläche Φ ist von der Form

*) Diese Fläche ist in jüngster Zeit auf einem neuen, von dem hier eingeschlagenen ganz verschiedenen Wege von Herrn Clebsch behandelt worden, Abhandlungen der Göttinger Societät, 1870, Band 15.

(1) $$\Phi \equiv Au^2 + 2Buv + Cv^2 = 0\,,$$

wo u, v Flächen zweiter Ordnung, A, B, C Ebenen sind. Da der Flächenbüschel

(2) $$v - \lambda u = 0$$

in einer Schaar von Kegelschnitten schneidet, die aus der Verbindung von (2) mit

(3) $$A + 2B\lambda + C\lambda^2 = 0$$

hervorgehen, so ist Φ auf einer Ebene abbildbar. Nach der früher entwickelten Methode projicirt man zu diesem Zwecke die Kegelschnitte zuerst auf die entsprechenden Ebenen eines Ebenenbüschels. Man führt dies dadurch aus, dass man die Coordinaten x der Fläche proportional setzt mit

$$\varrho x_1 = y_1\,, \qquad \varrho x_2 = y_2\,, \qquad \varrho x_3 = y_3\,, \qquad \varrho x_4 = k\,,$$

sodann k aus (2) und (3) für die diesen Gleichungen genügenden Werthsysteme von x bestimmt und endlich λ durch die Gleichung eines Ebenenbüschels

(4) $$y_4 - \lambda y_3 = 0$$

eliminirt. Da hier $v - \lambda u = 0$ selbst auf einer Ebene abbildbar ist, so kann man dieses Verfahren vereinfachen. Es seien u und v von der Form

$$u = x_4\,\varphi(x_1, x_2, x_3) - \psi(x_1, x_2, x_3)\,,$$
$$v = x_4\,\varphi'(x_1, x_2, x_3) - \psi'(x_1, x_2, x_3)\,,$$

wo φ, φ' lineare Functionen, ψ, ψ' Functionen zweiten Grades von x_1, x_2, x_3. Indem man von dem Punkte ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) aus projicirt, findet man:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= y_1 \left\{ \varphi'(y_1, y_2, y_3) - \lambda\varphi(y_1, y_2, y_3) \right\} \\
\varrho x_2 &= y_2 \left\{ \varphi'(y_1, y_2, y_3) - \lambda\varphi(y_1, y_2, y_3) \right\} \\
\varrho x_3 &= y_3 \left\{ \varphi'(y_1, y_2, y_3) - \lambda\varphi(y_1, y_2, y_3) \right\} \\
\varrho x_4 &= \qquad \psi'(y_1, y_2, y_3) - \lambda\psi(y_1, y_2, y_3)
\end{aligned}$$

und durch Elimination von λ mittelst $y_4 - \lambda y_3 = 0$:

(5) $$\left.\begin{aligned}
\varrho x_1 &= y_1 \left\{ y_3\,\varphi'(y) - y_4\,\varphi(y) \right\} = y_1\,S \\
\varrho x_2 &= y_2 \left\{ y_3\,\varphi'(y) - y_4\,\varphi(y) \right\} = y_2\,S \\
\varrho x_3 &= y_3 \left\{ y_3\,\varphi'(y) - y_4\,\varphi(y) \right\} = y_3\,S \\
\varrho x_4 &= \qquad y_3\,\psi'(y) - y_4\,\psi(y) \quad = \quad T
\end{aligned}\right\}.$$

Somit werden die x Functionen dritter Ordnung der y, und die Formeln (5) vermitteln den eindeutigen Uebergang von der Fläche (1) zur Fläche

(6) $$\Phi' \equiv Ay_3^2 + 2B\,y_3\,y_4 + C\,y_4^2 = 0\,,$$

wo in A, B, C die x durch (5) zu eliminiren sind. Die Umkehrung geschieht eindeutig durch die Formeln dritter Ordnung

$$y_1 = x_1 u, \quad y_2 = x_2 u, \quad y_3 = x_3 u, \quad y_4 = x_3 v.$$

Die Fläche Φ' (6) ist von der fünften Ordnung und enthält $(y_3 = y_4 = 0)$ als dreifache Gerade. Sie hat ferner in $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ einen Doppelpunkt. Die Abbildung der Fläche Φ' und damit auch die der Fläche Φ kann daher nach § 5. ausgeführt werden.

Indess zeigen die Gleichungen (5) und (6), dass man die Abbildung von Φ noch einfacher durchführen kann, wenn man die Coordinatenebene $x_3 = 0$ mit der Ebene $C = 0$, welche irgend eine der die Kegelschnittschaar aus Φ ausschneidenden Ebenen vorstellt, zusammenfallen lässt. Denn dann hebt sich aus (6) noch der Factor y_3 heraus, und der Fläche Φ entspricht vermöge (5) Punkt für Punkt eindeutig die Fläche

$$\Phi'' \equiv A y_3 + 2 B y_4 + S y_4^2 = 0 . \tag{6}$$

Diese Fläche Φ'' ist nur von der vierten Ordnung und enthält $(y_3 = y_4 = 0)$ als Doppelgerade $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ als einfachen Punkt. Ihre Coordinaten drücken sich daher aus als ganze homogene Functionen vierter Ordnung dreier Parameter, mit einem doppelten und 8 einfachen Fundamentalpunkten.

Um nun die Abbildung der Fläche Φ zu erhalten, muss man auf Φ'' die Curven aufsuchen, welche den ebenen Schnitten von Φ entsprechen. Zu diesem Zwecke bemerke ich:

1. Die Gerade $(y_3 = y_4 = 0)$ gehört S und T einfach, der Fläche Φ'' doppelt an. Der Punkt $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ ist einfacher Punkt der Fläche Φ'' und des Hyperboloids S, ein Doppelpunkt der Fläche T. Die Flächen S und T schneiden sich ferner noch in einer Raumcurve fünfter Ordnung, K, welche in $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ einen Doppelpunkt besitzt und welche mit der Geraden $(y_3 = y_4 = 0)$ drei Punkte gemein hat. Die Fläche Φ'' enthält die Curve K einfach. Die Flächen dritter Ordnung der Schaar (5) verhalten sich wie T.

2. Diese Charakteristik der Functionen T genügt, um immer von Φ'' aus zu einer Fläche Φ zu führen. Denn zwei solcher Flächen dritter Ordnung T schneiden sich noch in einer beweglichen Curve dritter Ordnung, die in $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ einen Doppelpunkt besitzt und die Gerade $(y_3 = y_4 = 0)$ einmal, die Curve K noch dreimal trifft. Die Curve dritter Ordnung schneidet daher die Fläche Φ'' noch in

$$3 \cdot 4 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 = 5$$

beweglichen Punkten ausserhalb K und $(y_3 = y_4 = 0)$, daher wird Φ von der fünften Ordnung, da die Flächen T, als eine dreifach unendliche Schaar, zur Transformation zu verwenden sind.

3. Einem beliebigen ebenen Schnitt von Φ entspricht somit auf Φ'' eine Curve U von der Ordnung $3 \cdot 4 - 5 - 2 = 5$, deren Abbildung zu suchen ist. Den ebenen Schnitten von Φ'' mögen, in der Abbildung auf einer Ebene, Curven vierter Ordnung entsprechen, die im Punkte a einen Doppelpunkt, in den Punkten $b_1, b_2, .., b_8$ einfache Punkte besitzen.

Die Abbildung von K ergiebt sich aus der des Schnittes von S mit Φ''. $S = 0$ geht noch durch eine einfache Gerade von Φ''; denn vermöge $S=0$ zerfällt $\Phi''=0$ in $T=0$ und in eine durch $(y_3=y_4=0)$ gehende Ebene. Diese Gerade möge sich auf der Ebene durch den Punkt b_8 abbilden. Ferner geht S durch die Doppelgerade $(y_3=y_4=0)$, deren Bild die durch $a, b_1, b_2, .., b_8$ gehende Curve dritter Ordnung ist. Der weitere Schnitt von S mit Φ'', die Curve K, bildet sich daher ab als Curve von der Ordnung $2 \cdot 4 - 3 = 5$, die in a einen $2 \cdot 2 - 1 = 3$ fachen, in b_8 einen $2 \cdot 1 - 1 + 1 = 2$ fachen und in $b_1, b_2, .., b_7$ $2 \cdot 1 - 1 =$ einfache Punkte hat.

Die ebenen Schnitte von Φ, oder die Curven U auf Φ'', können jetzt auf der Ebene abgebildet werden. Die Abbildungen von Schnittcurven von Flächen dritter Ordnung mit Φ'' sind Curven zwölfter Ordnung, mit 6 fachem Punkte in a, 3 fachen Punkten in den b.

Da aber die Flächen T die Doppelgerade und die Curve K einfach enthalten sollen, so geht hievon deren Bild ab:

eine Curve dritter Ordnung, mit 1 fachem Punkte in a, einfachen Punkten in den b, und

eine Curve fünfter Ordnung, mit 3 fachem Punkte in a, Doppelpunkte in b_8, einfachen Punkten in $b_1, b_2, \ldots b_7$.

Somit bilden sich die U ab als Curven von der Ordnung $12-3-5=4$, mit einem $6 - 1 - 3 = 2$ fachen Punkte in a, nur mit $3 - 1 - 2 = 0$ fachem Punkte in b_8 und $3 - 1 - 1 = 1$ fachem Punkte in $b_1, b_2, .. b_7$. Durch den dem Punkte $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ auf der Ebene entsprechenden Punkt gehen diese Curven nicht hindurch, da die U durch den Punkt $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ nicht mehr gehen.

Die ebenen Schnitte von Φ bilden sich ab als Curven vierter Ordnung mit einem doppelten Fundamentalpunkte und 7 einfachen Fundamentalpunkten.

Diese Abbildung ist auch die möglichst niedrige. Umgekehrt entspricht, bei beliebiger Lage der Fundamentalpunkte, jeder solchen Abbildung eine Fläche fünfter Ordnung der betrachteten Art.

Diese Abbildung lehrt, dass auf der Fläche Φ eine endliche Anzahl von Kegelschnitten existirt, welche jeden Kegelschnitt der auf Φ liegenden Schaar in je einem Punkte schneiden. Die Kenntniss dieser Kegelschnitte würde daher direct zu einer Abbildung geführt haben. Der unmittelbare Nachweis der Existenz derselben würde aber,

wie die Betrachtung der 7 zerfallenden Kegelschnitte der Schaar zeigt, die Lösung des folgenden geometrischen Problems erfordert haben:

Wenn eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species und 5 ihrer Sehnen gegeben sind, soll die Anzahl der Kegelschnitte bestimmt werden, welche die Curve in drei Punkten, die Sehnen je einmal treffen.

Eine rein geometrische Lösung dieses Problems (Anzahl = 2) giebt Herr Lüroth, Math. Annalen, Bd. 3. Seite 124.

Indessen bemerke ich, dass es hier, wo dieses Problem im Zusammenhange mit einer Abbildungsaufgabe auftritt, nicht nöthig wird, dasselbe unabhängig von diesem Zusammenhange zu lösen. Vielmehr bietet dieser Zusammenhang grosse Vortheile, wenn man sich zugleich des folgenden algebraischen Satzes bedient:

Wenn ein Problem auf eine Reihe von algebraischen Gleichungen führt, deren Anzahl gleich der der darin enthaltenen Unbekannten ist, und wenn für eine specielle Annahme der Constanten des Problems eine endliche Zahl eigentlicher Lösungen existirt und durch die Specialisirung nicht unendlich viele weitere Lösungen hereingebracht werden, so hat auch der allgemeine Fall eine endliche Anzahl eigentlicher Lösungen.

Denn es fragt sich im allgemeinen Falle nur, ob die Gleichungen einander nicht widersprechen, oder ob nicht eine schon eine Folge der andern ist. Im letztern Falle treten unendlich viele Lösungen auf und das Gleiche tritt im erstern Falle bei einer Specialisirung ein, durch welche das Widersprechende aufgehoben wird.

Das oben aufgestellte geometrische Problem führt nun auf 8 Bedingungen für die achtfach unendliche Schaar von Kegelschnitten, die im Raume existiren, und jeder Kegelschnitt, welcher den Bedingungen genügt, liegt auf der Fläche fünfter Ordnung, welche die Curve vierter Ordnung als Doppelcurve und die 5 Sehnen einfach enthält. Hier bietet sich nun von selbst die Fläche fünfter Ordnung zur Untersuchung des möglicherweise speciellen Falles dar, dass ein den Bedingungen genügender Kegelschnitt wirklich existirt.

Man kann also so verfahren, dass man die Existenz eines solchen Kegelschnitts supponirt, wodurch nur eine Specialisirung der Fläche fünfter Ordnung und der Lage der Sehnen gegen die Curve herbeigeführt werden könnte. Unter dieser Voraussetzung lässt sich aber die Fläche fünfter Ordnung abbilden. In der Abbildung hat man nun das Mittel, mit Leichtigkeit zu entscheiden, ob eine unendliche oder endliche Anzahl von Kegelschnitten auf der Fläche existirt, welche die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllen. Wenn sich, unter Berücksichtigung der möglichen uneigentlichen Lösungen, diese Anzahl als eine *endliche* findet (wie hier = 2), so wird durch diesen Umstand bewiesen, dass auch der allgemeine Fall eine endliche Anzahl von Lö-

sungen hat (hier ebenfalls $= 2$, da keine uneigentlichen Lösungen nachzuweisen sind), dass also überhaupt die abgebildete Fläche schon die allgemeinste ihrer Art war.

Da es bei den meisten Abbildungsaufgaben nicht schwer ist, zu einem zugehörigen geometrischen Problem, analog dem oben für die Fläche Φ von der fünften Ordnung oder dem § 4. für die Flächen n^{ter} Ordnung mit $(n-2)$ facher Geraden aufgestellten Problem, zu gelangen, so ist das eben gegebene Verfahren für die praktische Durchführung der Abbildung gegebener Flächen sehr anwendbar.

§ 9.

Anwendungen. 3) Fläche F von der sechsten Ordnung mit einer doppelten Raumcurve dritter Ordnung und einer diese nicht schneidenden Doppelgeraden.

Diese Fläche F lässt sich in die Form setzen:

$$(1) \qquad F \equiv \sum_{i,k} A_{ik}\, y_i\, y_k = 0\,, \quad (i, k = 1, 2, 3)$$

wo

$$(2) \qquad \begin{cases} y_1 = L_2\, M_3 - L_3\, M_2 \\ y_2 = L_3\, M_1 - L_1\, M_3 \\ y_3 = L_1\, M_2 - L_2\, M_1 \end{cases}$$

und

$$(3) \qquad A_{ik} = \alpha_{ik}\, x_3^{\,2} + 2\,\beta_{ik}\, x_3\, x_4 + \gamma_{ik}\, x_4^{\,2}\,,$$

wobei die L_i, M_i lineare homogene Functionen von x_1, x_2, x_3, x_4, die α_{ik}, β_{ik} Constanten sind. Die Fläche F lässt sich auf einer Ebene eindeutig abbilden; denn jede Ebene des Ebenenbüschels $x_4 - \lambda x_3 = 0$ schneidet die Fläche in *einer* beweglichen *rationalen* Curve vierter Ordnung mit drei Doppelpunkten.

In der Form (1), (2), (3) enthält die Fläche F noch 18 Constanten homogen. Ich will zuerst nachweisen, dass die Doppelcurve dritter Ordnung und die Doppelgerade wirklich $\frac{7 \cdot 8 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3} - 18 = 66$ Constanten absorbiren.

Wegen der doppelten Raumcurve dritter Ordnung gilt immer die Form (1), (2), oder, was dasselbe ist, die Form:

$$F' \equiv \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & L_1 & M_1 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & L_2 & M_2 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & L_3 & M_3 \\ L_1 & L_2 & L_3 & 0 & 0 \\ M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0\,,$$

wo $A_{ik} = A_{ki}$. Es fragt sich, wie viele Constanten diese Gleichung noch enthält, wenn man die A_{ik} als allgemeinste Flächen zweiter

Ordnung annimmt. Man erkennt aber leicht, indem man die beiden letzten Vertikalreihen der Determinante, mit A_1, B_1 multiplicirt, zur ersten addirt, die beiden letzten Horizontalreihen, mit C_1, D_1 multiplicirt, zur ersten addirt, etc., dass man, ohne den Werth der Determinante zu ändern, auch setzen kann

$$\begin{aligned}
&A_{11}+(A_1+C_1)L_1+(B_1+D_1)M_1 && \text{statt } A_{11}\\
&A_{22}+(A_2+C_2)L_2+(B_2+D_2)M_2 && \text{„ } A_{22}\\
&A_{33}+(A_3+C_3)L_3+(B_3+D_3)M_3 && \text{„ } A_{33}\\
&2A_{23}+(A_3+C_3)L_2+(B_3+D_3)M_2+(A_2+C_2)L_3+(B_2+D_2)M_3 && \text{„ } 2A_{23}\\
&2A_{31}+(A_1+C_1)L_3+(B_1+D_1)M_3+(A_3+C_3)L_1+(B_3+D_3)M_1 && \text{„ } 2A_{31}\\
&2A_{12}+(A_2+C_2)L_1+(B_2+D_2)M_1+(A_1+C_1)L_2+(B_1+D_1)M_2 && \text{„ } 2A_{12}
\end{aligned}$$

wo die A_i, B_i, C_i, D_i lineare Ausdrücke vorstellen. Durch eine Bestimmung dieser Grössen lassen sich somit in den Hyperboloiden A_{11}, A_{22}, A_{33} je 7 Constanten zerstören. Indess enthalten dann die (A_i+C_i), (B_i+D_i) immer noch je eine willkürliche Grösse, und man kann nachher noch setzen:

$$\begin{aligned}
&2A_{23}+k\,(L_2M_3-L_3M_2) && \text{statt } 2A_{23}\\
&2A_{31}+k'\,(L_3M_1-L_1M_3) && \text{„ } 2A_{31}\\
&2A_{12}-(k+k')\,(L_1M_2-L_2M_1) && \text{„ } 2A_{12}.
\end{aligned}$$

Somit kann man in diesen Flächen A_{23}, A_{31}, A_{12} dann noch 2 weitere Constanten zerstören, und die Fläche F' enthält noch $6\,.\,10 - 3\,.\,7 - 2 = 37$ Constanten homogen. Eine Doppelgerade absorbirt aber nach § 4. in einer Fläche sechster Ordnung 19 Constanten, überhaupt werden also $\frac{7\,.\,8\,.\,9}{1\,.\,2\,.\,3} - 37 + 19 = 66$ Constanten absorbirt.

Die *Abbildung* der Fläche F nach unserer Methode macht sich hier sehr einfach. Wir betrachten die Schaar rationaler Curven vierter Ordnung, welche von dem Ebenenbüschel ausgeschnitten wird, der seine Achse in der Doppelgeraden a der Fläche hat. Durch die Doppelcurve dritter Ordnung, A, der Fläche werde die zweifach unendliche Schaar von Hyperboloiden gelegt, welche überhaupt durch A hindurchgehen können. In jeder Ebene des Büschels wird dadurch eine zweifach unendliche Schaar von Kegelschnitten bestimmt, die zu Basispunkten die drei Punkte haben, in welchen die Ebene von der Curve A geschnitten wird. Die Transformation, zu welcher diese Schaar führt, ist daher eine Cremona'sche *Transformation zweiter Ordnung* und *direct und eindeutig umkehrbar*. Durch sie wird die ganze Ebene des Büschels eindeutig auf der entsprechenden Ebene eines zweiten Ebenenbüschels abgebildet, wobei der rationalen Curve vierter Ordnung, welche ihre drei Doppelpunkte in den drei Basispunkten der Transformationscurven besitzt, ein *Kegelschnitt* der zweiten

Ebene entspricht. Die durch diese Kegelschnitte erzeugte Fläche wird von der *vierten Ordnung, mit einer Doppelgeraden und einem Doppelpunkt*, und ihre Abbildung ist bekannt.

Um dieses analytisch nachzuweisen, benutze ich aus der zweifach unendlichen Schaar von Hyperboloiden, welche durch A gehen, die drei oben mit y_i bezeichneten, aus welchen sich die übrigen linear zusammensetzen:

$$y_1 = L_2 M_3 - L_3 M_2$$
$$y_2 = L_3 M_1 - L_1 M_3$$
$$y_3 = L_1 M_2 - L_2 M_1$$

und füge den Ebenenbüschel

$$y_4 - \lambda y_3 = 0$$

hinzu. Dieser Büschel, mit dem Büschel $x_4 - \lambda x_3 = 0$ verbunden, giebt die Relation

$$x_3 y_4 - x_4 y_3 = 0, \tag{4}$$

und man erhält die Transformationsformeln:

$$\left\{\begin{array}{l} \varrho y_1 = x_3 (L_2 M_3 - L_3 M_2) \\ \varrho y_2 = x_3 (L_3 M_1 - L_1 M_3) \\ \varrho y_3 = x_3 (L_1 M_2 - L_2 M_1) \\ \varrho y_4 = x_4 (L_1 M_2 - L_2 M_1), \end{array}\right. \tag{5}$$

welche den Uebergang von der Fläche (1) zu einer neuen Fläche φ bewerkstelligen. Diese Fläche φ ergiebt sich, indem man die x aus (1) und (5) eliminirt, was hier direct durch Einsetzen von (4) und (5) in (1) geschehen kann. Die Fläche φ wird dann

$$\varphi \equiv \sum_{i,k} A_{ik} y_i y_k = 0 \quad , \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{6}$$

wo

$$A_{ik} = \alpha_{ik} y_3^2 + 2\beta_{ik} y_3 y_4 + \gamma_{ik} y_4^2, \tag{7}$$

eine Fläche vierter Ordnung, die $(y_3 = y_4 = 0)$ als Doppelgerade, $(y_1 = y_2 = y_3 = 0)$ als Doppelpunkt besitzt. Die Formeln (2) oder (5) lassen sich aber direct umkehren. Man hat zuerst

$$\left\{\begin{array}{l} \sum_i L_i y_i = \sum_k \lambda_k x_k = 0 \\ \sum_i M_i y_i = \sum_k \mu_k x_k = 0 \end{array}\right. \tag{8}$$

$$(i = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, 4),$$

wobei

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_k = \sum_i l_{ki} y_i \\ \mu_k = \sum_i m_{ik} y_i . \end{array}\right.$$

Fügt man noch $y_4 x_3 - y_3 x_4 = 0$ hinzu, so ergiebt die Elimination der x:

$$\sigma x_k = f_k = \frac{\partial \Delta}{\partial a_k}, \tag{9}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & -y_4 & y_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 \end{vmatrix} . \tag{10}$$

Die Formeln (5) und (9) geben den Uebergang von F zu φ und von φ zu F. Ich betrachte jetzt die Abbildung von F auf φ näher.

Die Transformationsflächen f_k in (9) haben mit der Fläche φ die Doppelgerade ($y_3 = y_4 = 0$) gemein, der auf F der Schnitt des Hyperboloides $L_1 M_2 - L_2 M_1 = 0$, eine Raumcurve sechster Ordnung vom Geschlecht 1, entspricht. Ferner hat jede der 4 Functionen f_k in dem Doppelpunkt von φ selbst einen Doppelpunkt. Diesem Doppelpunkt von φ muss eine rationale Curve von F entsprechen, und in der That zeigt (5), dass dies die rationale Curve vierter Ordnung ist, welche die Ebene $x_3 = 0$ aus F ausschneidet. Aber bei diesem Uebergange von F zu φ giebt es noch weitere Fundamentalpunkte auf φ. Denn die drei Flächen $f_1 = 0$, $f_2 = 0$, $\varphi = 0$ schneiden sich, nach Salmon's Raumgeometrie (Fiedler's Uebersetzung, Theil II., pag. 123) ausser der Doppelgeraden von φ noch in 24 Punkten, von denen indess 8 in den Doppelpunkt ($y_1 = y_2 = y_3 = 0$) von φ fallen. Für die übrigen 16 Punkte, für die $\Sigma f_k \lambda_k = 0$ und $\Sigma f_k \mu_k = 0$ ist, hat man also

$$(\lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4)(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) = 0$$
$$(\mu_3 y_3 + \mu_4 y_4)(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) = 0 .$$

Wenn $\lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 = 0$ und $\mu_3 y_3 + \mu_4 y_4 = 0$, so verschwinden auch f_1 und f_2, ohne dass f_3 und f_4 verschwinden. Nun schneiden sich die beiden Hyperboloide

$$\lambda_3 y_3 + \lambda_4 y_4 = 0 , \qquad \mu_3 y_3 + \mu_4 y_4 = 0$$

und die Fläche φ ausser der Doppelgeraden von φ in noch 8 Punkten, von denen 2 in den Punkt ($y_1 = y_2 = y_3 = 0$) fallen. Für die übrigen $16 - (8 - 2) = 10$ Punkte muss $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1$, also f_3 und f_4 verschwinden. *Diese 10 Punkte sind somit einfache Fundamentalpunkte der Fläche φ.*

Diesen 10 Fundamentalpunkten entsprechen, da die f_k einfach verschwinden, *Gerade* der Fläche F, welche der Schaar von rationalen Curven vierter Ordnung angehören. Es ist auch geometrisch leicht, ihre Existenz nachzuweisen. Denn die Sehnen der Doppelcurve A von F, welche zugleich die Doppelgerade a schneiden, erzeugen eine windschiefe Fläche vierter Ordnung, welche A zur Doppelcurve und a zur einfachen Geraden hat. Der Schnitt dieser Fläche mit F ist, ausser A und a, eine Curve zehnter Ordnung, welche hier, da F von den

Erzeugenden der windschiefen Fläche ausser A und a nicht mehr geschnitten wird, in 10 Gerade zerfällt.

Unter der Schaar Σ von rationalen Raumcurven vierter Ordnung auf F giebt es ausser den 10 Curven, die je in eine Gerade und eine rationale Curve dritter Ordnung zerfallen, noch weitere zerfallende Curven. Den 6 Ebenen des Ebenenbüschels entsprechend, welche φ in Geradenpaaren schneiden, schneiden 6 *Ebenen* des durch a gehenden Ebenenbüschels die Fläche F in *Kegelschnittpaaren*. Den beiden *Geraden* auf φ, die durch den Doppelpunkt von φ gehen, entsprechen auf F *zwei Punkte* auf der den Doppelpunkt abbildenden Curve vierter Ordnung.

Noch ist zu dieser Abbildung von F auf φ zu bemerken, dass man, wenn die Fläche φ mit Doppelgeraden b und Doppelpunkt P gegeben ist, die 10 einfachen Fundamentalpunkte dieser Fläche durchaus nicht beliebig auf φ annehmen darf, wenn sie das Bild einer Fläche F vorstellen soll. Denn den Abbildungsfunctionen dritter Ordnung (9) könnte man nur die Bedingungen auflegen, b einfach zu enthalten, in P einen Doppelpunkt zu besitzen und durch 8 Punkte von φ hindurchzugehen, wenn sie nicht linear von einander abhängen sollen. Die 10 Punkte müssen auf der Schnittcurve von φ mit einem Kegel $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 0$ liegen und dabei noch ein *Schnittpunktsystem* bilden, das ich unten, bei der Abbildung auf der Ebene, näher untersuchen werde.

Wir können schon hier aus der Kenntniss der Geometrie der Fläche φ eine Reihe von Eigenschaften der Fläche F angeben.

Die Eigenschaft von φ, eine Anzahl von 32 Kegelschnitten zu enthalten, die durch den Knotenpunkt gehen und mit der Doppelgeraden je *einen* Punkt gemein haben, hat zur Abbildung dieser Fläche auf der Ebene geführt. Nach den Formeln (5) entsprechen aber den durch den Knotenpunkt gehenden ebenen Schnitten von φ auf der Fläche F die Schnitte der zweifach unendlichen Schaar von Hyperboloiden, die man durch die Doppelcurve A von F legen kann, d. h. Raumcurven sechster Ordnung vom Geschlecht 1, die zwei wirkliche und 7 scheinbare Doppelpunkte besitzen. Diese Curven haben mit jedem Glied der Schaar Σ von rationalen Curven vierter Ordnung *zwei* Punkte gemein. Speciell entsprechen aber den 16 zerfallenden ebenen Schnitten von φ auf F 16 Curven sechster Ordnung, die in je 2 Raumcurven dritter Ordnung zerfallen müssen, und diese Curven schneiden die Glieder der Schaar Σ in je einem Punkte.

Auf der Fläche F existiren 32 Raumcurven dritter Ordnung C, welche die Glieder der Schaar Σ in je einem Punkte schneiden. Je zwei dieser Curven liegen mit der Doppelcurve dritter Ordnung, A, auf einem Hyperboloid und gehen daher durch dieselben beiden Punkte der

Doppelgeraden a von F hindurch. Diese Curven dritter Ordnung haben mit A je fünf Punkte gemein; die durch A gehenden Hyperboloide, die sie ausschneiden, berühren F ausser A noch zweipunktig. Die Curven C schneiden die 10 Geraden der Fläche nicht; dagegen trifft jede dieser Curven je einen Kegelschnitt aus jedem der oben erwähnten 6 Kegelschnittpaare einmal und die ergänzende Curve C immer die andern Kegelschnitte der Paare. Und zwar gibt es, bei beliebiger Wahl von 5 der Kegelschnitte, die aus 5 Paaren zu nehmen sind, immer eine Curve C, welche diese 5 trifft, während der Kegelschnitt des sechsten Paares dadurch bestimmt ist.

Die Analogie dieser Eigenschaften mit denen der Fläche (6) ist auffällig, und auch bei den spätern Entwicklungen wird sie mehr hervortreten, als die durch die 10 weitern Fundamentalpunkte bewirkte Verschiedenheit.

§ 10.

Abbildung der Fläche F auf der Ebene.

Die Existenz der Curven dritter Ordnung C auf der Fläche F führt zur Abbildung dieser Fläche auf der Ebene. Denn irgend eine dieser Curven schneidet die Curven der Schaar Σ in je *einem* Punkte. Man kennt so auf jeder Curve vierter Ordnung der Schaar die drei Doppelpunkte und einen einfachen Punkt eindeutig, und jedes Glied eines Kegelschnittbüschels, der durch diese 4 Punkte hindurchgelegt wird, schneidet die Curve vierter Ordnung in *einem* beweglichen Punkte.

Die hiedurch angezeigte Abbildung ist identisch mit der, auf welche der Durchgang durch die Fläche φ und die bekannte Abbildung von φ führt. Um den Kegelschnittbüschel zu erhalten, betrachtet man wieder die Hyperboloide durch die Doppelcurve A. Irgend eine der Curven dritter Ordnung, C, schneidet jedes dieser Hyperboloide noch in *einem* beweglichen Punkte, und jedem solchen Punkte entspricht *eine* Curve der Schaar Σ. Legt man daher durch einen Punkt der Curve dritter Ordnung, C, und durch die Doppelcurve A die einfach unendliche Schaar von Hyperboloiden, von denen dann jedes Glied die durch den betrachteten Punkt von C gehende Curve der Schaar Σ in noch *einem* beweglichen Punkte schneidet, so werden die Coordinaten dieser Curve der Schaar rationale Functionen des Parameters des Hyperboloidenbüschels. Auf diese Weise entspricht jedem der durch A gehenden Hyperboloide *ein* Punkt der Fläche F, da jedes Hyperboloid auf C *einen* Punkt, dieser Punkt eine der Curven der Schaar Σ, und das Hyperboloid auf dieser Curve noch *einen* beweglichen

Punkt bestimmt; und umgekehrt entspricht einem Punkte der Fläche nur eines der Hyperboloide; denn zu jedem Punkt gehört in der Ebene der Curve aus Σ, auf welcher er liegt, *ein* Punkt von C, und durch diese beiden Punkte und durch A kann nur *ein* Hyperboloid gelegt werden.

Die Coordinaten der Fläche F drücken sich daher auch als rationale Functionen der beiden Parameter der doppelt unendlichen Schaar von Hyperboloiden aus, welche man durch die Doppelcurve A von F legen kann. Denkt man sich noch eine beliebige Ebene im Raume, so entspricht jedem dieser Hyperboloide ihr Schnitt mit dieser Ebene, der durch die drei festen Punkte geht, in welchen A von der Ebene geschnitten wird, und umgekehrt kann man durch einen Kegelschnitt, welcher durch 3 Punkte einer Raumcurve dritter Ordnung geht, nur ein Hyperboloid legen, das zugleich diese Curve enthält.

Die hier gefundene Abbildung der Fläche F auf der Ebene geschieht daher so, dass jedem *Punkte von F* ein *Kegelschnitt der Ebene* entspricht, *der durch 3 feste Punkte geht.* Diese Kegelschnitte bilden, wie die Punkte der Fläche, eine zweifach unendliche Schaar.

Im Speciellen entspricht hiebei jeder der 10 schon betrachteten Geraden der Fläche ein einfacher Fundamentalkegelschnitt der Ebene, da die Hyperboloide eine solche Gerade ganz enthalten müssen, wenn sie noch durch einen Punkt ausser A auf derselben gehen. Ferner entsprechen den 6 Kegelschnitten der Fläche F, welche die Curve C trifft, doppelte Fundamentalkegelschnitte der Ebene; denn diese 6 Kegelschnitte schneiden A und C schon in 4 Punkten. Endlich entspricht noch der C ergänzenden Curve dritter Ordnung auf F ein dreifacher Fundamentalkegelschnitt der Ebene, denn alle Punkte dieser Curven führen auf dasselbe Hyperboloid, das durch A und C gehende. *So enthält die Abbildung einen dreifachen, 6 doppelte und 10 einfache Fundamentalkegelschnitte.* Ich bemerke noch, dass die Kegelschnitte, welche den Punkten einer Curve der Schaar Σ entsprechen, einen *Punkt* umhüllen, nämlich den Punkt, in welchem die Ebene von der Sehne von A getroffen wird, die durch den Schnitt von C mit der Curve der Schaar geht.

Um diese Abbildung analytisch durchzuführen, sei zuerst die Fläche φ nach § 5. durch die Formeln abgebildet

$$(11) \qquad \left.\begin{aligned} \varrho\, y_1 &= \xi_1\, Q_1 \\ \varrho\, y_2 &= \xi_1\, Q_2 \\ \varrho\, y_3 &= \xi_1\, Q_3 \\ \varrho\, y_4 &= \xi_2\, Q_3 \end{aligned}\right\},$$

wo die Q Curven dritter Ordnung sind, welche 7 Punkte, darunter den Punkt $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$, gemein haben. Ausserdem existiren noch

zwei Fundamentalpunkte, die dem Schnitt von $\xi_1 = 0$, $Q_3 = 0$ angehören.

Setzt man diese Formeln in (9), (10) des § 9. ein, indem man zugleich die gemeinschaftlichen Factoren in σ eingehen lässt, so drücken sich die Coordinaten der Fläche F auf die folgende Weise rational und homogen durch drei Parameter ξ_1, ξ_2, ξ_3 aus:

$$\sigma\, x_k = f_k = \frac{\hat{c}\,\Delta}{\hat{c}\,\alpha_k} \tag{12}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 0 & -\xi_2 & \xi_1 \\ \Sigma l_{1i} Q_i & \Sigma l_{2i} Q_i & \Sigma l_{3i} Q_i & \Sigma l_{4i} Q_i \\ \Sigma m_{1i} Q_i & \Sigma m_{2i} Q_i & \Sigma m_{3i} Q_i & \Sigma m_{4i} Q_i \end{vmatrix} \tag{13}$$

$$(i = 1, 2, 3; \quad k = 1, 2, 3, 4).$$

Die Functionen f_k sind *Functionen siebenter Ordnung* von ξ_1, ξ_2, ξ_3, welche den Punkt $(\xi_1 = \xi_2 = 0)$ zum *dreifachen* und die weitern 6 Punkte, welche die Q_i gemeinschaftlich haben, zu *doppelten* Fundamentalpunkten haben. Ausserdem entsprechen den 10 Fundamentalpunkten von φ auch hier 10 Punkte der Ebene, so dass die Abbildung von F noch 10 *einfache* Fundamentalpunkte hat. Es können nun keine weitern Fundamentalpunkte in der Abbildung von F vorhanden sein; denn den beiden Punkten, in welchen $\xi_1 = 0$ und $Q_3 = 0$ sich noch schneiden, entsprechen nur auf φ Gerade, auf F selbst aber wieder Punkte, und die Abbildung von F auf φ hat nach dem Obigen keine weitern Fundamentalpunkte.

Dasselbe kann man auch direct aus (12), (13) ersehen. Denn ausser den 7 Punkten, welche die Q_i gemein haben, schneiden sich $f_1 = 0$ und $f_2 = 0$ noch in $49 - 4 \cdot 6 - 9 \cdot 1 = 16$ Punkten. Für diese 16 Punkte verschwinden auch

$$\begin{vmatrix} \Sigma l_{3i} Q_i & \Sigma l_{4i} Q_i \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Sigma l_{1i} Q_i & \Sigma l_{2i} Q_i \\ \Sigma m_{1i} Q_i & \Sigma m_{2i} Q_i \end{vmatrix}$$

und

$$\begin{vmatrix} \Sigma m_{3i} Q_i & \Sigma m_{4i} Q_i \\ -\xi_2 & \xi_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \Sigma l_{1i} Q_i & \Sigma l_{2i} Q_i \\ \Sigma m_{1i} Q_i & \Sigma m_{2i} Q_i \end{vmatrix}.$$

Wenn die beiden ersten Factoren verschwinden, werden auch f_1 und f_2 zu Null, ohne dass f_3 und f_4 verschwinden. Die durch diese beiden ersten Factoren dargestellten Curven schneiden sich nun ausserhalb der 7 Punkte noch in $4 \cdot 4 - 1 \cdot 6 - 4 \cdot 1 = 6$ Punkten. Für die übrigen $16 - 6 = 10$ Punkte verschwinden somit sämmtliche Functionen f_k einfach.

Die Fläche F bildet sich daher auf der Ebene so ab, dass ihren ebenen Schnitten Curven siebenter Ordnung entsprechen, die einen dreifachen, 6 doppelte und 10 einfache Fundamentalpunkte besitzen.

Dieses ist genau die oben geometrisch durchgeführte Abbildung, wenn man die dortige Erzeugungsweise der Ebene durch eine zweifach unendliche Schaar von Kegelschnitten auf eine Erzeugungsweise durch Punkte überträgt.

Diese Abbildung ist auch die möglichst niedrige, da eine Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung nur wieder zu einem ähnlichen ebenen System führt.

Das System der Fundamentalpunkte kann nicht willkürlich angenommen werden, da in diesem Falle nur eine einfach unendliche Schaar von Curven siebenter Ordnung existiren würde, welche den Bedingungen genügten. Denn es giebt eine 35 fach unendliche Schaar von Curven siebenter Ordnung, und die festen Punkte würden 34 lineare Bedingungen abgeben. Das Schnittsystem der Fundamentalpunkte wird im Zusammenhange mit der die Doppelgerade abbildenden Curve unten untersucht werden.

Ich will jetzt nachträglich das geometrische Problem angeben, dessen Lösung direct zu einer eindeutigen Abbildung von F auf der Ebene geführt hätte:

Wenn eine Gerade a, eine Raumcurve dritter Ordnung, A, welche a nicht schneidet, und 5 *Kegelschnitte, die mit a je zwei Punkte und mit A je drei Punkte gemein haben, gegeben sind, soll die Anzahl der Raumcurven dritter Ordnung bestimmt werden, welche a in zwei Punkten, A in* 5 *Punkten und die* 5 *Kegelschnitte in je einem Punkte treffen.*

Denn auf der Fläche F sind die Bedingungen dieses Problems verwirklicht; a tritt als Doppelgerade, A als Doppelcurve, die 5 Kegelschnitte als einfache Curven von F auf, und jede Curve dritter Ordnung, welche die angegebenen Bedingungen erfüllt, schneidet F in 19 Punkten und liegt somit ganz auf der Fläche. Ferner beträgt die Anzahl der Bedingungen 12, und ebenso giebt es im Raume eine 12 fach unendliche Schaar von Raumcurven dritter Ordnung. Um die Lösung des geometrischen Problems zu finden, kann man daher, nach dem am Schlusse des § 8. Gesagten, die Fläche F betrachten und dieselbe unter Voraussetzung der Existenz einer solchen Curve dritter Ordnung abbilden. Diese Abbildung giebt übrigens schon die Lösung für den allgemeinen Fall, denn die Lagen der Curven a, A und der 5 Kegelschnitte sind auf F von einander unabhängig, da eine Doppelgerade a auf F 19 Bedingungen, eine Doppelcurve A 47 Bedingungen, und jeder der Kegelschnitte dann noch 3 Bedingungen abgiebt, so dass F $19 + 47 + 3 \cdot 5 = 81$ Bedingungen zu genügen hat, während eine Fläche sechster Ordnung 83 Constanten enthält.

Die Abbildung der Fläche F auf der Ebene lehrt, dass es *eine*

einzige Raumcurve dritter Ordnung giebt, welche die Bedingungen der obigen Aufgabe erfüllt.

Wollte man mittelst einer der 32 Raumcurven dritter Ordnung, die man durch die geometrische Lösung des erwähnten Problems als gefunden voraussetzen kann, die Abbildung von F auf der Ebene direct analytisch durchführen, so würde man die Gleichung der Fläche zuerst in der folgenden Form schreiben:

$$\begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \alpha_1 x_3 + \beta_1 x_4 \\ L_2 & M_2 & \alpha_2 x_3 + \beta_2 x_4 \\ L_3 & M_3 & \alpha_3 x_3 + \beta_3 x_4 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \alpha'_1 x_3 + \beta'_1 x_4 \\ L_2 & M_2 & \alpha'_2 x_3 + \beta'_2 x_4 \\ L_3 & M_3 & \alpha'_3 x_3 + \beta'_3 x_4 \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \gamma_1 \\ L_2 & M_2 & \gamma_2 \\ L_3 & M_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & m_1 x_3^2 + 2 n_1 x_3 x_4 + p_1 x_4^2 \\ L_2 & M_2 & m_2 x_3^2 + 2 n_2 x_3 x_4 + p_2 x_4^2 \\ L_3 & M_3 & m_3 x_3^2 + 2 n_3 x_3 x_4 + p_3 x_4^2 \end{vmatrix} = 0$$

Vermöge der Gleichung des Hyperboloids, das durch A und zwei der 32 Raumcurven, C und C', geht, zerfällt nämlich die Gleichung der Fläche F in zwei Factoren, Gleichungen von Flächen dritter Ordnung, welche durch A und je eine der Curven C, C' gehen und ausserdem die Doppelgerade von F als einfache Gerade enthalten, da die beiden Punkte, in denen diese das Hyperboloid schneidet, beiden Curven C, C', angehören; und diese Flächen dritter Ordnung schneiden das Hyperboloid ausser diesen Curven nicht mehr.

Diese Gleichungsform löst sich nun durch Einführung der Verhältnisse der ξ in die 3 Gleichungen auf:

$$0 = \xi_2 x_3 - \xi_1 x_4$$
$$0 = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 + \gamma_1 \xi_3 \\ L_2 & M_2 & \alpha_2 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \gamma_2 \xi_3 \\ L_3 & M_3 & \alpha_3 \xi_1 + \beta_3 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3 \end{vmatrix}$$
$$0 = \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & \xi_3 (\alpha_1' \xi_1 + \beta_1' \xi_2) + m_1 \xi_1^2 + 2 n_1 \xi_1 \xi_2 + p_1 \xi_2^2 \\ L_2 & M_2 & \xi_3 (\alpha_2' \xi_1 + \beta_2' \xi_2) + m_2 \xi_1^2 + 2 n_2 \xi_1 \xi_2 + p_2 \xi_2^2 \\ L_3 & M_3 & \xi_3 (\alpha_3' \xi_1 + \beta_3' \xi_2) + m_3 \xi_1^2 + 2 n_3 \xi_1 \xi_2 + p_3 \xi_2^2 \end{vmatrix}.$$

Diese Abbildung ist die am Anfang dieses § geometrisch gegebene. So stellt die zweite Gleichung die einfach unendliche Schaar von Hyperboloiden vor, welche durch A und den Punkt gehen, in dem C von der Ebene $\xi_2 x_3 - \xi_3 x_4 = 0$ geschnitten wird. Die rationalen Ausdrücke der x in den ξ findet man nun aus den folgenden drei in in den x linearen Gleichungen, die aus den vorstehenden unmittelbar folgen:

$$0 = \xi_2 x_3 - \xi_1 x_4$$
$$0 = \begin{vmatrix} L_1, & \alpha_1 \xi_1 + \beta_1 \xi_2 + \gamma_1 \xi_3, & \xi_3 (\alpha_1' \xi_1 + \beta_1' \xi_2) + m_1 \xi_1^2 + 2 n_1 \xi_1 \xi_2 + p_1 \xi_2^2 \\ L_2, & \alpha_2 \xi_1 + \beta_2 \xi_2 + \gamma_2 \xi_3, & \xi_3 (\alpha_2' \xi_1 + \beta_2' \xi_2) + m_2 \xi_1^2 + 2 n_2 \xi_1 \xi_2 + p_2 \xi_2^2 \\ L_3, & \alpha_3 \xi_1 + \beta_3 \xi_2 + \gamma_3 \xi_3, & \xi_3 (\alpha_3' \xi_1 + \beta_3' \xi_2) + m_3 \xi_1^2 + 2 n_3 \xi_1 \xi_2 + p_3 \xi_2^2 \end{vmatrix}$$

und aus einer dritten Gleichung, welche aus der letztern durch Vertauschung von L mit M hervorgeht. Die Ausführung der Elimination ergiebt wieder die Formeln (12), (13).

§ 11.

Die Abbildung der Doppelcurven der Fläche F und das Fundamentalpunktsystem der Abbildung.

Ich gehe jetzt an die Untersuchung der die Doppelgerade abbildenden hyperelliptischen Curve und die damit zusammenhängende Betrachtung des Schnittpunktsystems, welches die Fundamentalpunkte bilden.

Aus (12), (13), § 10. folgt, dass *die Abbildung der Doppelgeraden* a der Fläche F die Curve

$$0 = S = \begin{vmatrix} \Sigma l_{1i} Q_i , & \Sigma l_{2i} Q_i \\ \Sigma m_{1i} Q_i , & \Sigma m_{2i} Q_i \end{vmatrix} , \tag{14}$$

eine hyperelliptische Curve sechster Ordnung, welche die 7 mehrfachen Fundamentalpunkte zu Doppelpunkten hat, ist.

Es fragt sich zuerst, ob diese Bedingungen, dass S 7 Doppelpunkte besitzt und eine hyperelliptische Curve, hinreichen, damit sich die Gleichung dieser Curve in die Form (14) setzen lasse, also als quadratische Function der 3 Curven dritter Ordnung Q_i, die 7 Punkte gemein haben, mit 5 von einander linear unabhängigen Constanten. Nun ist die Bedingung der Hyperellipticität die, dass ein Curvenbüschel existirt, dessen Glieder die Curve S in einem beweglichen Punktepaar schneiden. Diese Bedingung ist bei der Form (14) erfüllt; denn der Büschel

$$\Sigma l_{1i} Q_i + \lambda \Sigma m_{1i} Q_i = 0$$

schneidet S fest in den Punkten, für welche

$$\Sigma l_{1i} Q_i = 0 , \qquad \Sigma m_{1i} Q_i = 0 ,$$

also in 9 Punkten, von denen 7 Doppelpunkte von S sind. Der bewegliche Schnitt besteht daher noch aus $3 . 6 - 2 . 7 - 2 = 2$ Punkten. Ueberhaupt schneidet jeder Curvenbüschel dritter Ordnung, welcher durch die 7 Doppelpunkte von S und einen weitern festen Punkt von S geht, die Curve (14) noch in einem neunten festen Punkte. Solche Punktepaare sind hier die Abbildung eines Punktes der Doppelgeraden a von F.

Die Existenz solcher Büschel von Curven dritter Ordnung, die ausser den Doppelpunkten in noch zwei festen Punkten schneiden, ist indess für alle hyperelliptischen Curven sechster Ordnung mit 7 Doppelpunkten charakteristisch. Denn eine allgemeine Curve sechster

Ordnung mit 7 Doppelpunkten wird durch eine Transformation dritter Ordnung, bei welcher die Curven dritter Ordnung durch die 7 Punkte gehen, in eine allgemeine Curve vierter Ordnung, die Normalcurve für $p = 3$, übergeführt. Da aber keine hyperelliptische Curve vierter Ordnung mit $p = 3$ existirt, muss diese Transformation in unserm Falle illusorisch, d. h. hier $= 0$ werden; und dies findet nur dann statt, wenn die Curven dritter Ordnung, sobald sie durch einen Punkt von S gelegt werden, noch einen weitern festen Punkt mit S gemein haben. Hieraus folgt aber, dass sich solche Curven S immer in die Form (14) setzen lassen. Die Bedingung der Hyperellipticität absorbirt also hier eine Constante.

Um die Coordinaten der Curve S als hyperelliptische Functionen eines Parameters λ darzustellen, verbindet man daher mit der Gleichung (14) den Curvenbüschel

$$\Sigma l_i Q - \lambda \Sigma m_i Q_i = 0 , \tag{15}$$

oder auch, was dasselbe ist, mit diesem Büschel den mit ihm projectivischen Büschel

$$\Sigma l_i Q_i - \lambda \Sigma m_i Q_i = 0 ,$$

und erhält dann die Coordinaten ξ der Curve S in der Form *)

$$\begin{aligned} \varrho \xi_1 &= w_{11} \gamma_1 - w_{12} \gamma_2 - w_{13} \gamma - \gamma_2 l - \gamma l_2 \Big) \sqrt{Q} \\ \varrho \xi_2 &= w_{21} \gamma_1 - w_{22} \gamma_2 - w_{23} \gamma - \gamma_1 l_2 - \gamma_2 l_1 \Big) \sqrt{Q} \\ \varrho \xi_3 &= w_{31} \gamma_1 - w_{32} \gamma_2 - w_{33} \gamma - \gamma_1 l_2 - \gamma_2 l_1 \Big) \sqrt{Q} , \end{aligned} \tag{16}$$

wo die $w_{ik} = w_{ki}$ und ganze Functionen sechsten Grads in λ sind, deren Determinante $\Sigma = w_{11} w_{22} w_{33}$ verschwindet. Die γ sind Constanten, von denen die ξ nur formell abhängen.

Der Grad von Q stimmt überein mit der Anzahl der Curven des Büschels (15), welche die Curve $S = 0$ berühren. Für die Berührungspunkte verschwindet die Functionaldeterminante D von $S = 0$, $\Sigma l_i Q_i = 0$, $\Sigma m_i Q_i = 0$, die vom Grade 9 ist. Da aber in die Doppelpunkte von S je 6 Schnittpunkte, in die beiden einfachen Grundpunkte des Büschels je 2 Schnittpunkte von D mit S fallen, so wird die Anzahl der hier wesentlichen Schnittpunkte von D mit S gleich

$$6 \cdot 9 - 6 \cdot 7 - 2 \cdot 2 = 8 .$$

Die Function Q ist daher eine ganze Function achten Grades in λ, wie auch aus dem Geschlecht $p = 3$ der Curve S folgt. Da die Ausdrücke (16) überhaupt vom Grade 6 in λ sind, so werden die l_i Functionen zweiten Grades in λ. Nun sind die l_i proportional mit den Coordinaten der Verbindungslinie eines Punktepaars, in welchem

*) s. Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen pag. 69.

S von einer Curve (15) geschnitten wird. *Die Verbindungslinien der Punktepaare von* S, welche den Punkten der Doppelgeraden von F entsprechen, umhüllen also einen *Kegelschnitt*. Die Doppelgerade von F enthält 8 Punkte, welche *Rückkehrpunkte* der Fläche sind.

Unter den Curven dritter Ordnung, welche durch die 7 Doppelpunkte von S gehen, giebt es acht einfach unendliche Schaaren, welche die Curve S in einem Punkte berühren; $\frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 28$ Curven, welche S doppelt, je in der Abbildung eines Rückkehrpunktes, berühren. Dieses sind die Bilder der Schnitte von F mit den Hyperboloiden, welche durch A und durch einen, bez. zwei Rückkehrpunkte der Doppelgeraden gehen. Die Schnitte der einfach unendlichen Schaar von Hyperboloiden, welche die Doppelgerade berühren und durch A gehen, bilden sich durch Curven dritter Ordnung ab, die S ebenfalls in zwei Punkten, den zwei Punkten eines Paares, berühren.

Ich wende mich nun zur Betrachtung des *Schnittpunktsystems der Fundamentalpunkte*. Die ebenen Schnitte der Fläche bilden sich als Curven siebenter Ordnung ab, welche 10 Punkte der Ebene, $a_1, a_2, .. a_{10}$, zu einfachen, 6 Punkte $b_1, b_2, .. b_6$ zu doppelten und einen Punkt c zu einem dreifachen Fundamentalpunkte besitzen; und diese Punkte sind so zu wählen, dass sie bei den Curven siebenter Ordnung nur 32 Bedingungen an Stelle von 34 abgeben, damit eine dreifache Schaar solcher Curven übrig bleibt. Nach der früher gegebenen Abbildung müssen die 10 Punkte a_i auf einer hyperelliptischen Curve S liegen, welche c und die b_i zu Doppelpunkten hat und durch diese und 5 der Punkte a_i schon bestimmt ist. Es fragt sich nun, wie die übrigen 5 Punkte a_i, nachdem die andern beliebig in der Ebene angenommen sind, auf der Curve S gewählt werden müssen. Ich werde nachweisen, dass man noch zwei dieser Punkte beliebig auf S wählen darf und dass die übrigen 3 Punkte dadurch völlig bestimmt sind.

Wenn eine Curve siebenter Ordnung, $R = 0$, den Bedingungen genügt, in c einen dreifachen, in den 6 Punkten b_i Doppelpunkte zu besitzen, enthält sie noch 11 Constanten linear, von denen man noch, wenn man nur das Schnittpunktsystem von $R = 0$ mit $S = 0$ betrachtet, zwei zerstören kann durch Zufügung eines Gliedes $(\alpha\, \xi_1 + \beta\, \xi_2)\, S$. Das Schnittpunktsystem von R mit S ist daher bestimmt, wenn man R noch durch 9 beliebig auf S gewählte Punkte gehen lässt; diese bestimmen die 3 letzten Schnittpunkte. Lässt man R durch 10 *beliebig* auf S gewählte Punkte gehen, so zerfällt $R = 0$ in $S = 0$ und einen Geradenbüschel $\alpha\, \xi_1 + \beta\, \xi_2 = 0$.

Ich nehme nun an, dass man $R = 0$ durch 7 beliebige Punkte q von S und durch eines der Punktepaare auf S, welche den Punkten der Doppelgeraden von F entsprechen, gehen lässt. $R = 0$ schneidet

$S = 0$ dann noch in drei Punkten q'. Solche 10 Punkte q, q' bilden, wie ich zeigen will, ein System, durch welches man eine dreifach unendliche Schaar von Curven R legen kann, welche im Allgemeinen *nicht* zerfallen, ein System, das also als ein Fundamentalpunktsystem der a_i betrachtet werden kann.

Zu diesem Nachweis werde ich mich des Abel'schen Theorems bedienen. Es existiren in Bezug auf $S = 0$ drei endliche Integrale, die ich ähnlich, wie pag. 190, unterscheide. Der untere Index der Integrale sei $k (k = 1, 2, 3)$. Die Summe der 2 Integrale u_k, genommen über die beiden, im Punkte c vereinigt liegenden Punkte, sei mit Γ_k, die Summe genommen in Bezug auf die zwei in einem Punkte b_i vereinigt liegenden Punkte mit $B_k^{(i)}$, die Integrale u_k in Bezug auf ein Punktepaar l_x, l_x' von S mit l_k, l_k' etc., bezeichnet. Man habe allgemein für die Integrale u_k, ausgedehnt über den Schnitt von $S = 0$ mit einer Curve r^{ter} Ordnung:

$$u_k^{(1)} + u_k^{(2)} + \cdots + u_k^{6r} = r\gamma_k$$
$$(k = 1, 2, 3),$$

wo die γ_k Constanten sind. Die Eigenschaft der Hyperellipticität der Curve S lässt sich nun leicht in Gleichungen aussprechen. Man betrachte nämlich die Curven 3^{ter} Ordnung, welche man durch c und die b_i legen kann, und nehme den Büschel heraus, welcher durch das Punktepaar l, l' hindurchgeht. Eine Curve dieses Büschels schneidet noch in einem weitern Punktepaar λ, λ', und für diese Curve hat man daher die drei Gleichungen

$$\Gamma_k + \sum_{i=1}^{i=6} B_k^{(i)} + l_k + l_k' + \lambda_k + \lambda_k' = 3\gamma_k.$$

Daraus folgt aber:

$$\lambda_k + \lambda_k' = \text{Const.},$$

also

$$\lambda_k + \lambda_k' = l_k + l_k' \quad , \quad (k = 1, 2, 3) \tag{17}$$

Durch diese Gleichung, welche aussagt, dass die Summe der Integrale u_k, ausgedehnt über die verschiedenen Punktepaare von $S = 0$, einander gleich ist, wird die berührte Eigenschaft von $S = 0$ vollständig definirt.

Ich lege jetzt durch das Punktepaar l, l' eine Curve $R = 0$, welche in c einen dreifachen, in den b_i Doppelpunkte hat. Diese Curve schneidet $S = 0$ noch in 10 Punkten, deren entsprechende Integrale mit $r_k^{(i)}$ bezeichnet seien. Für eine solche Curve hat man

$$3\Gamma_k + 2\sum_{i=1}^{i=6} B_k^{(i)} + l_k + l_k' + \sum_{i=1}^{i=10} r_k^{(i)} = 7\gamma_k \tag{18}$$
$$(k = 1, 2, 3).$$

Diese Gleichungen sind aber auch eindeutig umkehrbar und geben, wenn 7 der 10 Punkte r_i beliebig auf S angenommen sind, drei weitere Punkte r_i, welche mit den 3 Punkten r_i, durch welche $R = 0$ noch geht, identisch sein müssen, da in dem Schnittpunktsystem von $R = 0$ mit $S = 0$ ebenfalls drei Punkte durch die übrigen Annahmen bestimmt sind. Die Gleichungen (18) führen also auch immer auf eine Curve $R = 0$ von den bezeichneten Eigenschaften*).

Die drei Punkte, welche durch die Umkehrung der Gleichungen (18) gefunden werden, sind aber von dem Punktepaare l, l' unabhängig, durch welches die Curve $R = 0$ gelegt worden ist, da in (18) nur die Summe $l_k + l_k'$ eingeht, die nach (17) constant ist für irgend ein Punktepaar von S. Dies giebt den Satz:

Es sei $S = 0$ die Gleichung einer hyperelliptischen Curve 6ter Ordnung mit 7 Doppelpunkten. Legt man eine Curve 7ter Ordnung, $R = 0$, welche in einem der 7 Doppelpunkte von S einen dreifachen, in den übrigen Doppelpunkte besitzt, durch ein Paar der auf S existirenden einfach unendlichen Schaar von Punktepaaren und durch 7 beliebige feste Punkte von S, so schneidet diese Curve die Curve $S = 0$ in drei weitern festen Punkten, welche unabhängig sind von der Wahl des Punktepaars. Irgend welche 7 Punkte der Curve $S = 0$ bestimmen daher drei weitere eindeutig.

Ich lege nun weiter eine Curve R' durch 7 beliebige Punkte $r_1, r_2, \ldots r_7$ und durch einen Punkt r_8 von den drei durch diese 7 Punkte auf S bestimmten Punkten r_8, r_9, r_{10}. Lässt man R' weiter durch einen beliebigen Punkt l von S gehen, so schneidet R' die Curve $S = 0$ noch in weitern 3 Punkten $s^{(1)}$, $s^{(2)}$, $s^{(3)}$, für welche die Gleichungen (18) ergeben:

$$s_k^{(1)} + s_k^{(2)} + s_k^{(3)} = l_k' + r_k^{(9)} + r_k^{(10)}$$
$$(k = 1, 2, 3),$$

d. h. R' schneidet noch in denjenigen beiden Punkten, welche mit $r_1, r_2, \ldots r_8$ eines der im vorhergehenden Satze angegebenen Systeme von 10 Punkten ausmachen, und ausserdem in demjenigen Punkte l', welcher den Punkt l zu einem Paar ergänzt. Hieraus folgt:

Legt man eine Curve R durch irgend 8 Punkte der oben definirten Systeme von 10 Punkten auf S, so geht diese Curve auch durch die übrigen beiden Punkte des Systems und schneidet S überdies in einem der auf S liegenden Punktepaare. Die Bedingung, dass R durch die 10 Punkte eines solchen Systems hindurchgeht, giebt also nur 8 lineare

*) Dieser Schluss ist für jede andere Curve $f = 0$, welche einfache oder *vielfache Punkte* in den Doppelpunkten einer Curve $S = 0$ hat, richtig, vorausgesetzt im Allgemeinen, dass der Grad von $f = 0$ nicht kleiner als der von $S = 0$ ist.

Relationen für die Constanten von R, und es giebt eine dreifach unendliche Schaar von Curven 7^{ter} Ordnung, welche in c einen dreifachen, in den b_i Doppelpunkte und in den 10 Punkten eines der betrachteten Systeme von S einfache Punkte haben. Von einem solchen Systeme sind noch 7 Punkte beliebig, die 3 andern Punkte dadurch bestimmt.

Die hier gefundene dreifach unendliche Schaar von Curven R hat die nämlichen Eigenschaften, wie die die ebenen Schnitte von F abbildende Schaar (12), (13). Wir haben daher das Schnittsystem der Fundamentalpunkte vollständig definirt, indem wir 7 der Punkte a_i willkürlich auf S annehmen, durch diese und irgend eines der Punktepaare von S eine Curve R legen, und die drei weitern Schnittpunkte von R mit S als die drei letzten Fundamentalpunkte a_i nehmen.

Um die geometrische Bedeutung dieses Schnittpunktsystems für die Fläche F zu finden, suchen wir die Curven auf F auf, welchen die allgemeinen Curven R, die in c einen dreifachen, in den b_i Doppelpunkte haben, entsprechen. Wir betrachten die Schnittcurven von F und von Flächen 5^{ter} Ordnung, welche die Doppelgerade a von F zur einfachen, und die Doppelcurve 3^{ter} Ordnung A zur Doppelcurve haben. Es giebt eine 11 fach unendliche Schaar solcher Flächen ψ, und die Abbildung ihrer beweglichen Schnitte mit F, Raumcurven 16^{ter} Ordnung, ist eben die 11 fach unendliche Schaar der Curven R, deren Gleichung:

$$R = \xi_1 \Sigma \lambda_{ik} Q_i Q_k + \xi_2 \Sigma \mu_{ik} Q_i Q_k = 0 .$$

Die Sehnen von A, welche zugleich a schneiden, treffen diese Flächen ψ nur in Punkten, welche a und A angehören; sobald daher eine Fläche ψ gezwungen wird, noch durch einen weitern Punkt einer solchen Sehne zu gehen, enthält sie die Sehne ganz. Nun werden die 10 Sehnen, welche auf F liegen, ausgeschnitten von der windschiefen Fläche 4^{ter} Ordnung, $\Omega = 0$, welche a zur einfachen, A zur Doppelcurve hat und durch die durch a gehenden Sehnen von A erzeugt wird. Eine Fläche ψ enthält daher $4 \cdot 5 - 4 \cdot 3 - 1 = 7$ dieser Sehnen. Man kann nun ψ zwingen, 7 beliebige der Sehnen (aA) zu enthalten, da dieses nur 7 lineare Bedingungen für die Coefficienten von ψ mit sich bringt; und sobald ψ gezwungen wird, noch durch eine 8^{te} der Sehnen zu gehen, zerfällt ψ in die Fläche $\Omega = 0$ und in eine beliebige Ebene, und enthält dann also alle 10 Geraden der Fläche F. Der Schnitt von $\Omega = 0$ mit F wird nur durch die 10 Punkte a_i von S abgebildet. Unsere Betrachtung zeigt also, dass die Curven R, sobald sie durch 8 der Punkte a_i gelegt werden, auch durch die beiden übrigen gehen und dann die ebenen Schnitte von F abbilden.

Um auch bei der oben gegebenen Abbildung der Fläche F auf der Fläche φ das Fundamentalpunktsystem zu erhalten, bemerke ich

noch, dass den Schnitten von F mit den Flächen ψ die Schnitte von φ mit Flächen 3^{ter} Ordnung entsprechen, welche durch die Doppelgerade von φ einfach gehen und den Doppelpunkt von φ selbst zum Doppelpunkt haben.

Zur Vervollständigung der Abbildung der Fläche F auf der Ebene ist noch die Untersuchung der *Abbildung der Doppelcurve* 3^{ter} *Ordnung* A der Fläche F erforderlich. Man erhält die Gleichung dieser Abbildung, indem man die Schnitte der durch A gehenden Hyperboloide betrachtet, deren Gleichung:

$$(19) \qquad \begin{vmatrix} L_1 & M_1 & k_1 \\ L_2 & M_2 & k_2 \\ L_3 & M_3 & k_3 \end{vmatrix} = 0 ,$$

wo die k Constanten bedeuten. Da aber nach (2) und (11)

$$L_2 M_3 - L_3 M_2 = T \,.\, Q_1$$
$$L_3 M_1 - L_1 M_3 = T \,.\, Q_2$$
$$L_1 M_2 - L_2 M_1 = T \,.\, Q_3 ,$$

so wird die Gleichung der Abbildung der Schnittcurve der Hyperboloide von der Form:

$$(20) \qquad T \,.\, \{k_1 Q_1 + k_2 Q_2 + k_3 Q_3\} = 0 .$$

Der Factor $T = 0$ repräsentirt die Abbildung der Doppelcurve A, und wird erhalten, indem man die beiden Formen (19), (20) wirklich in einander überführt. Indem man dabei genau so verfährt, wie Herr Clebsch in einem analogen Fall, Math. Annalen, Bd. I., pag. 297, findet man als Gleichung der Abbildung der Doppelcurve:

$$(21) \qquad T = \Sigma \pm p_1 q_2 Q_3 = 0 ,$$

wobei p_1, p_2, p_3 die Unterdeterminanten, genommen resp. nach $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ der Determinante:

$$\begin{vmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} & \Sigma m_{1i} Q_i & 0 \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & \Sigma m_{2i} Q_i & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \Sigma m_{3i} Q_i & -\xi_2 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & \Sigma m_{4i} Q_i & \xi_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

und wobei q_1, q_2, q_3 aus resp. p_1, p_2, p_3 hervorgehen, indem man die l_{ik} und m_{ik} mit einander vertauscht.

Die Abbildung der Doppelcurve A, $T = 0$, ist eine Curve 11^{ter} Ordnung, welche c zum fünffachen, die 6 Punkte b_i zu dreifachen und die 10 Punkte a_i zu Doppelpunkten hat. Es ist eine hyperelliptische Curve vom Geschlecht $p' = 7$. Die Punktepaare dieser Curve haben eine merkwürdige Lage; denn die Geraden, welche durch den Punkt

c gehen, schneiden die Curve T ausser c noch in je drei Punktepaaren, da diese Geraden die Bilder der Curven der Schaar Σ auf F sind. Die Verbindungslinien je zweier Punkte eines Paares umhüllen also einen *Punkt*, den Punkt c. Die Punkte der Curve T ergeben sich aber hier nicht als hyperelliptische Functionen des Parameters λ des Geradenbüschels, der seinen Scheitel im Punkte c hat, obwohl eine Gerade dieses Büschels die Verbindungslinie eines Punktepaars von T ist, denn eine solche Gerade geht durch drei Punktepaare. Vielmehr betrachtet man, um die Coordinaten von T als hyperelliptische Functionen eines Parameters auszudrücken, auf der Fläche F den Ebenenbüschel, welcher durch eine der 10 Geraden der Fläche gelegt werden kann. Eine Ebene eines solchen Büschels schneidet die Curve A noch in *einem* beweglichen Punkte, die Abbildung eines solchen Schnittes also T in *einem* beweglichen Punktepaar. Man legt somit in der Bildebene den Büschel von Curven 7^{ter} Ordnung, welche c zum dreifachen, die b_i zu Doppelpunkten, 9 der Punkte a_i, a_1, a_2, .. a_9 zu einfachen, den 10^{ten} Punkt a_{10} zum Doppelpunkt haben. Die Curven des Büschels schneiden T dann noch in zwei weitern festen Punkten, welche den Doppelpunkt a_{10} von T zu Paaren ergänzen, und je in einem beweglichen Punktepaar, so dass die Coordinaten von T hyperelliptische Functionen des Parameters μ dieses Curvenbüschels werden, der mit λ durch eine Gleichung zusammenhängt, die in μ cubisch, in λ linear ist. Die Coordinaten werden Ausdrücke von der Form (16), wobei aber Q eine ganze Function 16^{ten} Grads, die l_i lineare ganze Functionen, die w_{ik} Functionen 9^{ten} Grads von μ werden. Die Curve A hat daher 16 Punkte, welche *Rückkehrpunkte* der Fläche sind.

In dem Geradenbüschel, der seinen Scheitel in c hat, giebt es 16 Gerade, welche die Curve T einfach berühren; es sind die Bilder der Curven 4^{ter} Ordnung der Schaar Σ, welche durch die 16 Rückkehrpunkte von A gehen. Ausserdem giebt es in dem Büschel noch 4 Gerade, welche T doppelt berühren; es sind die Bilder der Schnitte der Fläche mit denjenigen 4 Ebenen, welche durch die Doppelgerade gehen und die Curve A berühren. Die Berührungspunkte einer dieser 4 Geraden sind zwei Punkte eines Paars von T.

§ 12.

Die rationalen Curven der fünf ersten Ordnungen, welche die Fläche F enthält.

Nachdem ich in den vorhergehenden §§ die Grundzüge der Abbildung der Fläche F auf der Ebene festgelegt habe, werfe ich noch einen Blick auf die Geometrie auf der Fläche F, um mit Hülfe der

Abbildung die Curven der niedrigsten Ordnungen, insbesondere die rationalen Curven der Fläche, zu untersuchen.

Wenn die Bildcurve von der Ordnung m ist und in c einen γ fachen, im Punkte b_i einen β_i fachen und im Punkte a_i einen α_i fachen Punkt hat, so werden Ordnung M und Geschlecht p der entsprechenden Raumcurve der Fläche:

$$(22)\quad \begin{cases} M = 7m - \Sigma\alpha_i - 2\Sigma\beta_i - 3\gamma \\ p = \frac{m-1 \cdot m-2}{2} - \Sigma\frac{\alpha_i \cdot \alpha_i - 1}{2} - \Sigma\frac{\beta_i \cdot \beta_i - 1}{2} - \frac{\gamma \cdot \gamma - 1}{2}, \end{cases}$$

vorausgesetzt, dass die Bildcurve keine weitern vielfachen Punkte hat, welche übrigens auf p eine gleiche Erniedrigung hervorbringen würden, wie auf das Geschlecht der Bildcurve.

I. *Gerade* der Fläche. Für diese ist $M = 1$, $p = 0$. Man überzeugt sich leicht, dass den Gleichungen (22) nicht zu genügen ist. Ausser den 10 Geraden, welche durch die Punkte a_i dargestellt werden, und welche sich mit ebenen rationalen Curven 3ter Ordnung zu Curven der Schaar Σ ergänzen, giebt es keine Gerade auf der Fläche.

II. *Kegelschnitte.* $M = 2$, $p = 0$. Die 6 doppelten Fundamentalpunkte b_i geben Kegelschnitte. Diese ergänzen sich mit 6 weitern Kegelschnitten zu Curven der Schaar Σ. Die letztern bilden sich als Gerade ab, welche c mit den Punkten b_i verbinden. Ausser diesen 12 Kegelschnitten giebt es keine auf der Fläche.

III. *Raumcurven* 3ter *Ordnung.* $M = 3$, $p = 0$. Wir haben bereits die Existenz von 32 solcher Curven C nachgewiesen. Eine derselben ist bei der Abbildung bevorzugt worden, indem ihr der Punkt c entspricht. Die Bilder der andern Curven C sind:

1. die Geraden, welche durch je zwei der b_i gehen, an der Zahl $\frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$;

2. die Kegelschnitte der Ebene, welche durch c und 4 der b_i gehen, ebenfalls 15;

3. die Curve 3ter Ordnung, welche c zum Doppelpunkt hat und durch die 6 Punkte b_i geht. Diese stellt eine Curve C' dar, welche die durch c dargestellte C ergänzt, indem sie mit ihr und A auf einem Hyperboloid liegt, wie direct aus der Betrachtung der Abbildungen der Schnitte der durch A gehenden Hyperboloide folgt. Ebenso ergänzen sich die durch 1. und 2. abgebildeten Curven gegenseitig zu zweien. Zwei sich ergänzende Curven C schneiden sich in 2 Punkten ausserhalb der Doppelgeraden a der Fläche F. Die zwei andern auf a liegenden Schnittpunkte solcher zwei Curven lösen sich in der Abbildung in getrennte Punkte auf.

Jede dieser 32 Curven C ist 6 Kegelschnitten der Fläche zugeordnet, welche sie trifft. Jede der Curven wird nicht oder einmal

getroffen von den 15 Curven, deren zugeordnete Kegelschnittsysteme mit dem übrigen 4 oder 2 Kegelschnitte gemein haben.

Ausser diesen 32 Curven giebt es, da den Gleichungen (22) nicht mehr zu genügen ist, keine Raumcurven 5^{ter} Ordnung auf der Fläche.

IV. *Die ebenen Schnitte* der Fläche bilden sich durch Curven 7^{ter} Ordnung, R, ab, welche c zum dreifachen, die b_i zu doppelten, die a_i zu einfachen Punkten haben. Das Geschlecht ist $p = 6$.

Die ebenen Schnitte der Fläche zerfallen in folgenden Fällen:

1. wenn der Curven R der Ebene die Bedingung auferlegt wird, in einem der Punkte b_i einen dreifachen Punkt zu besitzen. Die entsprechende Schnittebene geht dann durch den durch b_i dargestellten Kegelschnitt der Fläche, und schneidet folglich noch in der Doppelgeraden und in einem weitern Kegelschnitt. Sie ist hier eine 5fach berührende, denn sie berührt die Fläche in den 4 Punkten, in denen die beiden Kegelschnitte die Doppelgerade, und in dem Punkte, in dem dieselben sich selbst ausserhalb A schneiden. R selbst zerfällt in die Curve S und die Gerade $= b_i$.

2. Ferner können die Curven R in einem der Punkte a_i einen Doppelpunkt besitzen. Die entsprechenden ebenen Schnittcurven der Fläche werden dann von den durch die 10 Geraden derselben gehenden Ebenenbüscheln ausgeschnitten und sind *Curven* 5^{ter} *Ordnung*, welche drei feste einfache Punkte haben, in den Punkten, in welchen die Achse des betreffenden Büschels die Doppelgerade a und die Doppelcurve A schneidet, und welche ausserdem in dem dritten Punkt des Schnitts der Ebene mit A einen Doppelpunkt haben, also $p = 5$. Diese Curven 5^{ter} Ordnung schneiden also die Achse des betreffenden Ebenenbüschels in zwei beweglichen Punkten. Diese Punktepaare auf einer Geraden der Fläche bilden eine *Involution*. Denn jedem Parameter des Ebenenbüschels, dessen Achse diese Gerade ist, entspricht eine Curve 5^{ter} Ordnung und folglich *ein* Punktepaar auf der Achse, und jedem Punkt dieser Achse entspricht nur *eine* Curve 5^{ter} Ordnung, die durch ihn geht, also *ein* Parameter des Ebenenbüschels, da die Achse eine einfache Gerade der Fläche ist. Zwei der Curven 5^{ter} Ordnung einer Schaar berühren also die Achse des Büschels. Die Ebenen, welche eine solche Schaar ausschneiden, sind zweifach berührende, und unter ihnen giebt es eine endliche Anzahl von dreifach berührenden, die man erhält, wenn man die entsprechenden Curven der Bildebene aufsucht, welche einen weitern Doppelpunkt haben.

Durch ein Verfahren, das dem von Herrn Cayley (Crelle's Journal Bd. 63) bei Curven mit gemeinsamen Doppelpunkten angewandten analog ist, findet man nun, dass die Zahl der Curven m^{ter} Ordnung in einem Büschel mit λ_i gemeinsamen $i$fachen Punkten ($i = 1, 2, \ldots$), welche noch einen weitern Doppelpunkt besitzen, gleich

$$3(m-1)^2 - \Sigma(i-1)(3i+1)\lambda_i$$

ist. Man erhält also hier für die Curven R, die in einem der Punkte a_i einen Doppelpunkt besitzen, $3 \cdot 6^2 - 2 \cdot 10 - 7 \cdot 7 = 39$ Curven mit einem weitern Doppelpunkt. Indessen existirt unter diesen Curven eine zerfallende, nämlich in die Curve S und die Gerade (ca_i). S und (ca_i) schneiden sich ausserhalb c und a_i noch in 3 Punkten, die also Doppelpunkte dieser Curve R sind. Zählt man somit diese zerfallende Curve dreifach, so bleiben noch 36 Curven mit weitern Doppelpunkte; oder es giebt in jedem der 10 Büschel 36 dreifach berührende Ebenen, abgesehen von den durch die Doppelgerade der Fläche gehenden Ebenen.

3. Von weitern zerfallenden ebenen Schnittcurven existiren nur noch die Schnitte durch die Doppelgerade a der Fläche, da man wegen des Schnittpunktsystems der Fundamentalpunkte die Curven R nur in die Curven S und in einen durch c gehenden Geradenbüschel zerfallen lassen kann. Dieser Geradenbüschel bildet die *Schaar* Σ *von rationalen Curven* 4^{ter} *Ordnung* ab. 6 dieser Curven zerfallen weiter in *Kegelschnittpaare*, 10 in eine Gerade und eine *ebene Curve* 3^{ter} *Ordnung mit einem Doppelpunkt.*

V. Die Schnitte der Fläche mit *Hyperboloiden*, welche durch die *Doppelcurve A* gehen, haben wir schon in § 11. (20) abgebildet. Diese Hyperboloide schneiden F ausser A noch in *Raumcurven* 6^{ter} *Ordnung vom Geschlecht* 1. Die Bilder dieser Curven sind die Curven 3^{ter} Ordnung, welche durch den Punkt c und die 6 Punkte b_i hindurchgehen. Im Besondern kommt man hier

1. auf die 32 Raumcurven 3^{ter} Ordnung C der Fläche;

2. auf 12 *Raumcurven* 4^{ter} *Ordnung zweiter Species.* 6 dieser Curven bilden sich ab durch Curven 3^{ter} Ordnung, welche in einem der b_i einen Doppelpunkt haben und durch c und die übrigen 5 b_i einfach gehen; die 6 übrigen Curven durch Kegelschnitte, welche durch 5 der b_i gehen. Die Hyperboloide gehen hier noch durch einen der 12 Kegelschnitte der Fläche. Eine solche Raumcurve 4^{ter} Ordnung ist also je einem Kegelschnitt zugeordnet, indem sie mit diesem 4 Punkte, von denen 2 auf der Doppelgeraden liegen, gemein hat, und indem sie den ergänzenden Kegelschnitt gar nicht, die übrigen 10 Kegelschnitte in je einem Punkte trifft. Eine solche Curve wird also von einer der Curven C in keinem oder einem Punkte getroffen, je nachdem diese den der Raumcurve 4^{ter} Ordnung zugeordneten Kegelschnitt trifft oder nicht trifft, also von 16 getroffen, von 16 nicht getroffen. Diese Curven schneiden jede der Curven der Schaar Σ in *zwei* Punkten.

3. Auf 10 einfach unendliche *Schaaren von Raumcurven* 5^{ter} *Ordnung* vom Geschlecht 1, indem man die Hyperboloide noch durch je eine der Geraden der Fläche gehen lässt. In der Abbildung gehen

die entsprechenden Curven 3^{ter} Ordnung durch je einen der 10 Punkte a. In jedem dieser Büschel giebt es $3 \cdot 2^2 = 12$ Curven mit Doppelpunkt, also auf der Fläche $10 \cdot 12$ *rationale Raumcurven* 5^{ter} *Ordnung*, welche von Hyperboloiden ausgeschnitten werden, die durch A und je eine der Geraden von F gehen und die Fläche berühren.

4. Auf 45 *Raumcurven* 4^{ter} *Ordnung erster Species*, indem man die Hyperboloide durch je zwei der 10 Geraden gehen lässt.

VI. Die Schnitte der Fläche F mit *Flächen* 3^{ter} *Ordnung*, welche durch die Doppelcurve A und die Doppelgerade a gehen, werden auf der Bildebene durch die fünffach unendliche Schaar von Curven 4^{ter} Ordnung abgebildet, welche c zum Doppelpunkte, die b_i zu einfachen Punkten haben. Diese Schnitte sind Raumcurven 10^{ter} Ordnung vom Geschlecht 2, und unter dieser Schaar giebt es eine reiche Mannigfaltigkeit von zerfallenden Curven und Curvenschaaren, von denen wir die folgenden erwähnen:

1. *Schaaren rationaler Raumcurven* 5^{ter} *Ordnung* werden dargestellt

a durch die Geraden, welche durch einen Punkt b_i gehen;

b durch die Curven 3^{ter} Ordnung, welche c zum Doppelpunkt haben und durch 5 der Punkte b_i gehen:

c durch Kegelschnitte, welche durch den Punkt c und drei der Punkte b_i gehen. Je ein Glied einer Schaar a ergänzt sich mit einem Glied einer Schaar b, und je zwei Glieder aus zwei Schaaren c ergänzen sich zu einem vollständigen Schnitt einer der Flächen 3^{ter} Ordnung mit F. a giebt 6, b giebt 6, und c giebt 2^0 einfach unendliche Schaaren von solchen Raumcurven.

Es giebt also auf der Fläche 32 einfach unendliche Schaaren von rationalen Raumcurven 5^{ter} Ordnung, welche die Curven der Schaar Σ in je *einem* Punkte treffen. Irgend eine dieser Schaaren wird von einer zweiten so ergänzt, dass je zwei Curven, aus den beiden Schaaren genommen, mit A und a den vollständigen Schnitt einer Fläche 3^{ter} Ordnung mit F bilden. Jede dieser Schaaren ist 6 Kegelschnitten zugeordnet, welche sie trifft, während sie die ergänzenden Kegelschnitte nicht schneidet: indess ist eine solche Combination K' von 6 Kegelschnitten verschieden von den Combinationen K, welche den 32 Raumcurven 3^{ter} Ordnung zugeordnet sind. Zwei Combinationen K und K' haben immer eine ungerade Anzahl von Kegelschnitten gemein, und je nachdem sie 5, 3 oder 1 Kegelschnitt gemein haben, trifft die K zugehörige Raumcurve 3^{ter} Ordnung eine Curve der K zugehörigen Schaar von rationalen Raumcurven 5^{ter} Ordnung in 0, 1, oder 2 Punkten. Die Curven *einer* Schaar treffen also 6 Raumcurven C nicht, 20 einmal und 6 zweimal. Curven aus einer Schaar schneiden einander nicht, Curven aus verschiedenen Schaaren schneiden sich in 3, 2, 1 Punkten,

je nachdem die zugeordneten Combinationen K' 0, 2, 4 Kegelschnitte gemein haben.

In jeder dieser 32 Schaaren giebt es 6 Curven, welche in eine der Curven C und in einen entsprechenden Kegelschnitt zerfallen.

2. *Raumcurven* 4^{ter} *Ordnung zweiter Species.* Die unter 1. behandelten Schaaren zerfallen weiter, wenn man die Bildcurve noch durch einen Punkt a_i gehen lässt. Die Raumcurve zerfällt dann in die entsprechende Gerade der Fläche und in eine Raumcurve 4^{ter} Ordnung zweiter Species, die gänzlich verschieden ist von einer der sub V, 2. erwähnten Curven.

Es liegen somit auf der Fläche $10 \cdot 32$ *einzelne* Raumcurven 4^{ter} Ordnung zweiter Species, die je *einen* Punkt mit jeder Curve der Schaar Σ gemein haben. Je 32, aus 32 verschiedenen Schaaren von rationalen Curven 5^{ter} Ordnung (VI, 1.), sind einer Geraden der Fläche zugeordnet, indem sie diese in einem Punkte, die übrigen Geraden gar nicht, treffen. Im Uebrigen, besonders in Bezug auf die Kegelschnitte und Curven C der Fläche, verhalten sich diese Curven 4^{ter} Ordnung genau wie die sub VI, 1. erwähnten Schaaren, da je 10 der Curven *einer* Schaar angehören.

3. *Rationale Raumcurven* 5^{ter} *Ordnung.* Wir betrachten noch eine endliche Anzahl solcher Curven, welche die Fläche enthält, die aber keiner der 32 Schaaren angehören und verschieden sind von den sub V, 3. erwähnten Curven.

a) Man kann einmal die Flächen 3^{ter} Ordnung, welche a und A enthalten, noch durch eine der Raumcurven 3^{ter} Ordnung, C, gehen lassen und hat dann noch eine zweifach unendliche Schaar solcher Flächen. Unter Anderm findet man hier den Satz:

Die *Geraden der Bildebene* sind die Bilder derjenigen rationalen Raumcurven 7^{ter} Ordnung, welche von Flächen 3^{ter} Ordnung ausgeschnitten werden, die durch A und a und durch diejenige Raumcurve 3^{ter} Ordnung C' der Fläche gehen, welche die durch den Punkt c abgebildete Raumcurve C zum Schnitt eines durch A gehenden Hyperboloids ergänzt.

Die 32 zweifach unendlichen *Schaaren von rationalen Raumcurven* 7^{ter} *Ordnung*, welche so aus der Fläche ausgeschnitten werden, sind daher den 32 Raumcurven 3^{ter} Ordnung, C, einzeln zugeordnet, indem eine Curve einer Schaar mit der ihr entsprechenden C drei Punkte, mit der ergänzenden Curve C gar keinen Punkt, mit den übrigen Curven C zwei oder einen Punkt gemein hat, je nachdem diese die zugehörige C nicht oder einmal treffen.

Diese Raumcurven 7^{ter} Ordnung haben je *einen* Punkt mit jeder Curve von Σ gemein.

Unter diesen 32 zweifach unendlichen Schaaren giebt es nun, ausser den sub VI, 1. betrachteten Schaaren von rationalen Raumcurven 5^{ter} Ordnung, noch weitere zerfallende Schaaren, nämlich $32 . 10$ einfach unendliche Schaaren, welche in eine Gerade der Fläche und in eine *rationale Raumcurve* 6^{ter} *Ordnung* zerfallen. Lässt man aber die Flächen 3^{ter} Ordnung noch durch eine weitere Gerade von F gehen, so gelangt man zu $32 \cdot \frac{10 . 9}{1 . 2} = 1440$ *einzelnen rationalen Raumcurven* 5^{ter} *Ordnung*. Sie sind je einer Raumcurve C und je 2 Geraden von F einzeln zugeordnet und schneiden die Curven der Schaar Σ in je *einem* Punkte. Ihre Bilder sind

α) die Geraden durch je zwei Punkte a_i, an Zahl 45;

β) die Kegelschnitte durch c, zwei der Punkte b_i und zwei der Punkte a_i, 675;

γ) die Curven 3^{ter} Ordnung mit Doppelpunkt in c, durch 4 der b_i und 2 der a_i gehend, ebenfalls 675;

δ) die Curven 4^{ter} Ordnung mit dreifachem Punkt in c, durch die b_i und 2 der a_i gehend, 45.

b) Ferner kann man die Flächen 3^{ter} Ordnung, welche A und a enthalten, auch durch zwei Kegelschnitte aus zwei verschiedenen Paaren hindurchgehen lassen. Dabei entstehen, je zwei Kegelschnitten entsprechend, *Schaaren von rationalen Curven* 6^{ter} *Ordnung*, im Ganzen 60 einfach unendliche Schaaren, deren Bilder sind:

α) 15 Schaaren von Kegelschnitten durch 4 der Punkte b_i;

β) 30 Schaaren von Curven 3^{ter} Ordnung, die durch c und 4 der b_i gehen und einen weitern Punkt b_i zum Doppelpunkt haben;

γ) 15 Schaaren von Curven 4^{ter} Ordnung, mit einem Doppelpunkt in c, Doppelpunkten in zweien der b_i und durch die 4 übrigen b_i gehend.

Die Curven einer Schaar schneiden die beiden zugeordneten Kegelschnitte in je zwei Punkten, die ergänzenden Kegelschnitte gar nicht, die übrigen 10 Kegelschnitte in je einem Punkte, wie überhaupt die Curven der Schaar Σ in je zwei Punkten. Sie schneiden ferner diejenigen 8 Raumcurven 3^{ter} Ordnung, C, welche die zugeordneten beiden Kegelschnitte ebenfalls zugeordnet haben, gar nicht; die 16 Curven C, welche einen derselben zugeordnet haben, in einem Punkte, die 8 übrigen Curven C in zwei Punkten.

In jeder dieser Schaaren giebt es insbesondere 10 Curven, welche zerfallen, indem man die Bildcurve noch durch einen der Punkte a_i gehen lässt.

Somit existiren noch auf der Fläche $10 . 60$ *einzelne rationale Raumcurven* 5^{ter} *Ordnung*, welche je *zwei* Punkte mit jedem Glied der Schaar Σ gemein haben. Sie zerfallen in 60 Gruppen von je 10 Curven.

Die Gruppen sind je 2 Kegelschnitten aus 2 Paaren zugeordnet, die Curven einer Gruppe den 10 Geraden der Fläche, und zwar so, dass eine Curve mit einer Geraden einen Punkt, mit den übrigen Geraden keinen Punkt gemein hat.

Mit dieser Aufzählung sind alle rationalen Curven 1^{ter} bis 5^{ter} Ordnung auf der Fläche vollständig erschöpft.

Die hier behandelte Fläche F ist unter den auf einer Ebene abbildbaren Flächen 6^{ter} Ordnung ohne Knotenpunkt diejenige, deren ebene Schnittcurven das höchstmögliche Geschlecht haben, eine Eigenschaft, welche die Flächen n^{ter} Ordnung mit einer $(n-4)$ fachen Geraden und einer diese nicht schneidenden Doppelcurve 3^{ter} Ordnung, deren Abbildung sich genau nach der bei F angewandten Methode durchführen lässt, nicht mehr theilen. Vielmehr besitzen die auf einer Ebene abbildbaren Flächen n^{ter} Ordnung, auf welche diese Eigenschaft übergeht, zwei vielfache Gerade.

Ich will zum Schlusse noch bemerken, dass sich zur Durchführung der Abbildungen ausser den hier angegebenen *allgemeinen* Methoden noch andere anwenden lassen, welche bisher, und auch in der vorliegenden Abhandlung, nur in beschränktem Grade zur Benutzung gekommen sind, durch die sich aber z. B. die Entwicklungen des § 4. kürzer hätten darstellen lassen. Auf diesen Punkt gedenke ich in einer weiteren Mittheilung zurückzukommen.

Mannheim, im März 1870.

Construction der Hauptkrümmungshalbmesser und der Hauptkrümmungsrichtungen bei beliebigen Flächen.

Von Emil Weyr in Prag.

1. Es sei F eine beliebige Fläche, o ein Punkt derselben und θ die Tangentialebene der Fläche im Punkte o; ferner sei N die Flächennormale in diesem Punkte. Jede durch die Normale N gehende Ebene ξ liefert einen Normalschnitt der Fläche, welchem im Punkte o ein Krümmungskreis K zukommt, dessen Centrum x auf der Flächennormale N liegt. Wir wollen der Ebene ξ den in ihr liegenden Krümmungsmittelpunkt x entsprechen lassen. Man erhält, wie sich leicht zeigen lässt, auf diese Art zwei ein-zweideutige Gebilde, und zwar die eindeutige Punktreihe (x) auf der Normale und das zweideutige Ebenenbüschel (ξ), dessen Achse die Normale ist.

Denn in der That entspricht (sobald nur der Punkt o keine Singularitäten aufweiset) jeder durch N gehenden Ebene ξ ein und nur ein einziger Krümmungsmittelpunkt x, während jedem Krümmungsmittelpunkt x zwei Normalschnitte und folglich auch zwei Ebenen ξ des Büschels N entsprechen.

Von dem zuletzt Gesagten überzeugt man sich am einfachsten in folgender Weise: Man beschreibe aus dem Punkte x als Centrum mit dem Radius $\overline{xo}$ eine Kugel, welche offenbar im Punkte o die Fläche F berühren wird. Die Schnittcurve dieser Kugel mit der Fläche F wird im Punkte o einen Doppelpunkt besitzen, dessen zwei Tangenten mit der Normale N zwei Ebenen bestimmen, denen, wie leicht zu erkennen ist, der Punkt x als Krümmungsmittelpunkt entspricht. Denkt man sich die sämmtlichen, die Fläche F im Punkte o berührenden Kugeln, so bilden deren auf der Normale N liegenden Mittelpunkte (x) eine mit dem Kugelsysteme projectivische Punktreihe. Hierbei entspricht der Tangentialebene θ, wenn man sie als eine Kugel mit unendlich grossem Radius betrachtet, der unendlich weite Punkt der Normale N, während der Punkt o der unendlich kleinen Kugel entspricht, welche durch ihn repräsentirt wird. Jede von den Kugeln schneidet die Fläche F in einer Curve, welche im Punkte o einen Doppelpunkt

und folglich ein Tangentenpaar besitzt. Diese Tangentenpaare sind nun in Involution*) und folglich auch die durch sie und die Normale N gehenden Ebenenpaare. Diese Ebeneninvolution ist projectivisch zu der Reihe der Kugelmittelpunkte und somit stellen beide zwei ein-zweideutige Gebilde vor.

Die Doppelstrahlen des zweideutigen Gebildes sind die beiden Hauptnormalschnitte der Fläche, da sie den beiden stationär berührenden Kugeln entsprechen. Daher sind die Mittelpunkte dieser zwei Kugeln d. h. die Hauptkrümmungsmittelpunkte der Fläche die beiden Verzweigungspunkte der eindeutigen Punktreihe.

Zu denselben Resultaten führt die Untersuchung der bekannten, die Krümmungsradien der Normalschnitte liefernden Gleichung:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

wobei man überdies die besondere Natur der erwähnten ein-zweideutigen Verwandtschaft erkennt.

In der obigen Gleichung sind R_1 und R_2 die Krümmungsradien der beiden Hauptschnitte ν_{12}, ω_{12} der Fläche F, und R der Krümmungsradius jenes Normalschnittes ξ, welcher mit einer der Hauptnormalebenen den Winkel φ einschliesst.

Betrachtet man R als den bestimmenden Parameter des dem Normalschnitte ξ zugehörigen Krümmungsmittelpunktes x**) und führt man das Theilverhältniss

$$\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$$

des Normalschnittes ξ bezüglich des Winkels der Hauptschnitte ein, so kann obige Gleichung in die Form

$$R(R_2 + R_1 \operatorname{tg}^2\varphi) - R_1 R_2 (1 + \operatorname{tg}^2\varphi) = 0$$

gebracht werden, was offenbar nichts anderes als die Verwandtschaftsgleichung zweier ein-zweideutiger Gebilde ist. Da R linear und $\operatorname{tg}\varphi$ quadratisch in diese Gleichung eintritt, so ist die Reihe der Krümmungsmittelpunkte das eindeutige Gebilde, während das Büschel der Normalebenen zweideutig ist.

Für $R = R_1$ erhält man für $\operatorname{tg}\varphi$ zwei gleiche Wurzeln, nämlich $\operatorname{tg}\varphi = 0$ und für $R = R_2$ zwei gleiche unendlich grosse Werthe. Es sind also in der That die beiden Hauptschnitte zugleich die Doppelelemente des zweideutigen Ebenenbüschels und die beiden Hauptkrümmungspunkte — v, w wollen wir sie nennen — sind die Verzweigungselemente der eindeutigen Punktreihe auf N.

---

*) Vergleiche Chasles' Geschichte der Geometrie pag. 340 der deutschen Ausgabe.

**) Es ist $\overline{ox} = R$.

Aus der Verwandtschaftsgleichung folgt:

$$R = \frac{R_1 R_2 (1 + \operatorname{tg}^2\varphi)}{R_2 + R_1 \operatorname{tg}^2\varphi}$$

und aus diesem Ausdrucke erkennt man, dass R gleich Null wird, wenn

$$1 + \operatorname{tg}^2\varphi = 0$$

ist, d. h. wenn

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{-1}$$

ist. Dem Fusspunkte o der Normale N entsprechen also im zweideutigen Büschel die durch die Normale N an den imaginären Kugelkreis gehenden zwei Tangential-Ebenen. Schliesslich wird $R = \infty$ wenn:

$$\operatorname{tg}\varphi = \pm\sqrt{-\frac{R_2}{R_1}},$$

d. h. dem unendlich weiten Punkte der Normale entsprechen die beiden Inflexionsnormalschnitte der Fläche.

Wir können das Ergebniss der vorstehenden Betrachtungen in folgenden Satz zusammenfassen. *Das Büschel der Normalschnitte einer Fläche in einem ihrer Punkte ist mit der Reihe der zugehörigen Krümmungsmittelpunkte in ein-zweideutiger Beziehung, und zwar ist hierbei das Büschel zweideutig, während die Reihe eindeutig ist. Die Verzweigungspunkte der eindeutigen Reihe sind die Hauptkrümmungsmittelpunkte der Fläche und die Doppelebenen des Büschels sind die ihnen entsprechenden Hauptnormalschnitte der Fläche. Dem Punkte der Fläche, von dem wir ausgegangen sind, entsprechen jene zwei Ebenen des Büschels, welche den imaginären Kugelkreis berühren*), und dem unendlich weiten Punkte der Reihe entsprechen die beiden durch die Inflexionstangenten der Fläche gehenden Ebenen des Büschels.*

2) Da die beiden Doppelelemente des zweideutigen Büschels und demnach auch die Verzweigungselemente der eindeutigen Reihe in diesem Falle reell sind, so ist das zweideutige Büschel complex.

Durch die beiden Verzweigungselemente d. h. durch die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte wird die Flächennormale N in zwei Abschnitte getheilt, nämlich in den reellen und in den imaginären. (Siehe „Theorie der mehrdeutigen Geometrischen Elementargebilde" II. Theil, Art. 4.) Der Fusspunkt o der Normale liegt, da ihm ein imaginäres Elementenpaar des zweideutigen Büschels entspricht, immer im imaginären Theile der eindeutigen Punktreihe. Wenn also die beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte auf einer und derselben Seite von o liegen, so ist der durchs Unendliche gehende Theil der Normale der imaginäre Theil, und es entsprechen daher dem unendlich weiten

*) Desshalb stehen die Haupt-Normalschnitte auf einander senkrecht.

Punkte der Normale zwei imaginäre Elemente des zweideutigen Büschels d. h. die beiden Inflexionsschnitte sind imaginär und folglich die Fläche F beim Punkte o concav-concav. Der Punkt o ist elliptisch.

Wenn dagegen o zwischen den Hauptkrümmungsmittelpunkten v, w liegt d. h. wenn die Hauptkrümmungshalbmesser entgegengesetzt gerichtet sind, so gehört der durchs Unendliche gehende Theil der Normale dem reellen Theile der eindeutigen Reihe an, die Inflexionsschnitte sind reell und die Fläche concav-convex. Der Punkt o ist hyperbolisch.

Wenn schliesslich einer der Verzweigungspunkte ins Unendliche fällt, so ist o ein parabolischer Punkt der Fläche.

3) Es mag auch noch erwähnt werden, dass man zu der Gleichung:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2}$$

sehr leicht gelangt, wenn man sich die Aufgabe stellt, die Verwandtschaftsgleichung der beiden ein-zweideutigen Gebilde, welche wir betrachteten, aufzustellen.

Nachdem man aus den einleitenden Betrachtungen des 1. Artikels oder, was ebenso leicht ist, aus der Theorie der Indicatrix erkannt hat, dass das Büschel der Normalebenen mit der Reihe der Krümmungsmittelpunkte in ein-zweideutiger Beziehung steht; nachdem man ferner erkannt hat, dass die Doppelebenen des Büschels (als den Achsen der Indicatrix entsprechend) auf einander senkrecht stehen, und dass schliesslich dem Punkte o (als unendlich kleine Kugel betrachtet) die den imaginären Kugelkreis tangierenden Ebenen des Büschels entsprechen*), kann man dazu schreiten, die Verwandtschaftsgleichung der beiden Gebilde aufzustellen. Bezeichnet man den Parameter, das Theilverhältniss eines Elementes des eindeutigen Gebildes mit ξ und das Theilverhältniss des entsprechenden Elementes im zweideutigen Gebilde mit η, so ist die Verwandtschaftsgleichung im Allgemeinen:

$$\xi(a\eta^2 + b\eta + c) + (a_1\eta^2 + b_1\eta + c_1) = 0^{**}).$$

Wir wollen nun das Theilverhältniss ξ des Elementes im eindeutigen Gebilde d. h. das Theilverhältniss des Krümmungsmittelpunktes bezüglich der beiden Verzweigungspunkte v, w (der beiden Hauptkrümmungsmittelpunkte) bestimmen, und ebenso das Theilverhältniss η der entsprechenden Normalebene in Bezug auf das Paar der Doppelebenen v_{12}, w_{12} nehmen, so dass also, wenn man die beiden Hauptkrümmungs-

---

*) Diess begründet sich geometrisch dadurch, dass die unendlich kleine Kugel die Tangentenebene der Fläche in einem unendlich kleinen Kreise schneidet, welcher mit dem Centrum der Indicatrix übereinfällt.

**) Siehe „Theorie mehrdeutiger geom. Elem.-Geb." I. Theil. Art. 4.

halbmesser mit R_1 und R_2 und den variablen Krümmungshalbmesser mit R bezeichnet,

$$\xi = \frac{R_1 - R}{R_2 - R}$$

wird; für das Theilverhältniss η haben wir:

$$\eta = \frac{\sin \nu_{12}, \varepsilon}{\sin \omega_{12}, \varepsilon}$$

wobei ε die dem Radius R entsprechende Normalebene ist.

Da aber ν_{12} senkrecht auf ω_{12} ist, so hat man

$$\eta = \frac{\sin \nu_{12}, \varepsilon}{\cos \nu_{12}, \varepsilon} = \operatorname{tg} \nu_{12}, \varepsilon,$$

oder wenn man $\measuredangle \nu_{12}\, \varepsilon$ kurz mit φ bezeichnet:

$$\eta = \operatorname{tg} \varphi.$$

Die Verwandtschaftsgleichung nimmt jedoch nach unserer Feststellung der Grundelementenpaare einen wesentlich einfachen Charakter an. Da nämlich dem Werthe $\xi = 0$ zwei gleiche Werthe $\eta = 0$ und dem Werthe $\xi = \infty$ zwei Werthe $\eta = \pm \infty$ entsprechen müssen, so findet man nach kurzer Ueberlegung, dass in der Verwandtschaftsgleichung:

$$a = 0, \quad b = 0 \qquad b_1 = 0 \qquad c_1 = 0$$

sein müsse und dass sich daher diese in die Form:

$$\xi = a \eta^2$$

bringen lässt.

Die Einführung der Werthe für ξ und η liefert:

$$\frac{R_1 - R}{R_2 - R} = a \operatorname{tg}^2 \varphi$$

Zur Bestimmung der Constanten a bedienen wir uns der Thatsache, dass dem Fusspunkte der Normale N die durch sie an den imaginären Kugelkreis gehenden zwei Tangentialebenen entsprechen, d. h. dass dem Werthe $R = 0$ das Werthepaar $\operatorname{tg} \varphi = \pm \sqrt{-1}$ entspricht.

Setzen wir diese Ausdrücke in die letzte Gleichung ein, so ergiebt sich:

$$\frac{R_1}{R_2} = - a$$

und folglich nimmt die Verwandtschaftsgleichung die Form:

$$\frac{R_1 - R}{R_2 - R} = - \frac{R_1}{R_2} \operatorname{tg}^2 \varphi$$

an, welche sich durch eine einfache Transformation in:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_1} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_2}$$

umsetzen lässt.

4) Auf Grund der Entwickelungen der ersten zwei Artikel und mit Berücksichtigung des im 1. Theile „der Theorie mehrdeutiger Elementargebilde“ Niedergelegten ist es nicht schwer die folgende Aufgabe constructiv aufzulösen:

Es sind die Krümmungshalbmesser von drei Normalschnitten einer Fläche in einem ihrer Punkte gegeben, man soll die beiden Hauptkrümmungshalbmesser und Hauptschnitte der Fläche und den Krümmungshalbmesser eines beliebigen vierten Normalschnittes construiren.

Wie man sieht, kommt es nur auf die Vervollständigung einzweideutiger Gebilde an und überdies auf die Construction der Doppel- und Verzweigungselemente.

Wir wollen uns daher nur mit einer skizzirten Auflösung zufrieden stellen.

Die vorher verwendete Bezeichnung beibehaltend, seien α_1, β_1, γ_1 drei Normalschnitte, deren Krümmungsradien $\overline{oa}$, $\overline{ob}$, $\overline{oc}$ sein mögen. Dann entsprechen den drei Punkten a, b, c der eindeutigen Reihe auf N die drei Ebenen α_1 β_1 γ_1 des zweideutigen Ebenenbüschels, dessen Achse N ist. Ueberdies wissen wir, dass dem Fusspunkte o der Normale die beiden den imaginären Kugelkreis tangirenden Ebenen des Büschels entsprechen. Durch fünf Paar entsprechender Elemente sind aber bekanntlich zwei ein-zweideutige Gebilde bestimmt und demnach ist die Lösung unserer Aufgabe wirklich sicher gestellt. Es seien A_1 B_1 C_1 die Schnittlinien der Ebenen α_1, β_1, γ_1 mit der Tangentialebene θ der Fläche im betrachteten Punkte o. Dann können wir an Stelle des Ebenenbüschels das mit ihm perspectivische Strahlenbüschel $(A_1\ B_1\ C_1\ \ldots\ldots)$ setzen und zur Construction verwenden.

Um die Vervollständigung der beiden Gebilde $(a\ b\ c\ \ldots)$ und $(A_1\ B_1\ C_1\ \ldots.)$ vornehmen zu können, werden wir die Punktreihe mit einem Strahlenbüschel in projectivische Verbindung setzen und das letztere an Stelle der ersteren zur Vervollständigung benützen.

Zu dem Ende denken wir uns die Normale N so in die Tangentialebene θ gelegt, dass der Punkt a auf den ihm entsprechenden Strahl A_1 fällt, ohne dass jedoch A_1 mit N zusammenfiele. Nun projicire man die Punktreihe o, a, b, c aus einem willkürlichen Punkt t des Strahles A_1 durch das Strahlenbüschel (O, A, B, C). Man erhält so zwei ein-zweideutige Strahlenbüschel $(O\ A\ B\ C\ldots..)$ und $(A_1\ B_1\ C_1\ \ldots.)$ wobei sich die gleichbezeichneten Strahlen entsprechen und wobei dem Strahle O des eindeutigen Büschels die beiden von o nach den imaginären Kreispunkten der Ebene θ gehenden Strahlen des zweideutigen Büschels entsprechen werden.

Die beiden Strahlenbüschel sind jedoch überdies in reducirter Lage, da sich die zwei entsprechenden Strahlen A, A_1 decken.

Der Reciprocitätskegelschnitt C_2 ist somit bestimmt und zwar durch folgende fünf Punkte: o, als Scheitel des zweideutigen Büschels, BB_1, CC_1 als Schnittpunkte zweier Strahlenpaare und schliesslich durch die zwei Punkte auf O, in denen dieser Strahl von den beiden durch o nach den imaginären Kreispunkten von ∞ gehenden Strahlen geschnitten wird. Diese zwei Schnittpunkte stellen sich als die Doppelpunkte jener Involution dar, in welcher O von der rechtwinkligen Strahleninvolution getroffen wird, welche o zum Scheitel hat.

Man kennt also von dem Reciprocitätskegelschnitte drei reelle Punkte und die Punktinvolution, welche der Kegelschnitt auf einer Geraden O bestimmt.

Hierdurch ist er bestimmt und kann nach bekannten Methoden construirt werden*. Man kann auch den Kegelschnitt C_2 durch einen ihm collinear liegenden Kreis ersetzen und hat zu dem Behufe nur o als Collineationscentrum und O als die Gegenlinie des Systemes C_2 zu betrachten, um zu C_2 einen Kreis als Collineare zu erhalten.

Wir können hier auf die Detailconstruction selbstverständlich nicht eingehen. Mittelst des Kegelschnittes C_2 kann man nun die beiden Büschel o, t vervollständigen und daher auch zu jedem Normalschnitte den betreffenden Krümmungsradius construiren.

Zieht man von t an den Kegelschnitt C_2 die beiden immer reellen Tangenten V, W, so schneiden diese die in o liegende Normale N schon in den zwei Hauptkrümmungsmittelpunkten und die von o nach den Berührungspunkten der Tangenten gehenden Strahlen V_2, W_2 sind als Doppelstrahlen des zweideutigen Büschels die beiden Hauptkrümmungsrichtungen der Fläche.

Hiemit wäre also in der That die von uns aufgestellte Aufgabe gelöst.

5. Schliesslich mag nur noch eine Erweiterung der Aufgabe erwähnt werden, welche eintreten kann. Da man nach dem Meunier'schen Theorem aus dem Krümmungshalbmesser eines beliebigen schiefen Schnittes der Fläche durch einfaches Projiciren den Krümmungshalbmesser des Normalschnittes ableiten kann,

so lässt sich die letztbehandelte Aufgabe auch für den Fall lösen, wenn die Krümmungen dreier beliebigen Schnitte bekannt sind.

Wir wollen, weil es uns zeitgemäss scheint, nur auf die folgende specielle Aufgabe hinweisen, welche im Vorhergehenden ihre Auflösung gefunden hat:

Man soll in irgend einem Punkte einer Fläche dritter Ordnung die Hauptkrümmungshalbmesser und die Hauptkrümmungsrichtungen construiren.

*) Siehe Steiner's Vorlesungen von H. Schröter pag. 154.

Man wird durch den Punkt und durch drei von den 27 Geraden der Fläche (drei sind bekanntlich immer reell) drei Ebenen legen, die Krümmungsradien der Kegelschnitte, in denen diese Ebenen die Fläche schneiden, im betreffenden Punkte construiren und nach obiger Anleitung weiter verfahren.

Wir hoffen, dass die constructive Durchführung keine Schwierigkeiten bieten werde.

Prag, im Mai 1870.

Ueber die Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte.

Von Emil Weyr in Prag.

1. Steiner hat eine Reihe schöner Sätze*) aufgestellt, welche eine gewisse Classe von den Curven dritter Ordnung eingeschriebenen Polygonen — die Steiner'schen Polygone behandeln und welche Sätze von Herrn Clebsch**) durch Betrachtung elliptischer Functionen bewiesen und zur weiteren Untersuchung in überraschender Weise zurecht gelegt wurden.

Die erwähnten Sätze beziehen sich auf allgemeine Curven dritter Ordnung und es lässt sich im Vorhinein erwarten, dass die auf Curven mit einem Doppelpunkte vorkommenden Steiner'schen Polygone eine wesentlich einfachere Untersuchung zulassen werden, als es im Allgemeinen der Fall ist.

Es ist nun der Zweck dieser kurzen Mittheilung zu zeigen, wie einfach sich in der That die Betrachtung der Steiner'schen Polygone auf Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte gestaltet.

2. Sei C_1^3 eine Curve dritter Ordnung, welche in δ einen Doppelpunkt besitzt und daselbst die beiden Geraden D_1, D_2 berührt. Ein durch δ gehender Strahl T wird C_1^3 in einem Punkte t schneiden, welcher sofort bestimmt sein wird, sobald man den Strahl T kennt.

*) Crelle, Bd. 32. pag. 182.
**) Crelle, Bd. 63. pag. 91.

Dieser letztere bestimmt sich jedoch unzweideutig durch das Theilverhältniss $\frac{\sin D_1 T}{\sin D_2 T}$ durch welches demnach auch t fixirt erscheint. Wir bezeichnen desshalb das Theilverhältniss als den Parameter des Punktes t und benennen es mit demselben Buchstaben als den Punkt, dem es entspricht und setzen also

$$\frac{\sin D_1 T}{\sin D_2 T} = t$$

Die Bedingung nun, dass drei Punkte t_1, t_2, t_3 in einer und derselben Geraden liegen, nimmt die einfache Form:

$$-t_1 . t_2 . t_3 = k^*) \tag{1}$$

an, wobei k eine nur von der Curve C_4^3 abhängige constante Grösse vorstellt.

2. Wir wollen von den zahlreichen Anwendungen, welche die letzte Gleichung zulässt, nur diejenige erwähnen, welche die Steiner'schen Polygone zum Gegenstande hat.

Um zu einem der Curve C_4^3 eingeschriebenen Steiner'schen $2n$-Eck zu gelangen, gehe man von zwei, vor der Hand willkürlich angenommenen Curvenpunkten t_1, t_2 aus. Man verbinde einen beliebigen Punkt x_1 der Curve mit t_1, wodurch man eine Gerade $\overline{t_1 x_1}$ erhält, welche die Curve C_4^3 zum drittenmale in dem Punkte x_2 schneiden möge. Den Punkt x_2 verbinde man mit t_2 und es möge $\overline{t_2 x_2}$ die Curve im Punkte x_3 schneiden, welchen man wieder mit t_1 verbindet um $\overline{t_1 x_3}$ zu erhalten; den Schnittpunkt x_4 von $\overline{t_1 x_3}$ und C_4^3 verbinde man wieder mit t_2, wodurch sich ein Punkt x_5 ergibt u. s. f.

Wenn man diese Construction $2n$ mal wiederholt, so erhält man von x_1 ausgehend die Reihe von $(2n+1)$ Punkten $x_1 x_2 x_3 \ldots . x_{2n+1}$, welche Ecken eines Polygons sind, dessen Seiten abwechselnd durch die beiden Punkte t_1, t_2 hindurchgehen.

Es lässt sich nun sehr leicht der Parameter von x_{2n+1} aus jenem von x_1 in folgender Weise ableiten.

Nach Gleichung (1) und unserer Construction gemäss bestehen die Relationen:

$$\begin{aligned}
t_1 x_1 x_2 &= k & t_2 x_2 x_3 &= k \\
t_1 x_3 x_4 &= k & t_2 x_1 x_5 &= k \\
t_1 x_5 x_6 &= k & t_2 x_6 x_7 &= k \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \\
t_1 x_{2n-1} x_{2n} &= k & t_2 x_{2n} x_{2n+1} &= k.
\end{aligned}$$

*) Siehe „Sitzungsberichte der kgl. böhm. Gesellschaft der Wissenschaften vom 27. April 1870.

Die Multiplication der untereinander stehenden Gleichungen und die Division der beiden Resultate liefert sofort:

$$t_1^n x_1 = t_2^n x_{2n+1} \tag{2}$$

als Beziehung zwischen der ersten und der letzten Ecke des ungeschlossenen Polygons; soll nun das letztere ein Steiner'sches $2n$-Eck werden, so muss x_1 mit x_{2n+1} indentisch sein, d. h. es muss $x_1 = x_{2n+1}$ sein und folglich nach (2):

$$t_1^n = t_2^n. \tag{3}$$

Diess ist somit die nothwendige aber auch hinreichende Bedingung dafür, dass t_1 und t_2 als Hauptpunkte Steiner'scher $2n$-Ecke betrachtet werden können.

Wir wollen uns auf eine Entwickelung der Eigenschaften Steiner'scher Polygone um so weniger einlassen, als dieselben sich in der bereits erwähnten Abhandlung des Herrn Clebsch einer ausführlicheren Behandlung erfreuten und als letztere für Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte bei Zugrundelegung der Gleichungen (1) und (3) ungemein einfach sich gestaltet.

3. Der Gleichung (3) genügen je zwei Wurzeln der Gleichung:

$$t^n = \varrho \tag{4}$$

wobei ϱ eine beliebige Grösse vorstellt.

Die Gleichung (4) stellt jedoch, wenn man ϱ als einen veränderlichen Parameter bezeichnet, eine Involution n^{ter} Ordnung vor, welche zwei n-fache Elemente besitzt. Diese n-fachen Elemente sind augenscheinlich: 0 und ∞.

Nun entsprechen aber den Werthen 0 und ∞ von t die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes δ, woraus also folgt, *dass die Hauptpunkte der Steiner'schen $2n$-Ecke auf der Curve C_4^3 sich zu n-elementigen Gruppen vereinigen, welche eine Involution n^{ten} Grades bilden, die die beiden Nachbarpunkte des Doppelpunktes zu n-fachen Punkten hat.*

Je zwei Punkte einer Gruppe können als Hauptpunkte Steiner'scher $2n$-Ecke betrachtet werden.

Projicirt man die erwähnte Involution aus dem Doppelpunkte der Curve, so erhält man eine Strahleninvolution n^{ten} Grades, für welche die beiden Tangenten D_1, D_2 des Doppelpunktes zwei n-strahlige Gruppen vorstellen.

Prag, im August 1870.

Ueber die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit.

Von Clebsch in Göttingen.

Die erste Idee, die Bewegung eines Körpers in einer Flüssigkeit in Verbindung mit den Bewegungen der letztern, den Principien der Hydrodynamik gemäss zu behandeln, rührt von Dirichlet her. Er gab die Lösung in Bezug auf eine Kugel, im Jahrgang 1852 der Berlin. Monatsber.

Anknüpfend an die Note von Dirichlet behandelte ich die allgemeine Aufgabe im 52. Bd. des Crelle'schen Journals. Ich zeigte daselbst, welches die Gestalt der Bewegungsgleichungen des Körpers sei, und von welchem hydrodynamischen Probleme die Bestimmung der Constanten abhängt, durch welche der Einfluss der mitbewegten Flüssigkeit in diesen Gleichungen sich ausdrückt. Für ein Ellipsoid gab ich die Lösung der hydrodynamischen Gleichungen, welche in diesen Untersuchungen entschieden in den Vordergrund traten. Dasselbe gilt von der Arbeit des Herrn Hoppe über Bewegung eines Rotationskörpers in der Richtung einer Achse. (Pogg. Ann. Bd. 93.)

Die Herren Thomson und Tait, welche wie es scheint von diesen frühern Arbeiten keine Kenntniss hatten, gaben dieser Frage insofern eine neue Wendung, als sie, ganz absehend von dem hydrodynamischen Problem, für die einfachsten Fälle die Integration der Bewegungsgleichungen des Körpers unternahmen.

Neuerdings hat Herr Kirchhoff (Crelle's Journal Bd. 71) diesen Bewegungsgleichungen eine überraschend elegante Form gegeben, und für einen Rotationskörper, in dem Fall, dass keine äussern Kräfte wirken, die Integration ausgeführt.

Ich werde im Folgenden an die Kirchhoff'schen Gleichungen für die Bewegung eines keinen äussern Kräften unterworfenen Körpers anknüpfen, und die Eigenschaften dieses Systems genauer untersuchen. Dabei werden sich zugleich einige neue Fälle ergeben, in denen das Problem auf Quadraturen zurückgeführt werden kann.

§ 1.

Die Kirchhoff'schen Gleichungen.

Die Kirchhoff'schen Gleichungen für die Bewegung eines, keinen äussern Kräften unterworfenen, Körpers in einer Flüssigkeit sind folgende. Es bezeichnen u, v, w die Geschwindigkeiten, welche der Anfangspunkt eines im Körper festen rechtwinkligen Coordinatensystems parallel diesen Achsen besitzt, p, q, r die Drehungsgeschwindigkeiten des Körpers um diese Achsen. Sodann ist T die lebendige Kraft des Körpers und der Flüssigkeit zusammen, eine homogene Function zweiten Grades von u, v, w, p, q, r mit constanten Coefficienten. Für diese 6 Grössen hat man dann die Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(1)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial u} = q\frac{\partial T}{\partial w} - r\frac{\partial T}{\partial v} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial v} = r\frac{\partial T}{\partial u} - p\frac{\partial T}{\partial w} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial w} = p\frac{\partial T}{\partial v} - q\frac{\partial T}{\partial u} \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} = v\frac{\partial T}{\partial w} - w\frac{\partial T}{\partial v} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} = w\frac{\partial T}{\partial u} - u\frac{\partial T}{\partial w} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} = u\frac{\partial T}{\partial v} - v\frac{\partial T}{\partial u} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} \end{cases}.$$

Sind ferner x, y, z die Coordinaten eines Punktes in Bezug auf ein im Körper festes Coordinatensystem, ξ, η, ζ die Coordinaten desselben Punktes im Raum, so hat man

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \\ \eta = \beta + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \\ \zeta = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \end{cases}.$$

Die Grössen α_i, β_i, γ_i sind mit u, v, w, p, q, r entweder durch die Relationen:

$$(4)\qquad \begin{cases} u = \alpha_1\frac{d\alpha}{dt} + \beta_1\frac{d\beta}{dt} + \gamma_1\frac{d\gamma}{dt} \\ v = \alpha_2\frac{d\alpha}{dt} + \beta_2\frac{d\beta}{dt} + \gamma_2\frac{d\gamma}{dt} \\ w = \alpha_3\frac{d\alpha}{dt} + \beta_3\frac{d\beta}{dt} + \gamma_3\frac{d\gamma}{dt} \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_3 q - \alpha_2 r & \frac{d\beta_1}{dt} = \beta_3 q - \beta_2 r & \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_3 q - \gamma_2 r \\ \frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_1 r - \alpha_3 p & \frac{d\beta_2}{dt} = \beta_1 r - \beta_3 p & \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_1 r - \gamma_3 p \\ \frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_2 p - \alpha_1 q & \frac{d\beta_3}{dt} = \beta_2 p - \beta_1 q & \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_2 p - \gamma_1 q . \end{cases}$$

Für die Gleichung (1), (2) hat Herr Kirchhoff die 3 Integrale gegeben

$$(6)\quad \begin{cases} 2T = L \\ \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right)^2 = M , \\ \frac{\partial T}{\partial u}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial v}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial w}\frac{\partial T}{\partial r} = N . \end{cases}$$

Denkt man sich die Gleichungen (1), (2) vollständig integrirt, so bilden die Gleichungen (5) drei getrennte Systeme, oder was dasselbe ist, die 3 Systeme $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind particuläre Integrale des Systems

$$(7)\quad \begin{cases} \frac{dA_1}{dt} = A_3 q - A_2 r \\ \frac{dA_2}{dt} = A_1 r - A_3 p \\ \frac{dA_3}{dt} = A_2 p - A_1 q . \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen kennt man erstens das Integral

$$A_1^2 + A_2^2 + A_3^2 = \text{Const.},$$

und zwar muss die Constante für jene particulären Systeme den Werth 1 haben; zweitens das Integral

$$(8)\quad A_1\frac{\partial T}{\partial u} + A_2\frac{\partial T}{\partial v} + A_3\frac{\partial T}{\partial w} = \text{Const.};$$

und da ausserdem der Multiplicator der Gleichungen 1 ist, so hat ihre Integration principiell keine Schwierigkeit.

Ebenso kann man die Functionen α, β, γ aus (4) ohne Weiteres durch Integration finden; doch kann man zwei Integrationen ersparen, indem zwischen den α, β, γ und die übrigen Grössen noch gewisse allgemeine integrirbare Gleichungen bestehen, wie Herr Kirchhoff gezeigt hat.

§ 2.

Eigenschaften der Gleichungen (1), (2).

Ich wende mich zur genauen Betrachtung der Gleichungen (1), (2), welche die Integrationsschwierigkeiten mit sich führen, und werde zunächst eine merkwürdige Transformation jener Gleichungen angeben.

Die Gleichungen (1), (2) sind nicht nach den Differentialquotienten der Unbekannten aufgelöst. Dies ist aber sofort der Fall, wenn wir statt der u, v, w, p, q, r die folgenden Unbekannten einführen:

$$(9)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{\partial T}{\partial u} & y_1 = \dfrac{\partial T}{\partial p} \\ x_2 = \dfrac{\partial T}{\partial v} & y_2 = \dfrac{\partial T}{\partial q} \\ x_3 = \dfrac{\partial T}{\partial w} & y_3 = \dfrac{\partial T}{\partial r} \end{cases}.$$

Nun ist T eine homogene Function zweiter Ordnung. Bezeichnen wir ihre ursprünglichen Variabeln für den Augenblick durch $z_1, z_2 \ldots z_6$, die neuen durch $x_1, x_2 \ldots x_6$, und setzen wir

$$(10)\qquad T = \tfrac{1}{2} \Sigma a_{ik} z_i z_k, \qquad x_i = \frac{\partial T}{\partial z_i}, \qquad (i = 1, 2 \ldots 6)$$

so giebt die Auflösung der Gleichungen

$$x_i = \Sigma_k a_{ik} z_k$$

die Gleichungen:

$$A z_k = \Sigma_i A_{ik} x_i,$$

wo A die Determinante der a_{ik}, welche wir immer als von Null verschieden voraussetzen, die A_{ik} deren Unterdeterminanten bedeuten; und wenn man also die Function T in den neuen Veränderlichen ausdrückt:

$$(11)\qquad T = \frac{1}{2A} \Sigma \Sigma A_{ik} x_i x_k.$$

Zugleich hat man

$$z_k = \frac{\partial T}{\partial x_k},$$

oder, indem man zu der vorigen Bezeichnung zurückkehrt:

$$(12)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial T}{\partial x_1} & p = \dfrac{\partial T}{\partial y_1} \\ v = \dfrac{\partial T}{\partial x_2} & q = \dfrac{\partial T}{\partial y_2} \\ w = \dfrac{\partial T}{\partial x_3} & r = \dfrac{\partial T}{\partial y_3} \end{cases}.$$

Daher erfolgt die Transformation der Gleichungen (1), (2) *so, dass man überall nur an Stelle der partiellen Differentialquotienten von T die neuen Veränderlichen, an Stelle der frühern Veränderlichen die neuen Differentialquotienten von F setzt.* Die transformirten Gleichungen werden also:

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_3 \dfrac{\partial T}{\partial y_2} - x_2 \dfrac{\partial T}{\partial y_3} \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_1 \dfrac{\partial T}{\partial y_3} - x_3 \dfrac{\partial T}{\partial y_1} \\ \dfrac{dx_3}{dt} = x_2 \dfrac{\partial T}{\partial y_1} - x_1 \dfrac{\partial T}{\partial y_2} \end{cases}$$

$$(14)\quad \begin{cases} \frac{dy_1}{dt} = x_3\frac{\partial T}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial T}{\partial x_3} + y_3\frac{\partial T}{\partial y_2} - y_2\frac{\partial T}{\partial y_3} \\ \frac{dy_2}{dt} = x_1\frac{\partial T}{\partial x_3} - x_3\frac{\partial T}{\partial x_1} + y_1\frac{\partial T}{\partial y_3} - y_3\frac{\partial T}{\partial y_1} \\ \frac{dy_3}{dt} = x_2\frac{\partial T}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial T}{\partial x_2} + y_2\frac{\partial T}{\partial y_1} - y_1\frac{\partial T}{\partial y_2}. \end{cases}$$

Von diesen Gleichungen kennt man nach (6) die 3 Integrale:

$$(15)\quad \begin{cases} 2T = L \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = M \\ x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = N. \end{cases}$$

Da ferner t in den Gleichungen (13), (14) explicite nicht vorkommt, so findet man das letzte Integral durch eine Quadratur. Aber ausserdem findet man Null, indem man die rechten Theile der Gleichungen (13) beziehungsweise nach x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3 differentiirt und addirt. *Daher ist der Multiplicator der Gleichungen* (13), (14) *gleich* 1; *man findet das vorletzte Integral durch das Princip des letzten Multiplicators, und sieht also, dass jedes vierte Integral, welches etwa gefunden wird, die vollständige Integration des Problems liefert.*

§ 3.

Die reducirte Function T.

Ich will die Frage behandeln, in welchen Fällen es ausser den Integralen (15) noch ein weiteres Integral der Gleichungen (13), (14) giebt, welches eine homogene Function zweiten Grades der x_i, y_i ist. In den von Herrn Kirchhoff behandelten Fällen giebt es ein lineares Integral, und da man statt dessen sein Quadrat nehmen kann, so ist jener Fall in dem Vorliegenden enthalten. Um diese Untersuchung bequem führen zu können, werde ich zunächst eine reducirte Form angeben, welche man der Function T geben kann.

Die Function T besteht aus 3 Theilen; der erste ist homogen vom zweiten Grade in den x, der dritte ebenso in den y, der mittlere lineare in den x und in den y. Setzt man im letztern an Stelle der Coefficienten von $x_1 y_2$ und von $x_2 y_1$ die Ausdrücke $b_{12} + k_3$ und $b_{12} - k_3$, und ebenso bei $x_2 y_3$, $x_3 y_2$ und bei $x_3 y_1$, $x_1 y_3$, so kann man ihn noch in zwei Theile zerlegen, von denen der eine ungeändert bleibt, wenn man die x mit den y vertauscht, während der andere dadurch sein Zeichen wechselt. Man kann also dann setzen:

$$(16)\quad 2T = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k + 2\Sigma\Sigma b_{ik} x_i y_k + \Sigma\Sigma c_{ik} y_i y_k + 2\begin{vmatrix} k_1 & x_1 & y_1 \\ k_2 & x_2 & y_2 \\ k_3 & x_3 & y_3 \end{vmatrix},$$

wo

$$a_{ik} = a_{ki}, \qquad b_{ik} = b_{ki}, \qquad c_{ik} = c_{ki}.$$

Nun entspricht, wie Herr Kirchhoff für einen besondern Fall benutzt hat, der Verlegung des Anfangspunktes, welches man dem im Körper festen Coordinatensystem gegeben hatte, eine Einführung der Veränderlichen

$$(17) \qquad \begin{cases} u' = u + r\,b - q\,c \\ v' = v + p\,c - r\,a \\ w' = w + q\,a - p\,b, \end{cases}$$

an Stelle von u, v, w, während p, q, r selbst unverändert bleiben; a, b, c sind dabei die Coordinaten des neuen Anfangspunkts in dem Systeme der x, y, z. Den Formeln (17) entsprechen die folgenden Transformationen der Differentialquotienten von T, wobei die neuen Differentialquotienten von den ursprünglichen durch Klammern unterschieden werden:

$$\frac{\partial T}{\partial u} = \left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) \qquad \frac{\partial T}{\partial p} = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) + c\left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right) - b\left(\frac{\partial T}{\partial w'}\right)$$
$$\frac{\partial T}{\partial v} = \left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right) \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right) + a\left(\frac{\partial T}{\partial w'}\right) - c\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right)$$
$$\frac{\partial T}{\partial w} = \left(\frac{\partial T}{\partial w'}\right) \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right) + b\left(\frac{\partial T}{\partial u'}\right) - a\left(\frac{\partial T}{\partial v'}\right).$$

Setzt man also den Gleichungen (9) entsprechend

$$x_1' = \left(\frac{\partial T}{\partial u}\right) \qquad y_1' = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)$$
$$x_2' = \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) \qquad y_2' = \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)$$
$$x_3' = \left(\frac{\partial T}{\partial w}\right) \qquad y_3' = \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right),$$

so führen von den x, y zu den x', y' die Formeln:

$$x_1 = x_1' \qquad y_1 = y_1' + c\,x_2' - b\,x_3' = y_1' + c\,x_2 - b\,x_3$$
$$x_2 = x_2' \qquad y_2 = y_2' + a\,x_3' - c\,x_1' = y_2' + a\,x_3 - c\,x_1$$
$$x_3 = x_3' \qquad y_3 = y_3' + b\,x_1' - a\,x_2' = y_3' + b\,x_1 - a\,x_2'.$$

Man kann nun die Constanten a, b, c dazu benutzen um den letzten Theil von T zu zerstören. Führt man nämlich in (16) statt der y die y' ein, so ändert sich derjenige Theil von $2\,T$, welcher von den x allein abhängt, um Glieder, welche von dem zweiten, dritten und vierten Theile von T herrühren. Von dem dritten Theile von $2\,T$ aber rührt ausserdem noch der Term her

$$2\,M = 2 \begin{vmatrix} c_{11}\,y_1' + c_{12}\,y_2' + c_{13}\,y_3' & x_1 & a_1 \\ c_{21}\,y_1' + c_{22}\,y_2' + c_{23}\,y_3' & x_2 & a_2 \\ c_{31}\,y_1' + c_{32}\,y_2' + c_{33}\,y_3' & x_3 & a_3 \end{vmatrix}$$

Bezeichnet man durch N das, was aus M wird, wenn darin die y' mit den x vertauscht werden, so kann man

$$2M = (M + N) + (M - N)$$

setzen. Hier ändert sich dann der erste Theil durch Vertauschung der y' mit den x nicht mehr, und vereinigt sich also mit dem ursprünglichen zweiten Theile von $2T$; dagegen hat $M - N$ die Eigenschaft, bei Vertauschung der y' mit den x sein Zeichen zu wechseln. Dieser Theil kann daher dazu benutzt werden, denjenigen zu zerstören, welcher aus dem letzten Theile von $2T$ hervorgeht, wenn man darin die y durch die y' ersetzt. Man muss dann haben:

$$0 = \begin{vmatrix} c_{11}y_1'+c_{12}y_2'+c_{13}y_3' & x_1 & a_1 \\ c_{21}y_1'+c_{22}y_2'+c_{23}y_3' & x_2 & a_2 \\ c_{31}y_1'+c_{32}y_2'+c_{33}y_3' & x_3 & a_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} c_{11}x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3 & y_1' & a_1 \\ c_{21}x_1+c_{22}x_2+c_{23}x_3 & y_2' & a_2 \\ c_{31}x_1+c_{32}x_2+c_{33}x_3 & y_3' & a_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & x_1 & y_1' \\ k_2 & x_2 & y_2' \\ k_3 & x_3 & y_3' \end{vmatrix}$$

was auf die folgenden 3 Gleichungen zwischen den Constanten führt:

$$\begin{aligned} k_1 &= (c_{11} + c_{22} + c_{33})\, a_1 - (c_{11}\, a_1 + c_{12}\, a_2 + c_{13}\, a_3) \\ k_2 &= (c_{11} + c_{22} + c_{33})\, a_2 - (c_{21}\, a_1 + c_{22}\, a_2 + c_{23}\, a_3) \\ k_3 &= (c_{11} + c_{22} + c_{33})\, a_3 - (c_{31}\, a_1 + c_{32}\, a_2 + c_{33}\, a_3)\,. \end{aligned} \tag{18}$$

Ich werde weiterhin zeigen, dass die Determinante dieser Gleichungen nicht verschwindet, was hier zunächst vorausgesetzt werden mag. Man kann die a dann diesen Gleichungen gemäss bestimmen.

Indem wir diesen Anfangspunkt als gewählt voraussetzen, können wir in $2T$ den letzten Theil auslassen, und also $2T$ in der Form annehmen:

$$2T = \Sigma\Sigma a_{ik}\, x_i\, x_k + 2\,\Sigma\Sigma b_{ik}\, x_i\, y_k + \Sigma\Sigma c_{ik}\, y_i\, y_k\,, \tag{19}$$

wo

$$a_{ik} = a_{ki} \quad , \quad b_{ik} = b_{ki} \quad , \quad c_{ik} = c_{ki}\,.$$

Diese Form von $2T$ soll im Folgenden immer vorausgesetzt werden.

Hiezu tritt nun noch, dass die Gleichungen (13), (14) sich nicht ändern, wenn man an Stelle von $2T$ die Function

$$2T' = 2T + \varrho\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2\,\sigma\,(x_1\,y_1 + x_2\,y_2 + x_3\,y_3) \tag{20}$$

setzt. Man kann dann ϱ und σ so bestimmen, dass

$$\varrho + a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\,, \qquad \sigma + b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0. \tag{21}$$

Im Folgenden wollen wir die Function $2T'$ an Stelle von $2T$ zu Grunde legen, unter Voraussetzung der Bestimmungen (21), und wollen diese Function durch $2T$ bezeichnen. Sie hat die Eigenschaft, dass noch

$$a_{11} + a_{22} + a_{33} = 0\,, \qquad b_{11} + b_{22} + b_{33} = 0\,. \tag{22}$$

Sie mag die *reducirte Function* $2T$ heissen. Ihre 3 Theile bezeichnen wir durch $2T_1$, $2T_2$, $2T_3$, so dass

$$2T_1 = \Sigma\Sigma a_{ik} x_i x_k$$
$$2T_2 = \Sigma\Sigma b_{ik} x_i x_k$$
$$2T_3 = \Sigma\Sigma c_{ik} x_i x_k .$$

§ 4.

Die über T gemachten Voraussetzungen.

In dem Obigen sind über die ursprüngliche Function $2T$ zwei Voraussetzungen gemacht worden, erstens, dass die Determinante derselben nicht verschwinde, und zweitens, dass die Determinante der Gleichungen (18) nicht verschwinde. Ich werde jetzt zeigen, dass diese beiden Voraussetzungen immer erfüllt sind.

Die Function $2T$ ist ihrer Natur nach für alle reellen Werthe der Geschwindigkeiten positiv und von Null verschieden. Man kann sie daher in der Form annehmen

$$(23) \quad 2T = \sum_{i=1}^{i=6} \lambda_i (\alpha_i u + \beta_i v + \gamma_i w + \alpha_i' p + \beta_i' q + \gamma_i' r)^2,$$

wo die λ sämmtlich positiv sind, und wo die Determinante der Argumente Δ der Quadrate den Werth 1 hat. Da die Determinante von $2T$ nun gleich dem Producte der Grössen λ mit Δ^2 ist, so ist diese offenbar stets von Null verschieden.

Nimmt man $2T$ in der Form (23) an, und setzt der Kürze wegen

$$L_i = \alpha_i u + \beta_i v + \gamma_i w + \alpha_i' p + \beta_i' q + \gamma_i' r,$$

so erhält man aus (9) die Gleichungen:

$$x_1 = \Sigma \lambda_i \alpha_i L_i \qquad y_1 = \Sigma \lambda_i \alpha_i' L_i$$
$$x_2 = \Sigma \lambda_i \beta_i L_i \qquad y_2 = \Sigma \lambda_i \beta_i' L_i$$
$$x_3 = \Sigma \lambda_i \gamma_i L_i \qquad y_3 = \Sigma \lambda_i \gamma_i' L_i .$$

Durch Auflösung dieser Gleichungen hat man:

$$\lambda_i L_i = x_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i} + x_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i} + x_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i} + y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} + y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} + y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} ,$$

oder wenn man den Ausdruck rechts durch M_i bezeichnet:

$$\lambda_i L_i = M_i ,$$

und daher

$$2T = \Sigma \frac{M_i^2}{\lambda_i} .$$

Vergleicht man dies mit (16), so ist insbesondere

$$\Sigma\Sigma c_{ik} y_i y_k = \Sigma \frac{1}{\lambda_i} \left(y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} + y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} + y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} \right)^2 ,$$

und

$$c_{11} + c_{22} + c_{33} = \Sigma \frac{1}{\lambda_i}\left(\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'}\right)^2\right).$$

Nun ist die Determinante des Systems (18) nichts Anderes als die Determinante der Function zweiter Ordnung:

$$Y = (c_{11} + c_{22} + c_{33})(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (\Sigma \Sigma c_{ik} y_i y_k)^2,$$

welche mit Hülfe der obigen Ausdrücke die Form annimmt:

$$Y = \Sigma \frac{1}{\lambda_i}\left\{\left(\left(\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'}\right)^2\right)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - \left(y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i} + y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} + y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'}\right)^2\right\}$$

$$= \Sigma \frac{1}{\lambda_i}\left\{\left(y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} - y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'}\right)^2 + \left(y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} - y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'}\right)^2 + \left(y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} - y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'}\right)^2\right\}.$$

Sollte also die Determinante von Y verschwinden können, so müsste es wenigstens *ein* von Null verschiedenes reelles System der y geben, für welches Y verschwände. Aber dies könnte nur geschehen, indem für alle Werthe von i:

$$y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} - y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} = 0$$

$$y_3 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} - y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} = 0$$

$$y_1 \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} - y_2 \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} = 0,$$

oder

$$(24) \qquad \begin{cases} \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'} = m_i y_1 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'} = m_i y_2 \\ \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'} = m_i y_3 . \end{cases}$$

Bildet man nun die Determinante der 36 Grössen

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i'}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \beta_i'}, \quad \frac{\partial \Delta}{\partial \gamma_i'},$$

welche den Werth Δ^5, also 1, hat, so würden unter Voraussetzung der Gleichungen (24) drei Reihen derselben proportional oder Null, also die Determinante Null, was der Voraussetzung widerspricht. Die Determinante der Gleichungen (18) kann also nicht verschwinden.

§ 5.

Der Fall, wo die c verschwinden.

Obgleich nach dem soeben Bemerkten der Fall, wo alle Coefficienten c verschwinden, in der Natur nicht vorkommen kann, so führt derselbe doch zu einem analytisch interessanten Resultate, und mag deshalb nicht übergangen werden. In diesem Falle werden näm-

lich die Gleichungen (13), (14) folgende, wenn

$$\Theta(x) = \tfrac{1}{2} \Sigma \Sigma b_{ik} x_i x_k \tag{25}$$

gesetzt wird:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_3 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_3} \\ \frac{dx_2}{dt} &= x_1 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_1} \\ \frac{dx_3}{dt} &= x_2 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_2} \end{aligned}\right. \tag{26}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= x_3 \frac{\partial T_1}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial T_1}{\partial x_3} + y_3 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_2} - x_2 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_3} \\ \frac{dy_2}{dt} &= x_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_3} - y_3 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_1} \\ \frac{dy_3}{dt} &= x_2 \frac{\partial T_1}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial T_1}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_1} \end{aligned}\right. \tag{27}$$

Hier enthalten die drei ersten Gleichungen nur noch die x und können für sich integrirt werden. Ihre Integrale sind

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c\,, \qquad \Theta = c' \tag{28}$$

und ein drittes Integral, welches die Zeit giebt. Wie bei der Rotation eines festen Körpers werden die x elliptische Functionen von t.

Das System (27) ist nun ein lineares in Bezug auf die y; man kann dasselbe also integriren, wenn man das System, welches durch Hinweglassung der nur von den x abhängigen Glieder entsteht, zu integriren im Stande ist:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= y_3 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_2} - y_2 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_3} + x_3 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_3} - x_2 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_3} \\ \frac{dy_2}{dt} &= y_1 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_3} - y_3 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_3} - x_3 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_1} \\ \frac{dy_3}{dt} &= y_2 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_1} - y_1 \frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_2} + x_2 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_1} - x_1 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_2} \end{aligned}\right. \tag{29}$$

Die Integrale dieses Systems aber sind, wenn c, c', c'' die Integrationsconstanten des Systems (26) bedeuten, durch die Gleichungen

$$y_i = \gamma \frac{\partial x_i}{\partial c} + \gamma' \frac{\partial x_i}{\partial c'} + \gamma'' \frac{\partial x_i}{\partial c''}$$

gegeben, in welchen die γ neue Constanten bedeuten. Denn das System (26) geht in der That in (29) über, wenn man jene Gleichungen nach den c differentiirt und die Differentialquotienten der x nach den c als die neuen Veränderlichen betrachtet. — Der Ausnahmefall, wo auch Θ identisch verschwindet, ist so einfach, dass er keine Erwähnung verdient.

§ 6.

Es soll jetzt untersucht werden, unter welchen Umständen die Gleichungen (13), (14) ein *lineares* Integral

$$f = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 + \beta_3 y_3 = \text{Const.}$$

besitzen. Die Function f muss dann der Gleichung

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \frac{\partial T}{\partial y_1} & x_1 \\ \alpha_2 & \frac{\partial T}{\partial y_2} & x_2 \\ \alpha_3 & \frac{\partial T}{\partial y_3} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \frac{\partial T}{\partial x_1} & x_1 \\ \beta_2 & \frac{\partial T}{\partial x_2} & x_2 \\ \beta_3 & \frac{\partial T}{\partial x_3} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \frac{\partial T}{\partial y_1} & y_1 \\ \beta_2 & \frac{\partial T}{\partial y_2} & y_2 \\ \beta_3 & \frac{\partial T}{\partial y_3} & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

genügen, welche vermittelst einer leicht verständlichen Abkürzung in der Form geschrieben werden mag:

$$(\alpha\ ,\ T_y\ ,\ x) + (\beta\ ,\ T_x\ ,\ x) + (\beta\ ,\ T_y\ ,\ y) = 0\,.$$

Diese Gleichung zerfällt nun sofort in folgende, deren jede sowohl für die y als für die x homogen ist:

$$\begin{aligned} &(\alpha\ ,\ \Theta_x\ ,\ x) + (\beta\ ,\ T_{1x}\ ,\ x) = 0 \\ (30)\qquad &(\alpha\ ,\ T_{3y}\ ,\ x) + (\beta\ ,\ \Theta_y\ ,\ x) + (\beta\ ,\ \Theta_x\ ,\ y) = 0 \\ &(\beta\ ,\ T_{3y}\ ,\ y) = 0\,. \end{aligned}$$

Wegen der letzten dieser Gleichungen sind zwei Fälle zu unterscheiden; entweder sind alle β gleich Null oder nicht. Im ersten Falle kann man es durch eine Drehung des im Körper festen Coordinatensystems erreichen, dass α_1, α_2 verschwinden. Von den Gleichungen (30) bleibt dann nur übrig

$$x_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial T_3}{\partial y_1} = 0\,, \qquad \frac{\partial T_3}{\partial y_2} = 0\,;$$

die erste dieser Gleichungen giebt

$$b_{12} = 0\,,\quad b_{23} = 0\,,\quad b_{31} = 0\,,\quad b_{11} = b_{22}\,.$$

Man hat für T_1 keine Bedingung; und man kann daher den leicht zu verificirenden Satz aufstellen:

Hat die reducirte Function T die Form:

$$T = T_1 + b\,(x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3) + \frac{c}{2} y_3^2\,,$$

so ist $x_3 = \text{Const.}$ ein Integral.

In der Natur kann dieser Fall nicht vorkommen, wegen ähnlicher Betrachtungen, wie sie in § 4. angestellt sind.

Wenn dagegen die β nicht sämmtlich verschwinden, so kann man es durch eine Drehung der Coordinatenachsen erreichen, dass $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$. Die dritte Gleichung (30) liefert dann

$$y_1 \frac{\partial T_3}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial T_3}{\partial y_1} = 0 ,$$

also

$$c_{12} = 0 , \quad c_{13} = 0 , \quad c_{23} = 0 , \quad c_{11} = c_{22} .$$

Man kann sonach für T_3 die Form annehmen:

$$T_3 = \frac{c}{2} (y_1^2 + y_2^2) + \frac{\gamma}{2} y_3^2 .$$

Setzt man dies in die zweite Gleichung (30) und setzt die Coefficienten der einzelnen x gleich Null, so hat man:

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma \alpha_2 y_3 - c \alpha_3 y_2 - b_{12} y_1 - b_{22} y_2 - b_{32} y_3 + b_{11} y_2 - b_{12} y_1 \\ 0 &= c \alpha_3 y_1 - \gamma \alpha_1 y_3 + b_{11} y_1 + b_{12} y_2 + b_{13} y_3 + b_{21} y_2 - b_{22} y_1 \\ 0 &= c (\alpha_1 y_2 - \alpha_2 y_1) \qquad\qquad + b_{31} y_2 - b_{32} y_1 . \end{aligned}$$

Daher durch Vergleichung der Coefficienten der y:

$$b_{12} = 0 , \quad b_{13} = \gamma \alpha_1 = - c \alpha_1 , \quad b_{23} = \gamma \alpha_2 = - c \alpha_2$$
$$b_{11} - b_{22} = 0 , \quad c \alpha_3 = 0 .$$

Indem man die α gleich Null setzt, erhält man die allgemeinste hier auftretende Form von Θ, für welche man den Ausdruck

$$\Theta = \frac{b}{2} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{\beta}{2} x_3^2 ,$$

setzen kann. Die erste Gleichung (30) giebt dann noch

$$\frac{\partial T_1}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial T_2}{\partial x_1} x_1 = 0 ,$$

d. h. auch T_1 hat die Form

$$T_1 = \frac{a}{2} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{\alpha}{2} x_3^2 .$$

Man hat also den Satz:

Lässt sich T in die Form bringen

$$T = \frac{a}{2} (x_1^2 + x_2^2) + \frac{\alpha}{2} x_3^2 + b (x_1 y_1 + x_2 y_2) + \beta x_3 y_3 + \frac{c}{2} (y_1^2 + y_2^2) + \frac{\gamma}{2} y_3^2 ,$$

so ist $y_3 = Const.$ ein Integral der Gleichungen.

Diese Form geht in die Form über, deren Integration Herr Kirchhoff gelehrt hat, wenn man noch b und β verschwinden lässt. Die Differentialgleichungen werden für diesen Fall

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= (b - \beta) x_2 x_3 + c x_3 y_2 - \gamma x_2 y_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= - (b - \beta) x_1 x_3 - c x_3 y_1 + \gamma x_1 y_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= \qquad\qquad c (x_2 y_1 - x_1 y_2) \end{aligned}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = (a-\alpha)\,x_2\,x_3 + (b-\beta)\,(y_2\,x_3 - y_3\,x_2) + (c-\gamma)\,y_2\,y_3$$
$$\frac{dy_2}{dt} = -(a-\alpha)\,x_1\,x_3 - (b-\beta)\,(y_1\,x_3 - y_3\,x_1) - (c-\gamma)\,y_1\,y_3$$
$$\frac{dy_3}{dt} = 0\,.$$

§ 7.

Aufsuchung eines Integrals, welches eine homogene Function zweiter Ordnung ist. Drei Fälle.

Ich stelle jetzt die Frage, unter welchen Umständen die Gleichungen (13), (14) ein Integral $f = C$ zulassen, dessen linker Theil eine homogene Function zweiter Ordnung der x und der y ist, und welches nicht aus den Integralen (15) zusammengesetzt werden kann. Setzen wir, ähnlich wie oben bei T:

$$f = f_1 + f_2 + f_3 + f_4\,, \tag{31}$$

$$\begin{cases} f_1 = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\Sigma\,\alpha_{ik}\,x_i\,x_k\,, & f_3 = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\Sigma\,\gamma_{ik}\,y_i\,y_k \\ f_2 = \Sigma\Sigma\,\beta_{ik}\,x_i\,y_k\,, & f_4 = \Sigma \pm \mu_1\,x_2\,y_3\,, \end{cases} \tag{32}$$

wo

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}\,, \quad \beta_{ik} = \beta_{ki}\,, \quad \gamma_{ik} = \gamma_{ki}\,.$$

Bezeichnen wir ferner durch Φ die Function (welche je nach Bedürfniss mit den x oder y geschrieben werden soll, wie dies auch mit f_1, f_3 gelegentlich geschehen mag):

$$\Phi = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\Sigma\,\beta_{ik}\,x_i\,y_k\,, \quad \text{sodass} \tag{33}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_i} = \frac{\partial \Phi_{(y)}}{\partial y_i}\,, \qquad \frac{\partial f_2}{\partial y_i} = \frac{\partial \Phi_{(x)}}{\partial x_i}\,.$$

Die Function f ist dann durch die Gleichungen definirt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} & x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} & x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial x_1} & x_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial x_2} & x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial x_3} & x_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} & \frac{\partial T}{\partial y_1} & y_1 \\ \frac{\partial f}{\partial y_2} & \frac{\partial T}{\partial y_2} & y_2 \\ \frac{\partial f}{\partial y_3} & \frac{\partial T}{\partial y_3} & y_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{34}$$

welche wir mit Hülfe einer leicht verständlichen Abkürzung in der Form schreiben wollen:

$$(f_x\,,\ T_y\,,\ x) + (f_y\,,\ T_x\,,\ x) + (f_y\,,\ T_y\,,\ y) = 0\,.$$

Diese Gleichung zerfällt dann mit Benutzung von (31)—(33) in die folgenden 4, deren jede sowohl für die x als für die y homogen ist:

$$
35)\quad \begin{cases}
(f_{1x}, \Theta_x, x) + (\Phi_x, T_{1x}, x) + (f_{1y}, T_{1x}, x) = 0 \\
(\Phi_y, \Theta_x, x) + (f_{1x}, \Theta_x, x) + (f_{1x}, T_{3y}, x) + (f_{3y}, T_{1x}, x) \\
\qquad + (\Phi_x, \Theta_y, x) + (f_{1y}, \Theta_y, x) + (\Phi_x, \Theta_x, y) + (f_{4y}, \Theta_x, y) = 0 \\
(\Phi_y, T_{3y}, x) + (f_{1x}, T_{3y}, x) + (f_{3y}, \Theta_y, x) + (f_{3y}, \Theta_x, y) \\
\qquad + (\Phi_x, T_{3y}, y) + (f_{1y}, T_{3y}, y) = 0 \\
(f_{3y}, T_{3y}, y) = 0 .
\end{cases}
$$

Wegen der letzten Gleichung unterscheidet man sofort zwei Fälle. Entweder ist

$$T_3 = \frac{\lambda}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) \tag{36}$$

(λ von Null verschieden), oder es setzt sich f_3 aus T_3 und aus $\frac{\lambda}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$ zusammen; und da f durch Abziehen von T modificirt werden kann, so darf man dann immer setzen:

$$f_3 = \frac{\lambda}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) . \tag{37}$$

Führen wir im ersten Falle den Ausdruck (36) für T_3 in die dritte Gleichung (35) ein, und setzen die y den x gleich, so erhalten wir, da die Differentialquotienten von f_1 gleich aber entgegengesetzt werden und sich also aufheben:

$$(f_{3x}, \Theta_x, x) = 0 . \tag{38}$$

Entweder also ist $\Theta = \frac{\varkappa}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$, d. h. in der reducirten Form (vergl. (22)) $\Theta = 0$, oder die Function f_3, geschrieben mit den y, wie es ihrer ursprünglichen Form entspricht, hat den Ausdruck:

$$f_3 = \varkappa\, \Theta_{(y)} + \frac{\varrho}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) . \tag{39}$$

Dabei kann man den letzten Theil übergehen, also $\varrho = 0$ setzen, weil dieser Theil in f durch Abziehen von T zerstört werden kann.

Führt man dagegen im zweiten Falle die Werthe von f_3 in die dritte Gleichung (35) ein, und setzt wieder die y den x gleich, so erhält man

$$(\Phi_x, T_{3x}, x) = 0 , \tag{40}$$

und da hier der Fall $T_3(x) = \frac{\lambda}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$ ausgeschlossen werden kann, insofern er dem ersten Falle angehört, so ergiebt sich

$$\Phi_{(x)} = \varkappa\, T_3(x) + \frac{\varrho}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) . \tag{41}$$

Auch hier kann man $\varrho = 0$ setzen; denn dieser Theil veranlasst in f_2 nur das Glied

$$\varrho\,(x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3) ,$$

welches ausgelassen werden kann.

Es sind also folgende drei Fälle zu unterscheiden, in welchen die vierte Gleichung (35) bereits erfüllt ist, und diejenige, welche aus der dritten entsteht, wenn man die y den x gleich setzt:

$$\text{I.} \quad T_3 = \frac{\lambda}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \qquad \Theta = 0.$$

$$\text{II.} \quad T_3 = \frac{\lambda}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \qquad f_3 = \varkappa \Theta_{(y)}.$$

$$\text{III.} \quad f_3 = \frac{\lambda}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2), \qquad \Phi_{(x)} = \varkappa T_3(x).$$

§ 8.

Beweis, dass f_1 verschwinden muss.

Ich werde jetzt zeigen, dass f_1 in allen drei Fällen verschwindet. Dies beruht auf der weiteren Benutzung der dritten Gleichung (35). Im Falle I. verwandelt sich die dritte Gleichung (35) in:

$$\lambda(\Phi_y, y, x) + (f_{1x}, y, x) = 0.$$

Setzen wir daher die Coefficienten von x_1, x_2, x_3 einzeln gleich Null und führen die Werthe der Differentialquotienten von f_1 ein, so haben wir:

$$\mu_2 y_3 - \mu_3 y_2 = \lambda \frac{\partial \Phi_{(y)}}{\partial y_1} + \varrho y_1$$

$$\mu_3 y_1 - \mu_1 y_3 = \lambda \frac{\partial \Phi_{(y)}}{\partial y_2} + \varrho y_2$$

$$\mu_1 y_2 - \mu_2 y_1 = \lambda \frac{\partial \Phi_{(y)}}{\partial y_3} + \varrho y_3,$$

wo ϱ eine unbestimmte Constante ist. Die rechten Theile sind Differentialquotienten einer Function; multiplicirt man mit y_1, y_2, y_3 und addirt, so kommt:

$$2\lambda \Phi_{(y)} + \varrho (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = 0.$$

Daher ist Φ mit $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$ proportional; man hat also daraus in f_2 einen mit $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ proportionalen Theil, welcher ausgelassen werden kann. Daher kann man setzen

$$\varrho = 0, \quad \Phi = 0, \quad f_2 = 0 \tag{42}$$

und die obigen Gleichungen geben dann alle $\mu = 0$, also auch $f_1 = 0$.

Im Falle II. verwandelt sich die dritte Gleichung (35) in folgende:

$$\lambda(\Phi_y, y, x) + \varkappa(\Theta_y, \Theta_x, y) + \lambda(f_{1x}, y, x) = 0. \tag{43}$$

Hier bedarf der mittlere Theil einer Umformung. Die Coefficienten von Θ sind die b_{ik}, also ist, wenn

$$b_{22}\,b_{33} - b_{23}^2 = B_{11} \qquad b_{12}\,b_{13} - b_{11}\,b_{23} = B_{23} \qquad x_2\,y_3 - x_3\,y_2 = u_1$$
$$b_{33}\,b_{11} - b_{31}^2 = B_{22} \qquad b_{23}\,b_{21} - b_{22}\,b_{31} = B_{31} \qquad x_3\,y_1 - x_1\,y_3 = u_2$$
$$b_{11}\,b_{22} - b_{12}^2 = B_{33} \qquad b_{31}\,b_{32} - b_{33}\,b_{12} = B_{12} \qquad x_1\,y_2 - x_2\,y_1 = u_3$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_2}\frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_3} - \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_3}\frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_2} = -(B_{11}\,u_1 + B_{12}\,u_2 + B_{13}\,u_3)$$
$$\frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_3}\frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_1} - \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_1}\frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_3} = -(B_{21}\,u_1 + B_{22}\,u_2 + B_{23}\,u_3)$$
$$\frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_1}\frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_2} - \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_2}\frac{\partial \Theta_{(x)}}{\partial x_1} = -(B_{31}\,u_1 + B_{32}\,u_2 + B_{33}\,u_3),$$

und die Gleichung (43) verwandelt sind in eine für die μ lineare, deren Coefficienten linear in den y sind. Diese Coefficienten müssen also den y proportional werden, und man hat:

$$\lambda(\mu_2\,y_3 - \mu_3\,y_2) = \lambda\frac{\partial \Phi_{(y)}}{\partial y_1} + \varkappa\frac{\partial \Omega_{(y)}}{\partial y_1} + \sigma\,y_1$$
$$\lambda(\mu_3\,y_1 - \mu_1\,y_3) = \lambda\frac{\partial \Phi_{(y)}}{\partial y_2} + \varkappa\frac{\partial \Omega_{(y)}}{\partial y_2} + \sigma\,y_2$$
$$\lambda(\mu_1\,y_2 - \mu_2\,y_1) = \lambda\frac{\partial \Phi_{(y)}}{\partial y_3} + \varkappa\frac{\partial \Omega_{(y)}}{\partial y_3} + \sigma\,y_3,$$

wo Ω die Function bedeutet:

$$\Omega_{(y)} = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\Sigma\,B_{ik}\,y_i\,y_k. \tag{44}$$

Es folgt aus diesem System ganz wie oben, dass alle μ verschwinden, und zwar hat man, indem $\sigma = 0$ gesetzt werden darf:

$$b_4 = 0,\quad \Phi = -\frac{\varkappa}{\lambda}\,\Omega. \tag{45}$$

Der Fall III. ist etwas verwickelter. In diesem Falle geht die dritte Gleichung (35) über in:

$$0 = \lambda(y, \Theta_y, x) + \varkappa(T_{3y}, T_{3x}, y) + (f_{4x}, T_{3y}, x) + (f_{4y}, T_{3y}, y). \tag{46}$$

Der erste Term ist gleich

$$\lambda\left(u_1\frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_1} + u_2\frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_2} + u_3\frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_3}\right),$$

der zweite wird behandelt wie der zweite Term in (43), und giebt also, wenn

$$\mathsf{T} = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\Sigma\,C_{ik}\,y_i\,y_k,$$
$$C_{11} = c_{22}\,c_{33} - c_{23}^2 \qquad C_{23} = c_{12}\,c_{13} - c_{23}\,c_{11}$$
$$C_{22} = c_{33}\,c_{11} - c_{31}^2 \qquad C_{31} = c_{23}\,c_{21} - c_{31}\,c_{22}$$
$$C_{33} = c_{11}\,c_{22} - c_{12}^2 \qquad C_{12} = c_{31}\,c_{32} - c_{12}\,c_{33}$$

gesetzt wird:

$$-\varkappa\left(u_1\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial y_1} + u_2\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial y_2} + u_3\frac{\partial \mathsf{T}}{\partial y_3}\right).$$

Endlich hat man noch

$$x_2 \frac{\partial f_4}{\partial x_3} - x_3 \frac{\partial f_4}{\partial x_2} + y_2 \frac{\partial f_4}{\partial y_3} - y_3 \frac{\partial f_4}{\partial y_2} = \mu_3 u_2 - \mu_2 u_3$$
$$x_3 \frac{\partial f_4}{\partial x_1} - x_1 \frac{\partial f_4}{\partial x_3} + y_3 \frac{\partial f_4}{\partial y_1} - y_1 \frac{\partial f_4}{\partial y_3} = \mu_1 u_3 - \mu_3 u_1$$
$$x_1 \frac{\partial f_4}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial f_4}{\partial x_1} + y_1 \frac{\partial f_4}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial f_4}{\partial y_1} = \mu_2 u_1 - \mu_1 u_2 .$$

Die Gleichung (46) verwandelt sich also in folgende:

$$0 = \lambda \left(u_1 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_2} + u_3 \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_3} \right) - \varkappa \left(u_1 \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial y_1} + u_2 \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial y_2} + u_3 \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial y_3} \right) + \begin{vmatrix} \frac{\partial T_3}{\partial y_1} & u_1 & \mu_1 \\ \frac{\partial T_3}{\partial y_2} & u_2 & \mu_2 \\ \frac{\partial T_3}{\partial y_3} & u_3 & \mu_3 \end{vmatrix} .$$

Hier müssen nun die Coefficienten der u den y proportional werden; man muss also haben:

$$\lambda \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_1} - \varkappa \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial y_1} = \mu_3 \frac{\partial T_3}{\partial y_2} - \mu_2 \frac{\partial T_3}{\partial y_1}$$
$$\lambda \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_2} - \varkappa \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial y_2} = \mu_1 \frac{\partial T_3}{\partial y_3} - \mu_3 \frac{\partial T_3}{\partial y_1}$$
$$\lambda \frac{\partial \Theta_{(y)}}{\partial y_3} - \varkappa \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial y_3} = \mu_2 \frac{\partial T_3}{\partial y_1} - \mu_1 \frac{\partial T_3}{\partial y_2} .$$

Die linken Theile sind wieder Differentialquotienten derselben Function; stellt man aber dieselbe Forderung an die rechten Theile, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\mu_1 (c_{11} + c_{22} + c_{33}) - (\mu_1 c_{11} + \mu_2 c_{12} + \mu_3 c_{13}) = 0$$
$$\mu_2 (c_{11} + c_{22} + c_{33}) - (\mu_1 c_{21} + \mu_2 c_{22} + \mu_3 c_{23}) = 0$$
$$\mu_3 (c_{11} + c_{22} + c_{33}) - (\mu_1 c_{31} + \mu_2 c_{32} + \mu_3 c_{33}) = 0 .$$

In § 4. wurde bewiesen, dass die Determinante dieser Gleichungen nicht verschwinden kann; daher sind abermals alle $\mu = 0$, und $f_4 = 0$, was zu beweisen war. Die obigen Gleichungen geben noch

$$\lambda \Theta = \varkappa \mathsf{T} .$$

Nachdem also die beiden letzten Gleichungen (35) vollständig befriedigt sind, werden unsere Fälle folgende:

I. $T_3 = \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, $\Theta = 0$, $\Phi = 0$, $f_4 = 0$.

II. $T_3 = \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, $f_4 = 0$, $f_3 = \varkappa \Theta_{(y)}$, $\Phi = -\frac{\varkappa}{\lambda} \Omega$.

III. $f_3 = \frac{\lambda}{2} (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$, $\Phi_{(x)} = \varkappa T_{3(x)}$, $f_4 = 0$, $\lambda \Theta = \varkappa \mathsf{T}$.

§ 9.

Behandlung des Falles I.

Wir wollen jetzt die 3 Fälle vollständig erledigen. Im Falle I. ist die erste der Gleichungen (35) bereits erfüllt, die zweite giebt:

$$\lambda\,(f_{1x}\,,\ y\,,\ x) + (f_{3y}\,,\ T_{1x}\,,\ x) = 0\,. \tag{47}$$

Setzt man die y gleich den x, so findet man:

$$(f_{3y}\,,\ T_{1y}\,,\ y) = 0\,.$$

Der Fall, wo $T_{1(x)}$ proportional $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ oder was dasselbe ist gleich Null ist, hat mit $\Theta = 0$ zusammen auch nicht einmal ein analytisches Interesse. Man kann daher ohne Weiteres

$$f_3 = \varkappa\, T_{1(y)} + \tfrac{\varrho}{2}\,(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

setzen, wo übrigens der zweite Theil noch übergangen werden kann, da er durch Abziehen der Function T von f zerstört werden kann. Setzt man also

$$f_3 = \varkappa\, T_{1(y)}\,, \tag{48}$$

so giebt die Gleichung (47) noch:

$$\lambda\,(f_{1x}\,,\ y\,,\ x) + \varkappa\,(T_{1y}\,,\ T_{1x}\,,\ x) = 0\,. \tag{49}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} A_{11} &= a_{22}\,a_{33} - a_{23}^2 & A_{23} &= a_{12}\,a_{13} - a_{11}\,a_{23} \\ A_{22} &= a_{33}\,a_{11} - a_{31}^2 & A_{31} &= a_{23}\,a_{21} - a_{22}\,a_{31} \\ A_{33} &= a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2 & A_{12} &= a_{31}\,a_{32} - a_{33}\,a_{12} \end{aligned}$$

$$\Delta = \tfrac{1}{2}\,\Sigma\Sigma\,A_{ik}\,x_i\,x_k\,,$$

so hat man, ähnlich wie oben:

$$(T_{1y}\,,\ T_{1x}\,,\ x) = -\,\Sigma\Sigma\,A_{ik}\,x_i\,u_k\,,$$

und (49) verwandelt sich in:

$$\lambda\,\Sigma\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\,u_i + \varkappa\,\Sigma\Sigma\,A_{ik}\,x_i\,u_k = 0\,,$$

so dass

$$\begin{aligned} \lambda\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \varkappa\frac{\partial \Delta}{\partial x_1} &= \varrho\,x_1 \\ \lambda\frac{\partial f_1}{\partial x_2} + \varkappa\frac{\partial \Delta}{\partial x_2} &= \varrho\,x_2 \\ \lambda\frac{\partial f_1}{\partial x_3} + \varkappa\frac{\partial \Delta}{\partial x_3} &= \varrho\,x_3\,, \end{aligned}$$

daher, mit Uebergehen eines überflüssigen Termes:

$$f_1 = -\,\frac{\varkappa}{\lambda}\,\Delta\,.$$

Man kann also den Satz aussprechen:

Wird in den Gleichungen (13), (14) *die reducirte Form von* T:

$$T = T_1 + \frac{\lambda}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

wo λ *eine Constante,* T_1 *eine beliebige Function zweiter Ordnung in den* x *ist, so ist ein Integral der Gleichungen*

$$\text{Const.} = -\Delta + \lambda T_{1(y)},$$

wobei 2Δ *die Function zweiter Ordnung der* x *ist, deren Coefficienten die aus den Coefficienten von* $2T$ *zusammengesetzten Unterdeterminanten werden.*

Man bestätigt diesen Satz leicht auf folgende Weise. Man kann es durch eine Drehung der im Körper festen Achsen erreichen, dass T_1 nur die Quadrate enthält:

$$2T_1 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2.$$

Die Gleichungen (13), (14) werden:

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda(x_3 y_2 - x_3 y_2) \qquad \frac{dy_1}{dt} = (a_2 - a_3) x_2 x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda(x_1 y_3 - y_1 x_3) \qquad \frac{dy_2}{dt} = (a_3 - a_1) x_3 x_1$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \lambda(x_2 y_1 - y_2 x_1) \qquad \frac{dy_3}{dt} = (a_1 - a_2) x_1 x_2.$$

Daher hat man in der That:

$(a_2 a_3 x_1^2 + a_3 a_1 x_2^2 + a_1 a_2 x_3^2) - (a_1 y_1^2 + a_2 y_2^2 + a_3 y_3^2) = \text{Const.}$, was das im Satze gegebene Integral ist.

§ 10.

Behandlung des Falles II.

Im Falle II. werden die ersten beiden Gleichungen (35):

$$(50)\quad \begin{cases} (f_{1x}, \Theta_x, x) - \frac{\varkappa}{\lambda}(\Omega_x, T_{1x}, x) = 0 \\ \frac{\varkappa}{\lambda}\{(A_y, \Theta_x, x) + (\Omega_x, \Theta_y, x) + (\Omega_x, \Theta_x, y)\} \\ \qquad + \lambda(f_{1x}, y, x) + \varkappa(\Theta_y, T_{1x}, x) = 0. \end{cases}$$

Man kann in diesem Falle immer $\varkappa$ als von Null verschieden annehmen. Denn setzt man $\varkappa = 0$, so ist $f_3 = 0$, $f_2 = 0$, und aus (50) würde auch $f_1 = 0$ folgen.

Setzt man in der zweiten Gleichung (50) die y gleich den x, so hat man

$$\frac{3}{\lambda}(\Omega_x, \Theta_x, x) + (\Theta_x, T_{1x}, x) = 0,$$

daher

$$(51)\qquad T_{1(x)} = \frac{3}{\lambda}\Omega_{(x)} + \varrho\,\Theta_{(x)} + \frac{\sigma}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

Die erste Gleichung (50) giebt nun

$$(f_{1x}\ ,\ \Theta_x\ ,\ x) - \tfrac{\varkappa}{\lambda}\ (\Omega_x\ ,\ \Theta_x\ ,\ x) = 0\ ,$$

also

$$f_1 = \tfrac{\varkappa}{\lambda}\ \Omega + \mu\ \Theta + \tfrac{1}{2}\ (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2),$$

wobei indessen der letzte Term übergangen werden darf, so dass

$$f_1 = \tfrac{\varkappa}{\lambda}\ \Omega + \mu\ \Theta\ . \tag{52}$$

Setzt man nun die Ausdrücke (51), (52) in die zweite Gleichung (50) ein, so ergiebt sich:

$$\tfrac{\varkappa}{\lambda}\ \{(\Omega_y\ ,\ \Theta_x\ ,\ x) - 2(\Omega_x\ ,\ \Theta_y\ ,\ x) + (\Omega_x\ ,\ \Theta_x\ ,\ y)\} = \lambda\mu(\Theta_x\ ,\ y\ ,\ x) + \varkappa(\Omega_x\ ,\ y\ ,\ x). \tag{53}$$

Der linken Seite dieser Gleichung muss nun eine solche Form gegeben werden, dass sie nach den u geordnet ist. Man erhält:

$$\begin{aligned}
(\Omega_x, \Theta_x, y) - (\Omega_x, \Theta_y, x) &= \Sigma\Sigma\ b_{ik} u_i \frac{\partial \Omega}{\partial x_x} - (\ b_{11} + b_{22} + b_{33})\Big(u_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \Omega}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \Omega}{\partial x_3}\Big) \\
(\Theta_x, \Omega_x, y) - (\Theta_x, \Omega_y, x) &= \Sigma\Sigma B_{ik} u_i \frac{\partial \Theta}{\partial x_x} - (B_{11} + B_{22} + B_{33})\Big(u_1 \frac{\partial \Theta}{\partial x_1} + u_2 \frac{\partial \Theta}{\partial x_2} + u_3 \frac{\partial \Theta}{\partial x_3}\Big);
\end{aligned} \tag{54}$$

in der ersten dieser Gleichungen ist rechts das letzte Glied Null, weil $b_{11} + b_{22} + b_{33}$ verschwindet. Sodann ist

$$\Sigma\Sigma\ b_{ix}\ u_i\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_x} = \sum_{ixh} b_{ix}\ u_i\ B_{hx}\ x_h$$

$$\Sigma\Sigma\ B_{ix}\ u_i\ \frac{\partial \Theta}{\partial x_x} = \sum_{ixh} B_{ix}\ u_i\ b_{hx}\ x_h\ .$$

Es ist aber nach der Definition der B_{ix}

$$\sum_x b_{ix}\ B_{hx} = 0 \qquad (i \gtrless h)$$

$$\sum_x b_{ix}\ B_{ix} = B\ ,$$

wo B die Determinante der b_{ix} bedeutet. Daher ist

$$\Sigma\ \Sigma\ b_{ix}\ u_i\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_x} = \Sigma\ \Sigma\ B_{ix}\ u_i\ \frac{\partial \Theta}{\partial x_x} = B\ \Sigma\ u_i\ x_i = 0\ .$$

Von den beiden Ausdrücken (54) verschwindet also der erste, der zweite reducirt sich auf seinen zweiten Theil. Die Gleichung (53) aber verwandelt sich nun in:

$$\Sigma\ B_{ii}\ .\ \Sigma\ u_x\ \frac{\partial \Theta}{\partial x_x} = \frac{\mu\lambda^2}{\varkappa}\ \Sigma\ u_i\ \frac{\partial \Theta}{\partial x_i} + \lambda\ \Sigma\ u_i\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_i}\ .$$

Um diese Gleichung zu erfüllen, setzt man die Coefficienten der u den x proportional, und hat also die Beziehungen:

$$\Big(B_{11} + B_{22} + B_{33} - \frac{\mu\lambda^2}{\varkappa}\Big)\ \frac{\partial \Theta}{\partial x_x} - \lambda\ \frac{\partial \Omega}{\partial x_x} = \tau x_x\ ,$$

oder

$$(55)\quad \left(B_{11}+B_{22}+B_{33}-\frac{\mu\lambda^2}{\varkappa}\right)\Theta-\lambda\,\Omega=\frac{\tau}{2}\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2).$$

Stellen wir alles zusammen, so haben wir

$$(56)\quad \begin{cases} T=\frac{3}{\lambda}\,\Omega(x)+\varrho\,\Theta(x)+\frac{\sigma}{2}\,(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+\Sigma y_i\frac{\partial\Theta}{\partial x_i}+\frac{\lambda}{2}\,(y_1^2+y_2^2+y_3^2 \\ f=\frac{\varkappa}{\lambda}\,\Omega(x)+\mu\,\Theta(x)-\frac{\varkappa}{\lambda}\,\Sigma y_i\frac{\partial\Omega}{\partial x_i}+\varkappa\,\Theta(y); \end{cases}$$

wo also alles auf *eine* Function Θ zurückgeführt ist, durch welche auch Ω sich ausdrückt; die Gleichung (55) aber ist eine Bedingung für diese Function selbst.

Denken wir uns, um diese Bedingung zu untersuchen, eine orthogonale Substitution sowohl auf die y als auf die x angewendet, welche Θ in eine Summe von Quadraten verwandelt; was einer Drehung der im Körper festen Achsen entspricht. Es ist dann

$$\Theta=\tfrac{1}{2}(b_1x_1^2+b_2x_2^2+b_3x_3^2) \qquad (b_1+b_2+b_3)=0.$$
$$\Omega=\tfrac{1}{2}(b_2b_3x_1^2+b_3b_1x_2^2+b_1b_2x_3^2).$$

Die Gleichung (55) gibt, wenn der Kürze wegen

$$b_2b_3+b_3b_1+b_1b_2-\frac{\mu\lambda^2}{\varkappa^2}=m$$

gesetzt wird:

$$mb_1-\lambda b_2b_3=\tau$$
$$mb_2-\lambda b_3b_1=\tau$$
$$mb_3-\lambda b_1b_2=\tau,$$

und wenn man mit (b_2-b_3), (b_3-b_1), $b_1-b_2)$ multiplicirt und addirt:

$$(b_2-b_3)\,(b_3-b_1)\,(b_1-b_2)=0.$$

Zwei der b müssen also gleich sein, und die Form von T wird diejenige, welche in § 6. bereits behandelt wurde. Dieser Fall gibt also nichts neues.

§ 11.

Behandlung des Falles III.

Die Gleichungen (35) sind, nachdem bewiesen ist, dass $f_4=0$, für f und T vollkommen symmetrisch, und da man auch beiden Functionen, ohne die Allgemeinheit zu vermindern, die reducirte Form geben kann, so sieht man, dass alle Fälle, in denen $f_3=\frac{\lambda}{2}\,(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$ unmittelbar durch Vertauschung von f und T aus dem Falle erhalten werden, in welchem T_3 diese Form hat, wobei nur zu bemerken ist, dass f noch immer um T, multiplicirt mit einer Constanten, vermehrt werden kann. Der Fall III. ergibt sich daher ohne Weiteres aus I. und II. Nun haben im Falle II. f und T genau dieselbe Form, und

man kann daher durch Vertauschung beider Functionen nichts neues erhalten. Dagegen war im Falle I.

$$T = T_1(x) + \frac{\lambda}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

$$f = -\Delta + \lambda T_1(y),$$

oder wenn wir die letzte Function auf die reducirte Form bringen, und T multiplicirt mit einer Constanten hinzufügen:

$$= \tfrac{1}{6}(A_{11}+A_{22}+A_{33})(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - \Delta + \nu T_1(x) + \lambda T_1(y) + \frac{\nu\lambda}{2}(y_1^2+y_2^2+y_3^2).$$

Wir erhalten daher umgekehrt, wenn T die reducirte Form:

$$T = \tfrac{1}{6}(C_{11}+C_{22}+C_{33})(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - \Delta + \nu T_1(x) + \lambda T_1(y) + \frac{\nu\lambda}{2}(y_1^2+y_2^2+y_3^2)$$

hat:

$$f = T_1(x) + \frac{\lambda}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Hiebei ist T_1 ganz beliebig. Wir können uns das Coordinatensystem so gedreht denken, dass T_1 nur die Quadrate der y enthält; dann enthält auch der erste Theil von T (T_1) nur die Quadrate der x; und zwar wird

$$T = \tfrac{1}{6}(c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1)(x_1^2+x_2^2+x_3^2) - \tfrac{1}{2}(c_2c_3x_1^2+c_3c_1x_2^2+c_1c_2x_3^2) + \frac{\nu}{2}(c_1x_1^2+c_2x_2^2+c_3x_3^2)$$
$$+ \frac{\lambda}{2}(c_1y_1^2 + c_2y_2^2 + c_3y_3^2) + \frac{\nu\lambda}{2}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2).$$

Die allgemeine Function T, welche nur die Quadrate enthält, hängt von 6 Constanten ab, die vorliegende von 5. Setzen wir

$$(57) \qquad 2T = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + b_3y_3^2,$$

so wird

$$a_1 = \frac{c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1}{3} - c_2c_3 + \nu c_1 \qquad b_1 = \lambda(c_1+\nu)$$

$$a_2 = \frac{c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1}{3} - c_3c_1 + \nu c_2 \qquad b_2 = \lambda(c_2+\nu)$$

$$a_3 = \frac{c_1c_2+c_2c_3+c_3c_1}{3} - c_1c_2 + \nu c_2 \qquad b_3 = \lambda(c_3+\nu),$$

daher

$$a_2 - a_3 = \frac{c_2-c_3}{2}(c_1+\nu)$$

$$a_3 - a_1 = \frac{c_3-c_1}{2}(c_2+\nu)$$

$$a_3 - a_1 = \frac{c_1-c_2}{2}(c_3+\nu),$$

und

$$(58) \qquad \frac{a_2-a_3}{b_1} + \frac{a_3-a_1}{b_2} + \frac{a_1-a_2}{b_3} = 0.$$

Dies ist in der That die einzige zwischen den a, b zu erfüllende Gleichung. Man erfüllt sie einfacher dadurch, dass man

$$(59)\qquad \begin{cases} a_1 = \varrho + \sigma\, b_2 b_3 \\ a_2 = \varrho + \sigma\, b_3 b_1 \\ a_3 = \varrho + \sigma\, b_1 b_2 , \end{cases}$$

also

$$2T = \varrho(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \sigma(b_2 b_3 x_1^2 + b_3 b_1 x_2^2 + b_1 b_2 x_3^2) + b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2$$

setzt. Die Differentialgleichungen werden dann:

$$\frac{dx_1}{dt} = b_2 y_2 x_3 - b_3 y_3 x_2 \qquad \frac{dy_1}{dt} = \sigma b_1 (b_3 - b_2)\, x_2 x_3 + (b_2 - b_3)\, y_2 y_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = b_3 y_3 x_1 - b_1 y_1 x_3 \qquad \frac{dy_2}{dt} = \sigma b_2 (b_1 - b_3)\, x_3 x_1 + (b_3 - b_1)\, y_3 y_1$$

$$\frac{dx_3}{dt} = b_1 y_1 x_2 - b_2 y_2 x_1 \qquad \frac{dy_3}{dt} = \sigma b_3 (b_2 - b_1)\, x_1 x_2 + (b_1 - b_2)\, y_1 y_2 .$$

Dieselben haben das Integral:

$$2f = \text{Const.} = \sigma(b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2),$$

was augenblicklich verificirt werden kann. Und somit hat man den Satz:

Wenn $2T$ die Form hat

$$2T = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + b_1 y_1^2 + b_2 y_2^2 + b_3 y_3^2 ,$$

und es besteht zwischen den a, b die einzige Gleichung

$$\frac{a_2 - a_3}{b_1} + \frac{a_3 - a_1}{b_2} + \frac{a_1 - a_2}{b_3} = 0 ,$$

so dass

$$a_1 = \varrho + \sigma\, b_2 b_3$$
$$a_2 = \varrho + \sigma\, b_3 b_1$$
$$a_3 = \varrho + \sigma\, b_1 b_2$$

gesetzt werden kann, so haben die Gleichungen (13) (14) *das Integral*

$$\sigma(b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = \text{Const.}$$

Die Bedingungsgleichung (58), welche auch die Form annimmt:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 1 & b_2 b_3 \\ a_2 & 1 & b_3 b_1 \\ a_3 & 1 & b_1 b_2 \end{vmatrix} = 0$$

lässt noch eine zweite Lösung zu, nämlich $b_1 = b_2 = b_3$. Aber dies führt nur zu dem Fall I. zurück.

§ 12.

Schluss.

Es haben sich im Ganzen drei neue Fälle ergeben, in welchen es möglich ist die betrachteten Gleichungen auf Quadraten zurückzuführen. Von diesen ist der in § 6. behandelte eine directe Erweiterung des von Herrn Kirchhoff behandelten Falles, indem die Function T,

welche wir gefunden haben, den allgemeinsten Fall umfasst, in welchem sie, so zu sagen, den Character einer Rotationsfläche besitzt. Auch lässt sich dieser so erweiterte Fall sofort wie der Kirchhoff'sche weiter behandeln, und führt in ganz gleicher Weise auf elliptische Functionen.

Im Falle I. geben die Gleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = \lambda\,(x_3y_2 - y_3x_2) \qquad \frac{dy_1}{dt} = (a_2 - a_3)\,x_2x_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \lambda\,(x_1y_3 - y_1x_3) \qquad \frac{dy_2}{dt} = (a_3 - a_1)\,x_3x_1$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \lambda\,(x_2y_1 - y_2x_1) \qquad \frac{dy_3}{dt} = (a_1 - a_2)\,x_1x_2$$

die Integrale:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c \quad a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + \lambda(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = c'$$

$$a_2a_3x_1^2 + a_3a_1x_2^2 + a_1a_2x_3^2 - (a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + a_3y_3^2) = c'' \quad x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \gamma;$$

setzt man

$$u = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2, \qquad v = a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + a_3y_3^2,$$

und drückt alles durch u und v aus, so ist nach der Theorie des Multiplicators

$$\text{Const.} = \int dv \cdot \frac{\begin{vmatrix} y_1 & a_1x_1 & x_1 \\ y_2 & a_2x_2 & x_2 \\ y_3 & a_3x_3 & x_3 \end{vmatrix} - du \begin{vmatrix} a_1y_1 & a_1x_1 & x_1 \\ a_2y_2 & a_2x_2 & x_2 \\ a_3y_3 & a_3x_3 & x_3 \end{vmatrix}}{x_1x_2x_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & a_1y_1 \\ x_2 & y_2 & a_2y_2 \\ x_3 & y_3 & a_3y_3 \end{vmatrix}}$$

das fünfte Integral; das sechste liefert die Zeit aus irgend einer der Differentialgleichungen selbst. Die Umformung des fünften Integrals scheint mit grossen Schwierigkeiten verknüpft zu sein.

Aehnlich ist es im Falle III. Die Gleichungen

$$\frac{dx_1}{dt} = b_2y_2x_3 - b_3y_3x_2 \qquad \frac{dy_1}{dt} = \sigma b_1(b_3 - b_2)\,x_2x_3 + (b_2 - b_3)\,y_2y_3$$

$$\frac{dx_2}{dt} = b_3y_3x_1 - b_1y_1x_3 \qquad \frac{dy_2}{dl} = \sigma b_2(b_1 - b_3)\,x_3x_1 + (b_3 - b_1)\,y_3y_1$$

$$\frac{dx_3}{dt} = b_1y_1x_2 - b_2y_2x_1 \qquad \frac{dy_3}{dt} = \sigma b_3(b_2 - b_1)\,x_1x_2 + (b_1 - b_2)\,y_1y_2$$

geben die vier Integrale:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c \quad , \quad \sigma(b_1x_1^2 + b_2x_2^2 + b_3x_3^2) - (y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) = c'$$

$$\sigma(b_2b_3x_1^2 + b_3b_1x_2^2 + b_1b_2x_3^2) + (b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + b_3y_3^2) = c'' \quad , \quad x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \gamma.$$

Setzt man wieder

$$u = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \quad , \quad v = b_1y_1^2 + b_2y_2^2 + b_3y_3^2,$$

so ist das fünfte Integral:

$$\text{Const.} = \int \frac{dv \begin{vmatrix} b_1y_1 & x_1 & b_1x_1 \\ b_2y_2 & x_2 & b_2x_2 \\ b_3y_3 & x_3 & b_3x_3 \end{vmatrix} - du \begin{vmatrix} b_1^2y_1 & x_1 & b_1x_1 \\ b_2^2y_2 & x_2 & b_2x_2 \\ b_3^2y_3 & x_3 & b_3x_3 \end{vmatrix}}{x_1x_2x_3 \cdot \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & b_1y_1 \\ x_2 & y_2 & b_2y_2 \\ x_3 & y_3 & b_3y_3 \end{vmatrix}},$$

während die Zeit schliesslich aus einer der Differentialgleichungen gefunden wird.

Göttingen, 31. Mai 1870.

Ueber die Bedeutung einer simultanen Invariante einer binären quadratischen und einer binären biquadratischen Form.

Von A. Clebsch in Göttingen.

Ist eine biquadratische Form f und eine quadratische g gegeben, so kann man fragen, unter welchen Umständen es möglich ist, f als quadratische Function von g und einer andern quadratischen Form auszudrücken. Dass hiezu eine, und nur eine, Bedingung erfüllt werden muss, übersieht man leicht. Ich werde zeigen, dass diese Bedingung sich durch das Verschwinden der zu f und g gehörigen alternirenden (gauche) Invariante ausdrückt (vergl. Harbordt, d. Ann. Bd. I., p. 211), welche man auch bilden kann, wenn man aus

$$g = g_x^2 = g'_x{}^2 = g''_x{}^2$$

und der zu f gehörigen alternirenden Covariante

$$t = t_x^6$$

den symbolischen Ausdruck

$$R = (tg)^2\,(tg')^2\,(tg'')^2$$

zusammensetzt.

Ist h die Hesse'sche Covariante von f, so gibt es bekanntlich drei Werthe von λ, für welche $h + \lambda f$ das Quadrat eines quadratischen Ausdrucks wird. Die so gegebenen quadratischen Ausdrücke seien

$$\varphi = \varphi_x^2, \quad \psi = \psi_x^2, \quad \chi = \chi_x^2.$$

Sie haben drei Eigenschaften, von denen hier Gebrauch gemacht werden soll:

1. Die Functionaldeterminante zweier ist immer bis auf eine numerische Constante gleich der dritten.

2. Die simultanen Invarianten je zweier verschwinden.

3. Das Product $\varphi \,.\, \psi \,.\, \chi$ ist bis auf eine numerische Constante gleich der Functionaldeterminante t von f und g.

Soll f durch g und eine andre Function zweiten Grades, l, quadratisch ausdrückbar sein, so muss f in zwei für g und l lineare Factoren zerfallen. Aber andrerseits ist f entweder durch φ und ψ oder durch φ und χ oder durch ψ und χ quadratisch darstellbar, und die

auf dreifache Weise mögliche Zerlegung von f in quadratische Factoren führt entweder auf zwei in φ, ψ, oder auf zwei in φ, χ oder endlich auf zwei in ψ, χ lineare Factoren. Mit einer dieser Zerlegungen muss die gesuchte übereinstimmen, und es muss also g entweder durch φ, ψ oder durch φ, χ oder durch ψ, χ sich linear ausdrücken lassen.

Dass g sich aus φ und ψ linear zusammensetze, wird durch das Verschwinden der Invariante

$$(\varphi\psi)\,(\varphi g)\,(\psi g)$$

ausgedrückt; diese aber, welche nichts anderes als die simultane Invariante von g und von der Functionaldeterminante $(\varphi\psi)\,\varphi_x\psi_x$ ist, kann nach 1. durch $(\chi g)^2$ ersetzt werden.

Es muss also eine der Invarianten $(\varphi g)^2$, $(\psi g)^2$, $(\chi g)^2$ verschwinden, oder, was dasselbe ist, es muss die Gleichung bestehen:

$$(\varphi g)^2 \cdot (\psi g')^2 \cdot (\chi g'')^2 = 0.$$

Ich werde jetzt zeigen, dass dies mit der Bedingung

$$R = (tg)^2\,(tg')^2\,(tg'')^2 = 0$$

übereinstimmt.

Da t bis auf einen numerischen Factor gleich $\varphi \cdot \psi \cdot \chi$ ist, so ist $t_x^1 t_y^2$ bis auf einen numerischen Factor gleich

$$\varphi_x^2\psi_x^2\chi_y^2 + \varphi_x^2\chi_x^2\psi_y^2 + \psi_x^2\chi_x^2\varphi_y^2$$
$$+ 2\left\{\varphi_x^2\psi_x\chi_x\psi_y\chi_y + \psi_x^2\chi_x\varphi_x\chi_y\varphi_y + \chi_x^2\varphi_x\psi_x\varphi_y\psi_y\right\}.$$

Nun ist aber nach bekannten Formeln:

$$\psi_x\chi_x\psi_y\chi_y = \tfrac{1}{2}[\psi_x^2\chi_y^2 + \chi_x^2\psi_y^2 - (\psi\chi)^2\,(xy)^2], \text{ u. s. w.}$$

Das letzte Glied rechts verschwindet nach 2.; daher kann $t_x^1 t_y^2$ durch

$$\varphi_x^2\psi_x^2\chi_y^2 + \varphi_x^2\chi_x^2\psi_y^2 + \psi_x^2\chi_x^2\varphi_y^2$$

ersetzt werden.

Ebenso tritt nun an Stelle von $t_x^2 t_y^2 t_z^2$ die Summe von 6 Termen der Form

$$\varphi_x^2\psi_y^2\chi_z^2,$$

welche man aus diesem durch Vertauschung von x, y, z ableitet. Endlich also kann man

$$R = (tg)^2\,(tg')^2\,(tg'')^2$$

durch die Summe der 6 Glieder ersetzen, welche man aus

$$(\varphi g)^2\,(\psi g')^2\,(\chi g'')^2$$

durch Vertauschung von g, g', g'' erhält. Aber diese Vertauschung ist nur eine Veränderung der Bezeichnung; alle 6 Terme sind also identisch, und demnach $(\varphi g)^2\,(\psi g')^2\,(\chi g'')^2$ von R nur durch einen numerischen Factor verschieden, was zu beweisen war.

Göttingen, Februar 1870.

Zur Theorie der binären algebraischen Formen*).

Von A. Clebsch in Göttingen.

Die Gesammtheit aller zu einer gegebenen binären Form f n^{ter} Ordnung**) gehörigen algebraischen Formen kann man unter zwei Gesichtspunkten betrachten, um sie auf eine möglichst kleine Zahl von Hauptformen zu reduciren.

Einmal kann man nach dem kleinsten System von Formen fragen, durch welche alle zu f gehörigen Covarianten und Invarianten sich als ganze Functionen mit rein numerischen Coefficienten ausdrücken. Diese Frage ist durch die Arbeiten von Herrn Gordan beantwortet worden; wo sich denn gezeigt hat, dass dies System ein endliches sei, für dessen Bildung alle Hülfsmittel bekannt sind, und bei dem nur noch die letzte Ausscheidung etwa überflüssiger Formen Schwierigkeiten machen kann.

Der zweite Gesichtspunkt ist schon durch die Arbeiten von Hermite entwickelt worden. Es handelt sich darum, alle Covarianten und Invarianten von f *rational* durch eine gewisse Anzahl derselben auszudrücken, wobei denn im Nenner immer nur Potenzen einer und derselben Covariante oder Invariante vorausgesetzt werden. Hermite's Theorie der associirten Formen führt zur Beantwortung dieser Frage. Man erhält ein einfaches System associirter Formen, d. h. solcher Formen, durch welche alle andern sich rational ausdrücken, bekanntlich auf folgende Weise. Sei $f = f(x_1, x_2)$ die gegebene Form, sei ferner

$$\xi = \frac{1}{n}\left(y_1 \frac{df}{dx_2} + y_2 \frac{df}{dx_2}\right)$$

$$\eta = x_1 y_2 - y_1 x_2 ;$$

man kann dann die y linear durch ξ, η ausdrücken, und erhält

$$(1)\quad f^{n-1}.f(y_1 y_2) = \xi^n + \frac{n.n-1}{1.2}\varphi_2 \xi^{n-2}\eta^2 - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\varphi_3 \xi^{n-3}\eta^3 + \cdots$$

*) Abgedruckt aus den Nachrichten der Kgl. Ges. d. Wiss. zu Göttingen. Jahrgang 1870. Seite 405.

**) Es ist hier nur von *einer* Grundform die Rede, um die Ausdrucksweise zu vereinfachen; doch kann man das Folgende natürlich sofort auf simultane Formen ausdehnen.

Bildet man nun aus dieser Gleichung Covarianten oder Invarianten von $f(y_1 y_2)$ und setzt in ihnen $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$ ($\eta = 0$, $\xi = f$), so ergeben sich alle zu f gehörige Formen als rationale Functionen der n Formen f, φ_2, $\varphi_3 \ldots \varphi_n$, wobei im Nenner immer nur eine Potenz von f steht.

Ich musste diese Verhältnisse kurz entwickeln, um einen Satz verständlich zu machen, den ich schon im vorigen Sommer gefunden habe, an dessen Veröffentlichung ich aber bisher durch andere Arbeiten gehindert wurde.

Dass zwischen den Covarianten f, φ_2, $\varphi_3 \ldots$ allgemein keine Relationen mit rein numerischen Coefficienten bestehen können, übersieht man sofort. Aber es entsteht die Frage, ob es nicht möglich sein sollte, diese Covarianten selbst durch eine Reihe absolut einfachster Covarianten rational so darzustellen, dass immer nur wieder Potenzen von f in den Nennern erscheinen. Und dies ist in der That möglich. Man kann nämlich folgenden Satz beweisen, welcher den Gegenstand dieser Mittheilung bildet:

Sind in symbolischer Darstellung

$$\psi_1 = (ab)^2 a_x^{n-2} b_x^{n-2}$$
$$\psi_2 = (ab)^4 a_x^{n-4} b_x^{n-4}$$
$$\ldots\ldots$$

die zu f gehörigen Covarianten, welche vom 2^{ten} Grade in den Coefficienten von f sind, so kann man die Formen φ_2, $\varphi_3 \ldots \varphi_n$ (und also überhaupt alle Covarianten und Invarianten von f) rational durch f, die ψ und die Functionaldeterminanten der ψ gegen f ausdrücken, und zwar erscheinen dabei in den Nennern immer nur Potenzen von f.

Man sieht aus diesem Satze, dass die Formen ψ nebst f und ihren Functionaldeterminanten gegen f das einfachste associirte Formensystem bilden; das einfachste, weil es überhaupt keine einfachern zu f gehörigen Formen giebt, als die genannten. Ihre Zahl ist gerade gleich n. Ist nämlich $n = 2h + 1$, so ist die Zahl der ψ gleich h, und ebenso die der Functionaldeterminanten, also die Gesammtzahl der Formen $2h + 1 = n$; ist dagegen $n = 2h$, so gibt es zwar wieder h Formen ψ, aber eine derselben ist Invariante, und es existiren nur $h - 1$ Functionaldeterminanten, so dass mit Einschluss von f die Gesammtzahl der Formen $2h = n$ ist.

Es mag beiläufig bemerkt werden, dass bis zur 7^{ten} Ordnung inclusive sogar ein Nenner f nicht auftritt, sondern die φ sich als *ganze* Functionen der genannten Bildungen ausdrücken.

Von grösserer Wichtigkeit ist die folgende Bemerkung. Wenn man die Darstellung (1) für die verschiedenen aufeinanderfolgenden Werthe von n bildet, so zeigt es sich, dass bei jedem weitern n nur

ein einziger neuer Coefficient, der letzte, zu berechnen ist. Alle übrigen Coefficienten erhält man aus den vorangehenden Bildungen, indem man diese mit den linearen Factoren $a_x b_x \ldots$ multiplicirt, welche den in ihnen auftretenden Symbolen entsprechen. Hierbei geht

$$(ab)^{2k} a_x^{n-2k} b_x^{n-2k}$$

in

$$(ab)^{2k} a_x^{n+1-2k} b_x^{n+1-2k}$$

über, was die entsprechende Form ψ für die nächsthöhere Ordnung ist. Aber ähnliches gilt auch für die Functionaldeterminanten, wenn man nur dieselben in zweckmässiger Weise mit einem numerischen Factor versehen definirt. Ist nämlich die Function χ_k, welche die Functionaldeterminante von ψ_k gegen f vertritt, durch den symbolischen Ausdruck definirt:

$$\chi_k = (ab)^{2k} (ac)\, a_x^{n-2k-1} b_x^{n-2k} c_x^{n-1},$$

so geht sie durch Multiplication mit $a_x b_x c_x$ in

$$(ab)^{2k} (ac)\, a_x^{n-2k} b_x^{n+1-2k} c_x^{n}$$

über, was die nämliche Bildung für das nächsthöhere n ist.

Bis zur 7ten Ordnung inclusive sind die Bildungen der φ durch die folgenden Formeln vollständig gegeben, und damit auch die typische Darstellung (1) für alle diese Fälle:

$$\varphi_2 = \tfrac{1}{2}\psi_1$$
$$\varphi_3 = \chi_1$$
$$\varphi_4 = \tfrac{1}{2}\psi_2 f^2 - \tfrac{3}{4}\psi_1^2$$
$$\varphi_5 = \chi_2 f^2 - \psi_1 \chi_1$$
$$\varphi_6 = \tfrac{1}{2}\psi_3 f^4 - \tfrac{15}{4}\psi_2 \psi_1 f^2 + \tfrac{15}{8}\psi_1^3 + 10\chi_1^2$$
$$\varphi_7 = \chi_3 f^4 + (\tfrac{21}{6}\psi_2 \chi_1 - \tfrac{9}{2}\psi_1 \chi_2) f^2 + \tfrac{3}{4}\psi_1^2 \chi_1 .$$

Die Functionen φ kann man mit Hülfe von recurrenten Entwicklungen bestimmen, welche hier anzugeben zu weitläufig sein würde. Das folgende Theorem aber ist für die Gestalt dieser Ausdrücke characteristisch:

Die Functionen φ haben die Form

$$\varphi_{2h} = \tfrac{1}{2}\psi_h \cdot f^{2h-2} + M_h$$
$$\varphi_{2h+1} = \chi_h \cdot f^{2h-2} + N_h ;$$

dabei sind die M_h, N_h Ausdrücke, deren Nenner Potenzen von f sind; der Zähler von M_h ist eine ganze rationale Function der Formen

$$f,\ \psi_1,\ \psi_2 \cdots \psi_{h-1},\ \chi_1,\ \chi_2 \cdots \chi_{h-2},$$

der Zähler von φ_{2h+1} eine ganze rationale Function von

$$f,\ \psi_1,\ \psi_2 \cdots \psi_{h-1},\ \chi_1,\ \chi_2 \cdots, \chi_{h-1} .$$

Göttingen, 5. August 1870.

Note on the theory of Invariants.

By A. Cayley in Cambridge.

If two binary quantics $(a \ldots)(x, y)^n$, $(a', \ldots)(x', y')^n$ are linearly transformable the one into the other, and if for the first of them P, Q are any two invariants whatever of the same degree, and P', Q' are the like invariants for the second of them, then we have

$$P : Q = P' : Q'$$

(or what is the same thing the absolute invariants have the same values for the two functions respectively); and the entire system of these equations constitutes only a $(n-3)$ fold relation between the two sets of coefficients. But the converse theorem, viz. that if the entire system of equations is satisfied, the two functions are linearly transformable the one into the other is only true *sub modo*.

For instance considering the two binary sextics

$(0, 0, 0, d, e, f, g)(x, y)^6$ and $(0, 0, 0, d', e', f', g')(x', y')^6$,

or what is the same thing

$(20\,d, 5\,e, 2\,f, g)(x, y)^3 y^3$ and $(20\,d', 5\,e', 2\,f', g')(x', y')^3 y'^3$,

the invariants of the two functions respectively are each and all of them $= 0$, and yet the two functions are not in general linearly transformable the one into the other.

For they can only be transformable by the substitution

$$x = \lambda x' + \mu y', \quad y = \varrho y';$$

or what is the same thing, if the cubic functions are transformable by the substitution $x = x' + a y'$, $y = y'$; and forming for these the seminvariants $(a\,c - b^2$ and $a^2 d - 3\,a\,b\,c + 2\,b^3$ for the cubic $(a, b, c, d)(x, y)^3)$, we have as the necessary condition for the transformability

$$(8\,d\,f - 5\,e^2)^3 : (8\,d^2 g - 12\,d\,e\,f + 5\,e^3)^2$$
$$= (8\,d'\,f' - 5\,e'^2)^3 : (8\,d'^2 g' - 12\,d'\,e'\,f' + 5\,e'^3)^2.$$

To deduce this result from the theory of the sextic function, I observe that denoting by A, B, C, Δ, the values of the quadrin-

variant, the sextinvariant and the discriminant, as given in Salmon's Higher Algebra. Ed. 2. pp. 202—211, then in the particular case $a = 0$, $b = 0$ we have

$A =$	$B =$	$C =$	$\Delta =$
$-10\,d^2$	d^4	$-8\,d^6$	0
$+15\,c\,e$	$-3\,c\,d^2\,e$	$+36\,c\,d^4\,e$	
	$+\ c^2\,e^2$	$-39\,c^2\,d^2\,e^2$	
		$-\ 8\,c^3\,e^3$	

and hence forming the new invariants

$$\mathsf{B} = 100\,B - A^2$$
$$\Gamma = 1000\,C - 1200\,A\,B + 4\,A^3$$

the values of these in the same particular case $a = b = 0$, are

$\mathsf{B} =$	$\Gamma =$
$25\,c^2\,(8\,d\,f - 5\,e^2)$	$-2500\,c^3\,(8\,d^2\,g - 12\,d\,e\,f + 5\,e^3)$
$-100\,c^3\,g$	$+3000\,c^4\,(10\,e\,g - 9\,f^2)$.

Taking now A, B, C, Δ as the invariants of the sextic, one of the conditions for the transformation is $B^3 : C^2 = B'^3 : C'^2$.

In the particular case $a = b = c = 0$ and $a' = b' = c' = 0$, the invariants vanish and the equation is satisfied identically, but if we assume in the first instance only $a = b = 0$, $a' = b' = 0$, then the terms contain the common factors c^6 and c'^6 respectively; and throwing these out, and then writing $c = 0$, $c' = 0$, we obtain the condition previously found in a different manner.

It will be observed that the condition is of the original form $P : Q = P' : Q'$, but with the difference that P, Q and the corresponding functions P', Q', are not invariants. As possessing the foregoing property these functions may however be called "imperfect invariants", it being understood that an imperfect invariant is not an invariant, and is not in any case included in the term 'invariant' used without qualification.

And we may now establish the general theory as follows: Consider the similarly constituted special forms $(a, \ldots)(x, y, z, \ldots)^n$ and $(a', \ldots)(x', y', z', \ldots)^n$: to fix the ideas the coefficients $(a, \ldots)$ may be regarded as homogeneous functions of the elements $(\alpha, \beta, \ldots)$ which are either independent, or homogeneously connected together in any manner; and then the coefficients $(a', \ldots)$ will be the like functions of the elements $(\alpha', \beta', \ldots)$ which are either independent or (as the case may be) homogeneously connected in the like manner.

The entire series of functions $P, Q, \ldots$ of $(\alpha, \beta, \ldots)$, which are such that P, Q being of the same degree, and P', Q' being the like

functions of (α', β'), we have for the linearly transformable functions $(a, \ldots)(x, y, z, \ldots)^n$ and $(a', \ldots)(x', y', z', \ldots)^n$ the relation

$$P : Q = P' : Q'$$

may be called the "perfect and imperfect invariants" of $(a, \ldots)(x, y, z, \ldots)^n$; and the relation in question be briefly referred to by the expression that the perfect and imperfect invariants are proportional.

We have then the theorem that if the two functions $(a, \ldots)(x, y, z, \ldots)^n$ and $(a', \ldots)(x', y', z', \ldots)^n$ are linearly transformable the one into the other, the two functions have their perfect and imperfect invariants proportional; and *conversely* the theorem, that two functions which have their perfect and imperfect invariants proportional, are linearly transformable the one into the other.

There is thus a wide field of inquiry in regard to the imperfect invariants, even of a binary function, but still more so as to those of a ternary or quaternary function representing a curve or surface possessed of singularities.

We have in what precedes the explanation of an error into which I fell in my paper "On the transformation of plane curves" Proc. Lond. Math. Soc. Vol. I. No. 3. Oct. 1865, see Arts. nos. 27—30. Considering a given curve of deficiency D and, by means of a system of $D - 3$ points chosen at pleasure on the curve, transforming this into a curve of the ordre $D + 1$ with deficiency D; then for any two of the transformed curves (that is two curves obtained by means of different systems of the $D - 3$ points) I showed that these had the same absolute invariants — or in the language of the present paper, that they had their invariants proportional, and I thence inferred that the two transformed curves were linearly transformable the one into the other — whereas, to sustain this conclusion it is necessary that the two curves should have their perfect and imperfect invariants proportional; and this was in no wise proved. That the two transformed curves are not in fact linearly transformable the one into the other has since been shown *a posteriori* by Dr. Brill in the particular case $D = 4$. Riemanns conclusions, with which my own were at variance, are thus correct.

I remark that if a binary function of an odd or even degree $n = 2p + 1$ or $= 2p$, has $p + 1$ equal factors, then that the invariants all of them varish; but the equality of the $p + 1$ factors implies only a p-fold relation between the coefficients; that is the invariants all vanishing gives only a p-fold relation between the coefficients, viz. the relation is $\frac{1}{2}(n - 1)$ fold or $\frac{1}{2}n$ fold according as n is odd or even. Thus for a sextic function the equations

$A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $\Delta = 0$ constitute only a 3-fold relation between the coefficients.

Similarly of the function has p equal factors, then every invariant is a mere numerical multiple of a power of one and the same function Θ; so that the vanishing invariants can be at once formed. And we have thus only a $(p - 1)$ fold relation between the coefficients, viz. the relation is $\frac{1}{2}(n - 3)$ fold or $\frac{1}{2}(n - 2)$ fold according as n is odd or even.

Cambridge 4. Aug. 1870.

Bemerkung zur Auflösung der cubischen Gleichungen.

Von S. Gundelfinger in Tübingen.

Es ist bekannt, dass die Darstellung der Wurzeln von algebraisch lösbaren Gleichungen durch Covarianten meistens entweder mehr oder höhere Irrationalitäten mit sich führt, als man nach den gewöhnlichen Methoden erhält. Für die biquadratischen Gleichungen hat Aronhold im Bande 52. des Journals f. Math. von Crelle-Borchardt S. 95 eine Auflösung mitgetheilt, welche, ohne mehr Irrationalitäten als die gewöhnliche zu besitzen, diese als speciellen Fall in sich enthält, und welche überdiess sich leicht in eine Form bringen lässt, bei der alle Elemente durch Covarianten ausgedrückt sind*).

Im Folgenden sollen entsprechende Entwicklungen für die cubischen Gleichungen gegeben werden.

---

*) In etwas verallgemeinerter Fassung lautet dieselbe so. Wenn u eine beliebige binäre Form vierten Grades der Veränderlichen x_1 und x_2, Δ die Hesse'sche Determinante derselben dividirt durch 144, i und j deren beide Invarianten bedeuten; wenn ferner

$$\varphi(\varkappa, \lambda) = -4\varkappa^3 + i\varkappa\lambda^2 - j\lambda^3$$

gesetzt wird und ε_1, ε_2, ε_3 die drei Wurzeln der cubischen Gleichung $\varphi(\varepsilon, 1) = 0$ sind, so bestimmt sich eine Wurzel $\frac{x_1}{x_2}$ der Gleichung $\varkappa u - \lambda\Delta = 0$ für beliebige Werthe von y_1 und y_2 aus:

$$\left(\varkappa\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^3} - \lambda\frac{\partial^3\Delta}{\partial x_1^3}\right)y_1^3 + 3\left(\varkappa\frac{\partial^3 u}{\partial x_1^2\partial x_2} - \lambda\frac{\partial^3\Delta}{\partial x_1^2\partial x_2}\right)y_1^2 y_2$$
$$+ 3\left(\varkappa\frac{\partial^3 u}{\partial x_1\partial x_2^2} - \lambda\frac{\partial^3\Delta}{\partial x_1\partial x_2^2}\right)y_1 y_2^2 + \left(\varkappa\frac{\partial^3 u}{\partial x_2^3} - \lambda\frac{\partial^3\Delta}{\partial x_2^3}\right)y_2^3$$
$$= 12(x_1 y_2 - x_2 y_1)\sqrt{\varphi(\varkappa\lambda)}\left\{\pm\sqrt{\frac{\varepsilon_1 u' - \Delta'}{\varepsilon_1\lambda - \varkappa}} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_2 u' - \Delta'}{\varepsilon_2\lambda - \varkappa}} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon_3 u' - \Delta'}{\varepsilon_3\lambda - \varkappa}}\right\}.$$

Darin bedeuten u' und Δ' die aus u und Δ vermöge Ersetzung der x_i durch die y_i hervorgehenden Ausdrücke, und sind die Vorzeichen der Quadratwurzeln so zu nehmen, dass

$$\sqrt{\varphi(\varkappa, \lambda)}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon_1 u' - \Delta'}{\varepsilon_1\lambda - \varkappa}}\sqrt{\frac{\varepsilon_2 u' - \Delta'}{\varepsilon_2\lambda - \varkappa}}\sqrt{\frac{\varepsilon_3 u' - \Delta'}{\varepsilon_3\lambda - \varkappa}} = \frac{1}{8}\left(\frac{\partial u'}{\partial y_1}\frac{\partial\Delta'}{\partial y_2} - \frac{\partial u'}{\partial y_2}\frac{\partial\Delta'}{\partial y_1}\right).$$

Wenn

$$u = (a, b, c, \partial)(x_1, x_2)^3 = (a_1, x_1 + a_2 x_2)^3 = a_x{}^3$$

eine beliebige binäre cubische Form darstellt, so wird es unsere Aufgabe sein, den Werth zu bestimmen, den die zweite Polare von u eines beliebigen Poles y, d. h.

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1{}^2} y_1{}^2 + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} y_1 y_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2{}^2} y_2{}^2\right)$$
$$= u_{11} y_1{}^2 + 2u_{12} y_1 y_2 + u_{22} y_1{}^{2*}) = a_x a_y{}^2$$

für eine Wurzel $\frac{x_1}{x_2}$ der Gleichung $u = 0$ annimmt.

Die Lösung dieses Problemes folgt direct aus der bekannten Cayley'schen Zerlegung von u in seine drei Factoren.

Definiren wir τ, Q und R durch die Gleichungen

$$\tau = u_{11} u_{22} - u_{12}{}^2$$
$$Q = u_1 \tau_2 - u_2 \tau_1 = (\alpha, \beta, \gamma, \delta)(x_1, x_2)^3$$
$$R = \tau_{11} \tau_{22} - \tau_{12}{}^2,$$

so besteht bekanntlich die Relation:

$$(1) \qquad \tau^3 = -(Q^2 + Ru^2) = -(Q + \sqrt{-R}\, u)(Q - \sqrt{-R}\, u).$$

Da auf der linken Seite der letzten Formel ein vollständiger Cubus steht und Q und u im allgemeinen keinen Factor gemein haben, so muss eine jede der Klammergrössen auf der rechten Seite für sich ein vollständiger Cubus sein, so dass man setzen kann:

$$Q + \sqrt{-R}\, u = (p_1 x_1 + p_2 x_2)^3 = p_x{}^3,$$
$$Q - \sqrt{-R}\, u = (q_1 x_1 + q_2 x_2)^3 = q_x{}^3.$$

Subtrahirt man diese beiden Gleichungen, so ergiebt sich die oben erwähnte Zerlegung

$$(2) \qquad u = \frac{1}{2\sqrt{-R}}(p_x{}^3 - q_x{}^3) = \frac{1}{2\sqrt{-R}} \prod_{i=0}^{i=2} (p_x - \varepsilon^i q_x),$$

worin ε eine beliebige der beiden imaginären Cubikwurzeln der positiven Einheit ist.

Durch Differentiation der identischen Beziehung

$$a_y{}^3 = \frac{1}{2\sqrt{-R}}(p_y{}^3 - q_y{}^3)$$

nach y_1 und y_2 erhält man jetzt zunächst

$$a_y{}^2 a_x = \frac{1}{2\sqrt{-R}}(p_y{}^2 p_x - q_y{}^2 q_x),$$

*) Allgemein werden wir, für eine beliebige binäre Form $f(x_1, x_2)$ m^{ten} Grades, setzen: $\frac{\partial f}{\partial x_i} = m f_i$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = m \cdot (m-1) f_{ik}$ etc.

welche Formel für alle Werthe der y_i und x_i gilt. Dieselbe geht unter der Voraussetzung dass $\frac{x_1}{x_2}$ eine Wurzel von $u = 0$, dass also nach (2) $p_x = \varepsilon^i q_x$ ist, in die folgende über:

$$a_y^2 a_x = \frac{1}{2\sqrt{-R}} \left\{ p_y^2 q_x \varepsilon^i - q_y^2 p_x \varepsilon^{-i} \right\} .$$

Transformirt man jedes Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung durch die bekannte Identität

$$c_x \partial_y = (c\partial)(xy) + c_y \partial_x ,$$

und erinnert sich, dass für eine Wurzel $\frac{x_1}{x_2}$ von $u = 0$ nach (2)

$$p_x \varepsilon^i - q_x \varepsilon^{-i} = \varepsilon^i \left\{ p_x - \varepsilon^{-2i} q_x \right\} = 0 ,$$

so bekommt man:

$$(3)\quad a_y^2 a_x = \frac{1}{2\sqrt{-R}} (qp)(xy)(p_y \varepsilon^i + q_y \varepsilon^{-i}) = (xy)(p_y \varepsilon^i + q_y \varepsilon^{-i}) ,$$

da wegen (1)

$$(qp) = \frac{\partial q}{\partial x_1}\frac{\partial p}{\partial x_2} - \frac{\partial q}{\partial x_2}\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{2\sqrt{-R}}{9\tau^2}\left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{\partial Q}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) = 2\sqrt{-R} .$$

Gehen wir nunmehr von den symbolischen Ausdrücken zu ihren wirklichen Werthen über und bezeichnen wir mit Q' und u' die aus Q und u hervorgehenden Ausdrücke, wenn in denselben x_1 und x_2 durch y_1 und y_2 ersetzt werden, so lässt sich die Relation (3) schreiben:

$$(3^a)\quad \begin{aligned} &(ax_1 + bx_2) y_1^2 + 2(bx_1 + cx_2) y_1 y_2 + (cx_1 + \partial x_2) y_2^2 \\ &= (x_1 y_2 - x_2 y_1) \left\{ \varepsilon^i \sqrt[3]{Q' + \sqrt{-R}u'} + \varepsilon^{-i} \sqrt[3]{Q' - \sqrt{-R}u'} \right\} . \end{aligned}$$

Aus dieser ergeben sich die drei Wurzeln $\frac{x_1}{x_2}$ von $u = 0$, wenn man der Reihe nach $i = 0, 1, 2$ setzt, und in beiden Termen auf der rechten Seite die absoluten Cubikwurzeln nimmt, wie sofort aus der Beziehung folgt, welche nach (1) zwischen p_y und q_y besteht:

$$p_y q_y = -\tau' .$$

Uebrigens liesse sich die Gleichung (3^a) ohne Zuhilfenahme der Resultate Cayley's auch unmittelbar aus (1) und der leicht erweisbaren, für alle Werthe der x_i und y_i bestehenden Identität ableiten:

$$(4)\quad \begin{aligned} 2Q'(xy)^3 &= 3\tau'(u_{11}y_1^2 + 2u_{12}y_1y_2 + u_{22}y_2^2)(xy)^2 \\ &+ (u_{11}y_1^2 + 2u_{12}y_1y_2 + u_{22}y_2^2)^3 - u \cdot u'^3 . \end{aligned}$$

Macht man in (3^a) $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, so erhält man für die Wurzeln der cubischen Gleichung:

$$(5)\quad \frac{x_1}{x_2} = -\frac{1}{a}\left\{ b + \varepsilon^i \sqrt[3]{\alpha + \sqrt{-R}\,a} + \varepsilon^{-i} \sqrt[3]{\alpha - \sqrt{-R}\,a} \right\} ,$$

ein Resultat, das schon Eisenstein im Bde. 27 des Crelle'schen Journals p. 81 gegeben hat.

Man bekommt eine Wurzel der Gleichung $xu + \lambda Q = 0$, wenn man in (3^a) die binäre Form dritten Grades u durch $xu + \lambda Q$, also R durch $R(x^2 + R\lambda^2)^2$ und Q' durch $(xQ' - \lambda Ru')(x^2 + R\lambda^2)$ ersetzt. Nach einigen leichten Reductionen ergiebt sich so zur Bestimmung einer Wurzel $\frac{x_1}{x_2}$ von $xu + \lambda Q = 0$ die Gleichung

$$(6) \qquad \frac{(xu_{11} + \lambda Q_{11})\, y_1^2 + 2(xu_{12} + \lambda Q_{12})\, y_1 y_2 + (xu_{22} + \lambda Q_{22})\, y_2^2}{x_1 y_2 - x_2 y_1}$$

$$= \left\{\varepsilon^i \sqrt[3]{Q' + u'\sqrt{-R}}\sqrt[3]{x + \lambda\sqrt{-R}} + \varepsilon^{-i}\sqrt[3]{Q' - u'\sqrt{-R}}\sqrt[3]{x - \lambda\sqrt{-R}}\right\}\sqrt{x^2 + R\lambda^2}.$$

Um hieraus alle drei Wurzeln abzuleiten, hat man wieder der Reihe nach $i = 0, 1, 2$ zu setzen und sämmtlichen Cubikwurzeln die absoluten Werthe zu geben.

Stuttgart, Pfingsten 1870.

Differentiation des Ausdrucks x^k, wenn x eine Function irgend einer unabhängig Veränderlichen bedeutet.

Von R. Götting in Torgau.

I.

Wenn man $\frac{1}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{d^n x}{d y^n}$ oder $\frac{1}{\Pi n} \cdot \frac{d^n x}{d y^n}$ zur Abkürzung mit $d^n x$ bezeichnet, was im folgenden *durchweg* geschehen soll, so ist bekanntlich

(1) $$d^n (x_1 . x_2 \ldots\ldots x_k) = \Sigma d^{\alpha_1} x_1 . d^{\alpha_2} x_2 \ldots\ldots d^{\alpha_k} x_k ,$$

worin für die α alle diejenigen Systeme der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n$ zu nehmen sind, welche der Bedingung

(2) $$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots\cdots + \alpha_k = n$$

genügen. Hieraus folgt, dass die Entwickelung von $d^n (x^k)$, wo k eine positive ganze Zahl bedeutet, Glieder von der Form

(3) $$(d^0 x)^{\lambda} . (d^1 x)^{\lambda_1} . (d^2 x)^{\lambda_2} \ldots\ldots$$

liefern wird und zwar dergestalt, dass man für die λ alle diejenigen Systeme von positiven ganzen Zahlen (Null mit eingeschlossen) nehmen muss, welche der doppelten Bedingung

(4) $$\lambda + \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots\cdots = k \text{ und } 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + \cdots\cdots = n$$

genügen. Die erste Bedingung ergiebt sich daraus, dass die Anzahl der Factoren in (3) genau gleich k sein muss, die zweite folgt unmittelbar aus der Gleichung (2).

Jedes Glied (3) wird nun in der Entwickelung von $d^n (x^k)$ genau so viel Mal auftreten, als der Polynomialcoefficient

$$\frac{\Pi k}{\Pi \lambda . \Pi \lambda_1 . \Pi \lambda_2 \ldots .}$$

angiebt. Man findet also

$$d^n (x^k) = \Sigma \frac{\Pi k}{\Pi \lambda . \Pi \lambda_1 . \Pi \lambda_2 \ldots} (d^0 x)^{\lambda} . (d^1 x)^{\lambda_1} . (d^2 x)^{\lambda_2} \ldots\ldots ,$$

wo die Summation auf alle den Bedingungen (4) unterworfenen Zahlen-

systeme auszudehnen ist und $d^0 x$ die Grösse x selbst bedeutet. Dividirt man mit x^k, so wird

$$(5)\quad \frac{d^n(x^k)}{x^k} = \Sigma \frac{\Pi k}{\Pi\lambda \,.\, \Pi\lambda_1 \,.\, \Pi\lambda_2 \ldots} \left(\frac{d^0 x}{x}\right)^{\lambda} \cdot \left(\frac{d^1 x}{x}\right)^{\lambda_1} \cdot \left(\frac{d^2 x}{x}\right)^{\lambda_2} \ldots\ldots$$

Es soll nun bewiesen werden, dass wenn man unter n_k den Binomialcoefficienten $\frac{\Pi n}{\Pi k \,.\, \Pi(n-k)}$ versteht, folgende Gleichung identisch erfüllt wird

$$(6)\quad n_0 \,.\, \frac{d^n(x^n)}{x^n} - n_1 \,.\, \frac{d^n(x^{n-1})}{x^{n-1}} + \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1} \,.\, n_{n-1} \frac{d^n x}{x} = \left(\frac{d^1 x}{x}\right)^n .$$

In der Entwickelung $\frac{d^n(x^n)}{x^n}$ tritt das Glied $\left(\frac{d^1 x}{x}\right)^n$ genau ein Mal auf, wie man sofort sieht, wenn man in (4)

$$k = n, \qquad \lambda_1 = n, \qquad \lambda = \lambda_2 = \ldots\ldots = 0$$

setzt. Dies Glied ist der rechten Seite von (6) identisch; es muss also bewiesen werden, dass die übrigen Glieder der linken Seite dieser Gleichung identisch die Summe Null liefern. Zu diesem Ende denken wir uns zunächst alle Glieder der mittelst (5) ausgeführten Entwickelung von $\frac{d^n(x^n)}{x^n}$, mit Ausnahme des schon behandelten $\left(\frac{d^1 x}{x}\right)^n$, aufgeschrieben. Setzt man in (4) $k = n$ und zieht die zweite dieser Bedingungsgleichungen von der ersten ab, so erhält man

$$\lambda - 1\lambda_2 - 2\lambda_2 - \ldots\ldots = 0 .$$

Hieraus folgt, dass λ nur dann Null sein kann, wenn auch $\lambda_2, \lambda_3, \ldots$. Null sind; dies ist aber der schon behandelte Fall $\lambda_1 = n$, der das Glied $\left(\frac{d^1 x}{x}\right)^n$ lieferte. Alle übrigen Glieder enthalten demnach wenigstens ein Mal den Factor $\frac{d^0 x}{x}$, so dass λ jede der Zahlen $1, 2, 3, \ldots . n-1$ (nicht n) bedeuten kann. Fixiren wir nun für ein bestimmtes λ irgend eins der Systeme, welche den Gleichungen (4) für $k = n$ genügen und geben diesen der leichtern Uebersicht wegen die Gestalt

$$(7)\quad \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots = n - \lambda \text{ und } 1\lambda_1 + 2\lambda_2 + \ldots\ldots = n ,$$

so wird ein Glied der linken Seite von (6) folgende Gestalt besitzen

$$n_0 \cdot \frac{\Pi k}{\Pi\lambda \,.\, \Pi\lambda_1 \,.\, \Pi\lambda_2 \ldots} \cdot \left(\frac{d^0 x}{x}\right)^{\lambda} \cdot \left(\frac{d^1 x}{x}\right)^{\lambda_1} \cdot \left(\frac{d^2 x}{x}\right)^{\lambda_2} \ldots .$$

Denken wir uns jetzt die Ausdrücke $\frac{d^n(x^{n-1})}{x^{n-1}}$, $\frac{d^n(x^{n-2})}{x^{n-2}}$ u. s. w. entwickelt, entnehmen hieraus die Glieder, in denen resp. die Factoren

$$\left(\frac{d^0 x}{x}\right)^{\lambda-1}, \quad \left(\frac{d^0 x}{x}\right)^{\lambda-2}, \quad \ldots\ldots \left(\frac{d^0 x}{x}\right)^0$$

auftreten und multipliciren dieselben mit $-n_1$, $+n_2$, u. s. w., so entstehen Glieder von der Gestalt

$$-n_1 \cdot \frac{\Pi(n-1)}{\Pi(\lambda-1)\cdot\Pi\lambda_1\cdot\Pi\lambda_2\ldots\ldots}\cdot\left(\frac{d^0x}{x}\right)^{\lambda-1}\cdot\left(\frac{d^1x}{x}\right)^{\lambda_1}\cdot\left(\frac{d^2x}{x}\right)^{\lambda_2}\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\pm n_\lambda \cdot \frac{\Pi(n-\lambda)}{\Pi 0\cdot\Pi\lambda_1\cdot\Pi\lambda_2\ldots}\cdot\left(\frac{d^0x}{x}\right)^{0}\cdot\left(\frac{d^1x}{x}\right)^{\lambda_1}\cdot\left(\frac{d^2x}{x}\right)^{\lambda_2}\ldots\ldots$$

Das dem letzten Gliede zu ertheilende Vorzeichen ist weiter nicht fixirt, da es in keinem Falle zweifelhaft sein kann. Für die in allen diesen Ausdrücken auftretenden Grössen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ erhält man dieselben Werthsysteme, wie man leicht erkennt, wenn man in (4) der Reihe nach k durch $n-1, n-2, \ldots\ldots, \lambda$ durch $\lambda-1, \lambda-2, \ldots\ldots$ ersetzt, wodurch unmittelbar die Bedingungsgleichungen (7) entstehen. Es ist klar, dass auf die eben angegebene Weise *alle* diejenigen Glieder von (6) dargestellt werden, welche mit dem grade gewählten Systeme von Exponenten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ behaftet sind. Die Coefficienten bringt man leicht auf die Form

$$\frac{\Pi n}{\Pi 0\cdot\Pi\lambda\cdot\Pi\lambda_1\ldots}, \quad \frac{\Pi n}{\Pi 1\cdot\Pi(\lambda-1)\cdot\Pi\lambda_1\ldots}, \quad \ldots \quad \frac{\Pi n}{\Pi\lambda\cdot\Pi 0\cdot\Pi\lambda_1\ldots},$$

und da $\frac{d^0x}{x} = 1$ ist, so erhält man, wenn man

$$\Pi n = n\cdot(n-1)\ldots\ldots(\lambda+1)\cdot\Pi\lambda$$

setzt, aus den oben aufgestellten Gliedern die Summe

$$\frac{n(n-1)\ldots\ldots(\lambda+1)}{\Pi\lambda_1\cdot\Pi\lambda_2\ldots}\left(\frac{d^1x}{x}\right)^{\lambda_1}\cdot\left(\frac{d^2x}{x}\right)^{\lambda_2}\ldots\ldots\left\{\frac{\Pi\lambda}{\Pi 0\cdot\Pi\lambda}-\frac{\Pi\lambda}{\Pi 1\cdot\Pi(\lambda-1)}+\ldots\ldots\pm\frac{\Pi\lambda}{\Pi\lambda\cdot\Pi 0}\right\}.$$

Die Klammer ist nun bekanntlich nichts anderes als $(1-1)^\lambda$, also identisch gleich Null; und da für jedes andere System der λ genau dieselbe Betrachtung gültig sein muss, *so wird die Gleichung* (6) *identisch erfüllt.*

Man kann derselben noch eine andere Gestalt geben, in der sie später benutzt werden soll. Setzt man nämlich $n-1$ statt n, so erhält man

$$(n-1)_0\cdot\frac{d^{n-1}(x^{n-1})}{x^{n-1}}-(n-1)_1\cdot\frac{d^{n-1}(x^{n-2})}{x^{n-2}}+\ldots\ldots+(-1)^{n-2}(n-1)_{n-2}\cdot\frac{d^{n-1}x}{x}=\left(\frac{d^1x}{x}\right)^{n-1}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$n_0\cdot\frac{d^n(x^n)}{x^n}-n_1\cdot\frac{d^n(x^{n-1})}{x^{n-1}}+\ldots\ldots+(-1)^{n-1}\cdot n_{n-1}\cdot\frac{d^nx}{x}$$
$$=\frac{d^1x}{x}\left\{(n-1)_0\cdot\frac{d^{n-1}(x^{n-1})}{x^{n-1}}-(n-1)_1\cdot\frac{d^{n-1}(x^{n-2})}{x^{n-2}}+\ldots\ldots+(-1)^{n-2}(n-1)_{n-2}\cdot\frac{d^{n-1}x}{x}\right\},$$

oder wenn man mit $(-1)^{n-1}$ multiplicirt, $n_{n-\lambda}$ überall durch n_λ ersetzt und die Glieder in umgekehrter Reihenfolge schreibt

$$(8)\quad n_1 \cdot \frac{d^n x}{x} - n_2 \cdot \frac{d^n (x^2)}{x^2} + \cdots\cdots + (-1)^{n-1} \cdot n_n \frac{d^n (x^n)}{x^n}$$

$$= -\frac{d^1 x}{x}\left\{(n-1)_1 \cdot \frac{d^{n-1} x}{x} - (n-1)_2 \frac{d^{n-1}(x^2)}{x^2} + \cdots\cdots + (-1)^{n-2}(n-1)_{n-1} \cdot \frac{d^{n-1}(x^{n-1})}{x^{n-1}}\right\}.$$

II.

Mit Hülfe dieses Satzes soll nun bewiesen werden, *dass für jedes positive oder negative, ganze oder gebrochene $\varkappa$ die Gleichung gilt:*

$$(9)\quad \frac{d^n (x^\varkappa)}{x^\varkappa} = \varkappa_1 \cdot (n-\varkappa)_{n-1} \cdot \frac{d^n x}{x} + \varkappa_2 \cdot (n-\varkappa)_{n-2} \cdot \frac{d^n (x^2)}{x^2} + \cdots\cdots + \varkappa_n \cdot (n-\varkappa)_0 \cdot \frac{d^n (x^n)}{x^n},$$

worin $\varkappa_\lambda$ den Ausdruck $\frac{\varkappa\,(\varkappa-1)\,.\,(\varkappa-2)\,.\,\ldots\,.\,(\varkappa-\lambda+1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,.\,\lambda}$ *bedeutet.*

Nimmt man an, dass die Richtigkeit der Gleichung

$$\frac{d^{n-1}(x^\varkappa)}{x^\varkappa} = \varkappa_1 \cdot (n-\varkappa-1)_{n-2} \cdot \frac{d^{n-1} x}{x} + \varkappa_2 \cdot (n-\varkappa-1)_{n-3} \cdot \frac{d^{n-1}(x^2)}{x^2} + \cdots\cdots + \varkappa_{n-1} \cdot (n-\varkappa-1)_0 \cdot \frac{d^{n-1}(x^{n-1})}{x^{n-1}}$$

oder nach Multiplication mit $x^\varkappa$

$$d^{n-1}(x^\varkappa) = \varkappa_1 \cdot (n-\varkappa-1)_{n-2} \cdot d^{n-1} x \cdot x^{\varkappa-1} + \varkappa_2 \cdot (n-\varkappa-1)_{n-3} \cdot d^{n-1}(x^2) \cdot x^{\varkappa-2} + \cdots + \varkappa_{n-1} \cdot (n-\varkappa-1)_0 \cdot d^{n-1}(x^{n-1}) \cdot x^{\varkappa-n+1}$$

schon bewiesen sei, differenzirt letztere unter Beachtung der gleich anfangs für $d^n x$ festgestellten Bedeutung, in Folge deren

$$d^n (x^\varkappa) = \frac{1}{n} d \cdot (d^{n-1}[x^\varkappa]) \text{ und } \frac{1}{n} d^1 (x^{\varkappa-\lambda}) = \frac{\varkappa-\lambda}{n} x^{\varkappa-\lambda-1} d^1 x$$

sein muss und dividirt gleichzeitig alle Glieder mit n, so folgt

$$d^n (x^\varkappa) = \varkappa_1 \cdot (n-\varkappa-1)_{n-2} \cdot d^n x \cdot x^{\varkappa-1} + \varkappa_2 \cdot (n-\varkappa-1)_{n-3}\, d^n (x^2) \cdot x^{\varkappa-2} \cdots\cdots + \varkappa_{n-1} \cdot (n-\varkappa-1)_0 \cdot d^n (x^{n-1}) \cdot x^{\varkappa-n+1}$$

$$+ d^1 x \left\{\varkappa_1 (n-\varkappa-1)_{n-2} d^{n-1} x \cdot \frac{\varkappa-1}{n} x^{\varkappa-2} + \varkappa_2 (n-\varkappa-1)_{n-3} d^{n-1}(x^2) \cdot \frac{\varkappa-2}{n} x^{\varkappa-3} \cdots\cdots + \varkappa_{n-1} (n-\varkappa-1)_0 \cdot d^{n-1}(x^{n-1}) \cdot \frac{\varkappa-n+1}{n} x^{\varkappa-n}\right\}.$$

Durch Division mit x^x erhält man leicht

$$\frac{d^n(x^x)}{x^x} = \varkappa_1(n-\varkappa-1)_{n-2}\frac{d^n x}{x} + \varkappa_2(n-\varkappa-1)_{n-3}\frac{d^n(x^2)}{x^2} + \cdots\cdots + \varkappa_{n-1}(n-\varkappa-1)_0 \cdot \frac{d^n(x^{n-1})}{x^{n-1}}$$

$$+ \frac{d^1 x}{x}\Big\{ \varkappa_1 (n-\varkappa-1)_{n-2}\frac{d^{n-1}x}{x}\cdot\frac{\varkappa-1}{n} + \varkappa_2 (n-\varkappa-1)_{n-3}\frac{d^{n-1}(x^2)}{x^2}\cdot\frac{\varkappa-2}{n}$$

$$+ \cdots\cdots + \varkappa_{n-1}(n-\varkappa-1)_0 \cdot \frac{d^{n-1}(x^{n-1})}{x^{n-1}}\cdot\frac{\varkappa-n+1}{n}\Big\}.$$

Beachtet man nun, dass stets $(n-\varkappa)_\lambda = (n-\varkappa-1)_\lambda + (n-\varkappa-1)_{\lambda-1}$, also

$$(n-\varkappa-1)_{\lambda-1} = (n-\varkappa)_\lambda - (n-\varkappa-1)_\lambda ,$$
$$(n-\varkappa)_0 = (n-\varkappa-1)_0$$

ist, so kann man dem *ersten* Theile der rechten Seite folgende Gestalt geben

$$\text{I)}\quad \varkappa_1 (n-\varkappa)_{n-1}\cdot\frac{d^n x}{x} + \varkappa_2 (n-\varkappa)_{n-2}\frac{d^n(x^2)}{x^2} + \cdots\cdots + \varkappa_{n-1}(n-\varkappa)_1\cdot\frac{d^n(x^{n-1})}{x^{n-1}}$$

$$+ \varkappa_n (n-\varkappa)_0 \frac{d^n(x^n)}{x^n}$$

$$- \varkappa_1 (n-\varkappa-1)_{n-1}\cdot\frac{d^n x}{x} - \varkappa_2(n-\varkappa-1)_{n-2}\frac{d^n(x^2)}{x^2} - \cdots\cdots - \varkappa_{n-1}(n-\varkappa-1)_1\cdot\frac{d^n(x^{n-1})}{x^{n-1}}$$

$$- \varkappa_n (n-\varkappa-1)_0 \cdot \frac{d^n(x^n)}{x^n}$$

Die Coefficienten dieser letzten Reihe haben die Form

$$\varkappa_{\lambda+1}(n-\varkappa-1)_{n-\lambda-1} ,$$

wo λ der Reihe nach $= 0, 1, 2, \ldots\ldots n-1$ zu setzen ist. Ein jeder derselben ist aber gleich

$$\frac{\varkappa\,.\,(\varkappa-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(\varkappa-\lambda)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,(\lambda+1)}\cdot\frac{(n-\varkappa-1)\,(n-\varkappa-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(\lambda-\varkappa+1)}{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,(n-\lambda-1)} .$$

Giebt man dem Zähler des ersten Bruches die Gestalt

$$(-1)^{\lambda+1}\,.\,(\lambda-\varkappa)\,(\lambda-\varkappa-1)\,.\,.\,.\,.\,.\,(-\varkappa+1)\,(-\varkappa) ,$$

so erhält man statt des eben geschriebenen Ausdrucks

$$(-1)^{\lambda+1}\frac{(n-\varkappa-1)\,(n-\varkappa-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(-\varkappa+1)\,.\,(-\varkappa)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,(\lambda+1)\,.\,1\,.\,2\,.\,3\,.\,.\,.\,.\,(n-\lambda-1)}$$

$$= (-1)^{\lambda+1}\,.\,\frac{(n-\varkappa-1)\,(n-\varkappa-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(-\varkappa+1)\,(-\varkappa)}{\Pi n}\cdot\frac{\Pi n}{\Pi(\lambda+1)\,.\,\Pi(n-\lambda-1)}$$

$$= (-1)^{\lambda+1}\,.\,\frac{(n-\varkappa-1)\,(n-\varkappa-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(-\varkappa+1)\,(-\varkappa)}{\Pi n}\cdot n_{\lambda+1}$$

Es entsteht demnach, wenn man $\lambda = 0, 1, 2, \ldots . n-1$ setzt und den gemeinschaftlichen Factor $\frac{(n-\varkappa-1)\,(n-\varkappa-2)\,.\,.\,.\,.\,.\,(-\varkappa+1)\,(-\varkappa)}{\Pi n}$ ausscheidet, der Ausdruck

$$\frac{(n-\varkappa-1)(n-\varkappa-2)\ldots(-\varkappa+1)(-\varkappa)}{\Pi n}\cdot\left\{n_1\cdot\frac{d^n x}{x}-n_2\cdot\frac{d^n(x^2)}{x^2}\right.$$

(11)

$$\left.+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}n_n\cdot\frac{d^n(x^n)}{x^n}\right\},$$

wo überall $-(-1)^{\lambda+1}=(-1)^{\lambda}$ gesetzt ist.

Der *zweite* Theil der rechten Seite besitzt die Coefficienten

$$\frac{\varkappa-\lambda}{n}\cdot\varkappa_\lambda\cdot(n-\varkappa-1)_{n-\lambda-1}=\frac{\varkappa(\varkappa-1)\ldots(\varkappa-\lambda+1)}{1.2\ldots\lambda}\cdot\frac{\varkappa-\lambda}{n}\cdot\frac{(n-\varkappa-1)(n-\varkappa-2)\ldots(\lambda-\varkappa+1)}{1.2\ldots(n-\lambda-1)},$$

wo $\lambda=1, 2, 3, \ldots n-1$ gesetzt werden muss. Ganz ähnlich wie vorhin verwandelt man diese in

$$(-1)^{\lambda+1}\cdot\frac{(n-\varkappa-1)(n-\varkappa-2)\ldots(-\varkappa+1)(-\varkappa)}{\Pi n}\cdot(n-1)_\lambda.$$

Man erhält demnach, indem man $(-1)^{\lambda+1}$ überall $=(-1)^{\lambda-1}$ setzt, den Ausdruck

$$+\frac{d^1x}{x}\cdot\frac{(n-\varkappa-1)(n-\varkappa-2)\ldots(-\varkappa+1)(-\varkappa)}{\Pi n}\cdot\left\{(n-1)_1\frac{d^{n-1}x}{x}-(n-1)_2\cdot\frac{d^{n-1}(x^2)}{x^2}\right.$$

(12)

$$\left.+\cdots+(-1)^{n-2}(n-1)_{n-1}\frac{d^{n-1}(x^{n-1})}{x^{n-1}}\right\}.$$

In Folge von (8) heben sich aber (11) und (12) auf und es reducirt sich die rechte Seite auf (10). Da nun in der That für jedes $\varkappa$

$$\frac{d^1(x^\varkappa)}{x^\varkappa}=\varkappa_1\cdot(n-\varkappa)_0\cdot\frac{d^1x}{x}$$

ist, so gilt die Gleichung (9) auch für $n=2, 3, \ldots$, d. h. für jedes positive ganze n.

III.

Die einzelnen Glieder der rechten Seite von (9) entwickelt man jetzt folgendermaassen. Bedeutet ν jede der Zahlen $0, 1, 2, \ldots n-1$, so hat man zur Bestimmung der Werthsysteme der λ, welche in $\frac{d^n(x^{n-\nu})}{x^{n-\nu}}$ auftreten, die Bedingungsgleichungen (4), in denen $n-\nu$ statt k zu setzen ist, zu erfüllen, es muss also

$$\lambda_1+\lambda_2+\cdots\cdots=n-\nu-\lambda \text{ und } 1\lambda_1+2\lambda_2+\cdots\cdots=n$$

sein. Nimmt man zunächst $\nu=0$ und $\lambda=0$, so ist schon bewiesen, dass dann $\lambda_1=n$, alle übrigen $\lambda_2=\lambda_3=\cdots\cdots=0$ sein müssen. Man erkennt ferner leicht, dass für jeden bestimmten Werth von $(\nu+\lambda)$ identische Werthsysteme für $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ entstehen werden; und da dies der Fall sein wird, wenn man ν die Werthe $0, 1, 2, \ldots \lambda$ und λ die Werthe $\lambda, \lambda-1, \ldots\ldots 0$ ertheilt, $\left(\frac{d^0x}{x}\right)^\lambda$ aber stets $=1$

ist, so erhält man eine Reihe von Partialsummen, die für jedes bestimmte Werthsystem der $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ aus denjenigen Gliedern der Entwickelungen von

$$x_n(n-x)_0 \cdot \frac{d^n(x^n)}{x^n}, \quad x_{n-1}(n-x)_1 \cdot \frac{d^n(x^{n-1})}{x^{n-1}}, \ldots, \quad x_{n-\lambda}(n-x)_\lambda \cdot \frac{d^n(x^{n-\lambda})}{x^{n-\lambda}}$$

zusammen zu setzen sind, in denen eben diese $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ auftreten. Alle diese Partialsummen haben demnach die Gestalt

$$\frac{1}{\Pi\lambda_1 \cdot \Pi\lambda_2 \ldots} \left(\frac{d^1 x}{x}\right)^{\lambda_1} \cdot \left(\frac{d^2 x}{x}\right)^{\lambda_2} \cdot \ldots \cdot \left\{ x_n (n-x)_0 \cdot \frac{\Pi n}{\Pi \lambda} + x_{n-1} (n-x)_1 \frac{\Pi(n-1)}{\Pi(\lambda-1)} + \ldots + x_{n-\lambda} (n-x)_\lambda \frac{\Pi(n-\lambda)}{\Pi 0} \right\}$$

wo die in der Klammer stehende Reihe stets von selbst abbricht und auch für $\lambda = 0$ gültig ist. Zur Summation derselben benutzt man die bekannte Gleichung

$$(n-x)_\nu = (n-x-1)_\nu + (n-x-2)_{\nu-1} + \cdots + (n-x-\nu)_1 + (n-x-\nu-1)_0;$$

die man mit

$$x_{n-\nu} \cdot \frac{\Pi(n-\nu)}{\Pi(\lambda-\nu)} = \frac{x(x-1)\ldots(x-n+\nu+1)}{1.2\ldots(n-\nu)} \cdot \frac{1.2\ldots(n-\nu)}{\Pi(\lambda-\nu)} = \frac{x(x-1)\ldots(x-n+\nu+1)}{\Pi(\lambda-\nu)}$$
$$= (-1)^{n-\nu} \cdot \frac{(n-x-\nu-1)(n-x-\nu-2)\ldots(-x+1)(-x)}{\Pi(\lambda-\nu)}$$

zu multipliciren hat. Nimmt man für $(n-x-1)_\nu$, $(n-x-2)_{\nu-1}, \ldots$ ihre bekannten Werthe und setzt für ν der Reihe nach $0, 1, 2, \ldots \lambda$, so erhält man

$$\begin{aligned}
&(-1)^n \cdot \frac{(n-x-1)\ldots(-x+1)(-x)}{\Pi\lambda} \\
&+ (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-x-2)\ldots(-x+1)(-x)}{\Pi(\lambda-1)} \cdot \frac{n-x-1}{\Pi 1} \\
&+ (-1)^{n-2} \cdot \frac{(n-x-3)\ldots(-x)}{\Pi(\lambda-2)} \cdot \frac{(n-x-1)(n-x-2)}{\Pi 2} + \ldots \\
&+ (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-x-2)\ldots(-x)}{\Pi(\lambda-1)} \\
&\quad + (-1)^{n-2} \cdot \frac{(n-x-3)\ldots(-x)}{\Pi(\lambda-2)} \cdot \frac{n-x-2}{\Pi 1} + \ldots \\
&+ (-1)^{n-2} \cdot \frac{(n-x-3)\ldots(-x)}{\Pi(\lambda-2)} + \ldots \\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Es entstehen auf diese Weise eine Anzahl Horizontalreihen, deren letzte nur ein Glied enthält, welches gleich

$$(13) \quad x_{n-\lambda} \cdot \frac{\Pi(n-\lambda)}{\Pi 0} \cdot (n-x-\nu-1)_0 = (-1)^{n-\lambda} \frac{(n-x-\lambda-1)(n-x-\lambda-2)\ldots(-x+1)(-x)}{\Pi 0}$$
$$= x(x-1)\ldots(x+\lambda+1-n)$$

sein muss. Da ferner die erste Horizontalreihe gleich

$$(-1)^n \cdot (n-\varkappa-1).....(-\varkappa+1)(-\varkappa)\cdot\left\{\frac{1}{\Pi\lambda}-\frac{1}{\Pi(\lambda-1).\Pi 1}+\frac{1}{\Pi(\lambda-2).\Pi 2}-\cdots\cdots\pm\frac{1}{\Pi 0.\Pi\lambda}\right\}$$

also identisch gleich Null ist und dasselbe auch für die übrigen mit alleiniger Ausnahme der letzten (13) bewiesen werden kann, *so erhält man schliesslich die Formel:*

$$(14)\quad \frac{d^n(x^\varkappa)}{x^\varkappa} = \Sigma \frac{\varkappa(\varkappa-1).....(\varkappa+\lambda+1-n)}{\Pi\lambda_1.\Pi\lambda_2.....}\cdot\left(\frac{d^1x}{x}\right)^{\lambda_1}\cdot\left(\frac{d^2x}{x}\right)^{\lambda_2},$$

wo die Summation so ausgeführt werden muss, dass für jeden möglichen Werth von λ, *nämlich* $0, 1, 2, ... n-1$, *die möglichen Werthsysteme für* $\lambda_1, \lambda_2, ...$ *aufzustellen und einzusetzen sind.*

IV.

Beispielsweise möge das gewonnene Resultat auf den Fall angewandt werden, dass x eine Function zweiten Grades $= y^2 + ay + b$ ist. Da dann

$$d^1x = 2y + a,\ d^2x = \frac{1}{1.2}\frac{d^2(y^2+ay+b)}{dy^2} = 1,\ d^3x = d^4x = \cdots = 0$$

ist, so müssen $\lambda_3 = \lambda_4 = \cdots = 0$ sein und man hat für λ_1 und λ_2 die Gleichungen

$$\lambda_1 + \lambda_2 = n - \lambda \quad \text{und} \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 = n$$

aufzulösen, worin λ der Reihe nach $= 0, 1, 2, ... n-1$ zu setzen ist. Es folgt

$\lambda_1 = n - 2\lambda$, $\lambda_2 = \lambda$ (wobei zu berücksichtigen ist, dass λ_1 und λ_2 nicht negativ werden können),

$$\frac{d^n((y^2+ay+b)^\varkappa)}{(y^2+ay+b)^\varkappa} = \Sigma \frac{\varkappa(\varkappa-1).....(\varkappa+\lambda+1-n)}{\Pi(n-2\lambda).\Pi\lambda}\cdot\left(\frac{2y+a}{y^2+ay+b}\right)^{n-2\lambda}\cdot\left(\frac{1}{y^2+ay+b}\right)^{\lambda}.$$

Setzt man $n \pm m$ statt n, wo $n \geq m$ und beides positive ganze Zahlen sind, ferner n statt $\varkappa$ und $a = 0$, so findet man

$$(\alpha)\quad d^{n+m}[(y^2+b)^n] = \Sigma \frac{n(n-1).....(\lambda+1-m)}{\Pi(n+m-2\lambda).\Pi\lambda}(2y)^{n+m-2\lambda}(y^2+b)^{\lambda-m}$$

$$(\beta)\quad d^{n-m}[(y^2+b)^n] = \Sigma \frac{n(n-1).....(\lambda+1+m)}{\Pi(n-m-2\lambda).\Pi\lambda}(2y)^{n-m-2\lambda}(y^2+b)^{\lambda+m}.$$

In der Gleichung (α) kann wegen des Zählers der rechten Seite λ nicht kleiner als m, wegen des Nenners nicht grösser als $\left[\frac{n+m}{2}\right]$

sein (wo die Einklammerung andeuten soll, dass man die grösste in diesem Ausdrucke enthaltene ganze Zahl $\frac{n+m}{2}$ oder $\frac{n+m-1}{2}$ zu nehmen hat). Es durchläuft also λ die Werthe

$$m,\ m+1,\ \ldots\ldots \left[\frac{n+m}{2}\right].$$

Multiplicirt man nun auf beiden Seiten mit $(y^2+b)^m$ und multiplicirt man gleichzeitig jedes Glied der rechten Seite im Zähler und Nenner mit $\Pi(\lambda - m)$, so erhält man

$$(15)\quad (y^2+b)^m \cdot d^{n+m}\left[(y^2+b)^n\right] = \Sigma \frac{\Pi n}{\Pi(n+m-2\lambda).\Pi\lambda.\Pi(\lambda-m)} \cdot (2y)^{n+m-2\lambda} \cdot (y^2+b)^\lambda,$$

worin man zu setzen hat

$$\begin{aligned} n+m-2\lambda &= n-m,\ n-m-2,\ n-m-4,\ \ldots\ldots 1 \text{ oder } 0,\\ \lambda &= m,\quad m+1,\quad m+2,\quad \ldots\ldots \left[\frac{n+m}{2}\right],\\ \lambda-m &= 0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots\ldots \left[\frac{n-m}{2}\right]. \end{aligned}$$

In der Gleichung (β) kann λ nicht grösser als $\left[\frac{n-m}{2}\right]$ werden, ist also gleich

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ldots \left[\frac{n-m}{2}\right].$$

Somit ergiebt sich aus (β), wenn man jedes Glied der rechten Seite im Zähler und Nenner mit $\Pi(\lambda+m)$ multiplicirt, die Formel:

$$(16)\quad d^{n-m}(y^2+b)^m = \Sigma \frac{\Pi n}{\Pi(n-m-2\lambda).\Pi\lambda.\Pi(\lambda+m)} \cdot (2y)^{n-m-2\lambda} \cdot (y^2+b)^{\lambda+m},$$

worin

$$\begin{aligned} n-m-2\lambda &= n-m,\ n-m-2,\ n-m-4,\ \ldots\ldots 1 \text{ oder } 0,\\ \lambda &= 0,\quad 1,\quad 2,\quad \ldots\ldots \left[\frac{n-m}{2}\right]\\ \lambda+m &= m,\quad m+1,\quad m+2,\quad \ldots\ldots \left[\frac{n+m}{2}\right] \end{aligned}$$

zu setzen ist. Hieraus ersieht man leicht die Identität sämmtlicher Glieder der rechten Seiten von (15) und (16), so dass

$$(y^2+b)^m \cdot d^{n+m}(y^2+b)^n = d^{n-m}(y^2+b)^n,$$

(cf. Crelle's Journal. Bd. II. S. 225).

Es leuchtet übrigens ein, dass das Resultat ganz ähnlich ausfallen würde, wenn a nicht Null wäre.

Zweitens sei $x = 1 - 2zy + y^2$, ebenfalls vom zweiten Grade; es soll $x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2zy + y^2}}$ in eine nach den Potenzen von y fortschreitende Reihe entwickelt werden. Da die Coefficienten derselben $f(0)$, $\frac{f'(0)}{\Pi 1}$, $\frac{f''(0)}{\Pi 2}$, ... sind, wenn

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zy + y^2}} = f(y)$$

gesetzt wird, $\frac{f^{(n)}(0)}{\Pi n}$ aber nichts anderes als $d^n\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)$ ist, wenn in letzterem Ausdrucke nach der Differentiation $y = 0$ genommen wird, so erhält man

$$\frac{f^{(n)}(0)}{\Pi n} = x^{-\frac{1}{2}} \Sigma \frac{\varkappa \cdot (\varkappa - 1) \ldots\ldots (\varkappa + \lambda + 1 - n)}{\Pi (n - 2\lambda) \cdot \Pi \lambda} \left(\frac{d^1 x}{x}\right)^{n-2\lambda} \cdot \left(\frac{d^2 x}{x}\right)^{\lambda},$$

worin vorläufig noch $\varkappa$ statt $-\frac{1}{2}$ geschrieben ist. Es ist nun

$d^1 x = -2z + 2y$, $d^2 x = +1$ und wenn man $y = 0$ setzt,

$x = 1$, $\frac{d^1 x}{x} = -2z$, $\frac{d^2 x}{x} = 1$, man findet also

$$\frac{f^{(n)}(0)}{\Pi n} = \Sigma \frac{\varkappa (\varkappa - 1) \ldots\ldots (\varkappa + \lambda + 1 - n)}{\Pi (n - 2\lambda) \cdot \Pi \lambda} (-2z)^{n-2\lambda}.$$

Die Anzahl der Factoren im Zähler der rechten Seite ist $n - \lambda$; multiplicirt man jeden mit -2 und dividirt dafür mit $(-2)^{n-\lambda}$, so erhält man, da $\varkappa = -\frac{1}{2}$ ist,

$$\frac{f^{(n)}(0)}{\Pi n} = \Sigma \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n - 2\lambda - 1)}{\Pi (n - 2\lambda) \cdot \Pi \lambda} \cdot \frac{z^{n-2\lambda}}{(-2)^{\lambda}}$$

$$= \Sigma (-1)^{\lambda} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2n - 2\lambda - 1)}{\Pi (n - 2\lambda) \cdot \Pi \lambda \cdot 2^{\lambda}} \cdot z^{n-2\lambda},$$

den bekannten Ausdruck für die Kugelfunctionen $P^n(z)$ erster Art, wenn man λ die Werthe $0, 1, 2, \ldots\ldots \left[\frac{n}{2}\right]$ annehmen lässt.

Auf ähnliche Weise können noch mehr in der Theorie der Kugelfunctionen auftretende Differentialformeln, z. B.

$$\frac{\sin m\vartheta}{m} = \frac{(-1)^{m-1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots\ldots (2m - 1)} \cdot \frac{d^{m-1}\left((1 - y^2)^{\frac{2m-1}{2}}\right)}{dy^{m-1}}, \text{ für } y = \cos\vartheta$$

abgeleitet werden.

(Man vergleiche Crelle, Journ. etc. Bd. XV, Jacobi: Formula transformationis integralium definitorum, pag. 4.)

Torgau, im Juni 1870.

Ueber die Gauss'sche hypergeometrische Reihe.

Von Schläfli in Bern.

Vor manchem Jahre, als mir von den hierauf bezüglichen Schriften nur Gauss' Abhandlung circa seriem infinitam bekannt war, gelang mir der Versuch, die der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ entsprechende Function des vierten Elements x mittelst ihres Integralausdruckes aus der Beschränkung, die ihr die ursprüngliche Definition durch die Summenreihe auflegt, vollständig zu befreien. Schon im Begriff das Ergebniss zur Veröffentlichung auszuarbeiten, bekam ich Kunde von Riemann's Abhandlung über den Gegenstand und ward dadurch für lange Zeit von meinem Vorhaben abgeschreckt. Nachdem ich nun aber sowohl die genannte als auch die reichhaltigen Abhandlungen von Kummer und Jacobi (Crelle's J. Bd. 15 und 56) kennen gelernt habe, so glaube ich doch noch vorliegenden kurzen Aufsatz ans Licht geben zu dürfen. Ich kann mich hiefür auf Riemann berufen. Er sagt nämlich im Eingang zur erwähnten Abhandlung, es gebe zwei Wege, die Beschaffenheit der Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ zu erforschen; der eine gehe von der Differentialgleichung, der andere vom Integralausdrucke aus; diesen zweiten Weg habe noch Niemand betreten. Er wolle nun aber keinen dieser zwei Wege gebrauchen, sondern die Transscendente nach einer neuen Methode behandeln. Diese Methode besteht dann darin, dass Riemann die Function durch die Art ihrer Verzweigung definirt und erst gegen das Ende der Untersuchung zeigt, dass eine Function da ist, die die gestellten Bedingungen erfüllt, und dass dieselbe mit der hypergeometrischen Reihe zusammenfällt. Wenn es aber darauf ankommt, von der Summenreihe aus mit der geringsten Mühe zur Kenntniss nicht nur der Verzweigungsart im Allgemeinen, sondern der wirklichen Fortsetzung um einen Verzweigungspunkt herum, mit Angabe der Coefficienten in der Relation, zu gelangen, so halte ich den Gebrauch des Integralausdruckes hiezu für den geeignetsten.

1. Wenn ich im Folgenden nach allgemeiner Uebung die Punkte einer Ebene (des Zahlenfeldes), bezogen auf zwei senkrechte Achsen (Realitätsgerade und Hauptmeridian), als Zahlzeichen gebrauche, so werde ich, um Weitläufigkeiten des Ausdrucks und Zeichnungen zu ersparen, die Punkte, welche die Zahlen 1 und i versinnlichen, mir resp. östlich und nördlich vom Nullpunkt liegend vorstellen, die Zahl ∞ Horizont nennen und, wenn es darauf ankommt, die Zugänge zu ∞ zu unterscheiden, mit N eine positive sehr grosse Zahl, die bestimmt ist unendlich zu werden, bezeichnen und N den Ostpunkt, iN den Nordpunkt, u. s. f. nennen. Wenn $\log x = \log r + i\varphi$, wo $\log r$ und φ reell sind, so nenne ich r den absoluten Werth und φ die Phase der Zahl x. (Ich erlaube mir diesen Namen für φ aus der Optik zu entlehnen, wo er wenigstens einen verwandten Sinn hat, während das übliche Wort Amplitudo die Vorstellung einer geradlinigen Abmessung erweckt und ohnehin schon eine elliptische Function bedeutet.) Wächst die Phase der Zahl $x - a$, während a constant bleibt, so nenne ich die Bewegung der Variabeln x um a *rechtläufig*, die entgegengesetzte *rückläufig*.

2. Wenn im Integralausdruck

$$S = \int (x - A)^{a-1} (x - B)^{b-1} \dots (x - F)^{f-1} dx$$

die n Constanten $A, B, \dots F$ sämmtlich verschieden sind, und wenn die Verzweigungsexponenten $a, b, \dots f$ der Relation

$$a + b + \dots + f = n - 2 > 0$$

genügen, so lässt eine beliebige gebrochene lineare Transformation dem Ausdrucke S seine Form, und nicht alle Exponenten können westlich vom Hauptmeridian liegen, sondern mindestens einer, z. B. a, muss seine reelle Componente positiv haben. Dann ist aber der Verzweigungspunkt (oder Pol) A dem Integrale S zugänglich, d. h., irgendwo anfangend hat S hier einen endlichen Werth. Es steht frei, die Strahlen $AB, AC, \dots AF$ in rechtläufiger Ordnung aufeinander folgend anzunehmen. Legt man nun von A aus um jeden der $n - 1$ übrigen Pole eine rechtläufige Schlinge, deren Hinweg und Rückweg man sich grösstentheils im Verbindungsstrahl liegend denken darf, so kann man aus allen $n - 1$ Schlingen zusammen einen einzigen ununterbrochenen Integrationsweg bilden, der alle Pole $A, B, \dots F$ umschliesst, folglich auch bis an den Horizont ausgedehnt werden darf. Da nun der Horizont für das Integral S ein gewöhnlicher Punkt ist, so ist die lineare homogene Function der $n - 1$ Schlingenintegrale, die jenem einzigen in sich zurückkehrenden Integrationswege entspricht, gleich 0. Höchstens $n - 2$ der genannten Integrale sind also von einander unabhängig; und durch diese kann man jedes andere noch mögliche bestimmte Integral linear und homogen ausdrücken.

Liegt z. B. der Pol C zwischen dem Strahle AB und der von A aus um B gelegten Schlinge, so kann man diese krumm geführte Schlinge, ohne Aenderung des Integrals, in einen Weg verwandeln, der aus dreien der ursprünglichen von A aus gelegten Schlingen besteht, nämlich aus einer rückläufigen um C, dann aus einer rechtläufigen um B, und endlich aus einer rechtläufigen um C. — Oder ist ausser A auch noch der Pol B zugänglich, so ist ein offener Integrationsweg AB möglich; vom zugehörigen Integrale unterscheidet sich dann das Schlingenintegral (von A aus um B) nur durch einen Multiplicator wie $1 - e^{2i\pi b}$; und eine von B aus um C gelegte Schlinge gilt einem Wege gleich, der von B nach A, von da als rechtläufige Schlinge um C, und endlich von A nach B geht. Kurz, durch $n - 2$ der zuerst erwähnten Integrale kann man jedes mögliche bestimmte Integral linear und homogen ausdrücken, dessen Weg entweder zwei Pole verbindet, oder von einem Pole aus als Schlinge um einen oder mehrere andere Pole gelegt ist.

Durch die Substitution $x = \frac{C(B-A)y - A(B-C)}{(B-A)y - (B-C)}$ gehen die drei Pole $x = A, B, C$ resp. in $y = 0, 1, \infty$ über; die $n - 3$ übrigen neuen Pole $y = \frac{B-C}{B-A} \cdot \frac{D-A}{D-C} = D_1$, etc. können dann als die variablen Argumente der $n - 2$ Functionen, die durch die $n - 2$ bestimmten Integrale S definirt sind, gelten, wenn diese wirklich durch keine linearen homogenen Relationen mit constanten Coefficienten verbunden sind. Da der dritte Pol jetzt Horizont des y Feldes geworden ist, so hat sich die Integralform S scheinbar ein wenig geändert. Sie ist nun, wenn man von einem als Product von Potenzen darstellbaren Multiplicator absieht:

$$\int y^{a-1}(y-1)^{b-1}(y-D_1)^{d-1} \ldots (y-F_1)^{f-1}\, dy .$$

Für $n = 3$ liefert die Form S nur ein unabhängiges bestimmtes Integral, das Euler'sche Integral erster Art; für $n = 4$ liefert sie zwei bestimmte Integrale, die als Functionen des vierten Poles der Darstellung durch hypergeometrische Reihen fähig sind.

3. Die vier Pole seien $0, 1, \infty, \frac{1}{x}$ reell und grösser als 1. Die zugehörigen Verzweigungsexponenten seien α, $\gamma - \alpha$, $\beta - \gamma + 1$, $1 - \beta$, sämmtlich mit positiven reellen Componenten, damit alle vier Pole zugänglich werden. Man hat dann

$$2 > \beta + 1 > \gamma > \alpha > 0,$$

wenn man für den Augenblick dem Zeichen $>$ die Bedeutung „östlicher als" giebt. Die zur Betrachtung vorliegende Integration ist dann

$$S = \int u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-xu)^{-\beta}\, du .$$

Um die vier bestimmten Integrale von 0 bis 1, von 1 bis $\frac{1}{x}$, von $\frac{1}{x}$ bis ∞, und von 0 bis ∞ völlig zu definiren, wollen wir die Integrationsvariable u der Realitätsgeraden entlang von 0 aus so führen, dass sie den Polen 1 und $\frac{1}{x}$ nördlich ausweicht, damit jeder Integrationsweg als einer verstanden werden könne, der ganz in der nördlichen Hälfte des Zahlenfeldes liegt. Die Phasen von u, $1-u$, $1-xu$ seien im Intervalle $0 < u < 1$ als Null angenommen. Dann haben $1-u$, $1-xu$ resp. von 1 bis N, von $\frac{1}{x}$ bis N die Phase $-\pi$. Der Integrationsweg von 0 bis ∞ kann dann, wenn er auch anfänglich in der Nordhälfte von 0 nach N lief, um den Nullpunkt vorwärts gedreht werden, so dass er zuletzt von 0 nach $-N$ geht; dann hat u die Phase π, während $1-u$, $1-xu$ nulle Phase haben. Setzt man nun in den Intervallen $1 < u < \frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} < u < N$, $0 > u > -N$ resp. $u = \frac{1}{x} - \frac{1-x}{x}t$, $\frac{1}{xt}$, $-\frac{t}{1-t}$, so bekommt man

$$\overset{1}{\underset{0}{S}} = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-xu)^{-\beta}\,du\,,$$

$$\overset{\frac{1}{x}}{\underset{1}{S}} = -e^{i\pi(\alpha-\gamma)}x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \times \int_0^1 t^{-\beta}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-(1-x)t)^{\alpha-1}\,dt\,,$$

$$\overset{\infty}{\underset{\frac{1}{x}}{S}} = -e^{i\pi(\alpha+\beta-\gamma)}x^{1-\gamma}\int_0^1 t^{\beta-\gamma}(1-t)^{-\beta}(t-xt)^{\gamma-\alpha-1}\,dt\,,$$

$$\overset{\infty}{\underset{0}{S}} = e^{i\alpha\pi}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-\gamma}(1-(1-x)t)^{-\beta}\,dt\,,$$

wenn die Phasen der hier vorkommenden Potenzbasen x, $1-x$, t, $1-t$, $1-xt$, $1-(1-x)t$ null verstanden werden. Da das reelle x zwischen 0 und 1 liegt, so kann man die vier Integralausdrücke nach steigenden Potenzen theils von x, theils von $1-x$ entwickeln und dadurch in hypergeometrische Reihen verwandeln. Der Kürze wegen sei $\varepsilon = \gamma - \alpha - \beta$. Man hat

$$\overset{1}{\underset{0}{S}} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\gamma)}F(\alpha,\beta,\gamma,x)\,,$$

$$\overset{\frac{1}{x}}{\underset{1}{S}} = -e^{i\pi(\alpha-\gamma)}\frac{\Gamma(1-\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}{\Gamma(\varepsilon+1)}x^{1-\gamma}(1-x)^{\varepsilon} \times F(1-\alpha,1-\beta,\varepsilon+1,1-x)\,,$$

$$\overset{\infty}{S}_{\frac{1}{x}} = -e^{-i\pi\alpha}\frac{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(2-\gamma)}x^{1-\gamma} \times F(\beta-\gamma+1,\ \alpha-\gamma+1,\ 2-\gamma,\ x),$$

$$\overset{\infty}{S}_{0} = e^{i\alpha\pi}\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(1-\varepsilon)}F(\alpha,\ \beta,\ 1-\varepsilon,\ 1-x).$$

Ich bedarf noch des Integrales von 1 bis ∞, das bei der gegenwärtigen Lage von x nicht unmittelbar in eine hypergeometrische Reihe verwandelt werden kann. Wenn im Ostpunkt die Phase der Potenzbasis $xu-1$ null angenommen, und $u=\frac{1}{t}$ gesetzt wird, so kommt

$$\overset{\infty}{S}_{1} = -e^{-i\pi\alpha}x^{-\beta}\int_0^1 t^{\beta-\gamma}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}\left(1-\frac{t}{x}\right)^{-\beta}dt,$$

wenn t, $1-t$, $1-\frac{t}{x}$ im Intervalle $0<t<x$ nulle Phase haben, und wenn dann t südlich an x vorbei geht um in den Stand 1 zu kommen, so dass $1-\frac{t}{x}$ im Intervalle $x<t<1$ die Phase π erlangt. Dieser Integrationsweg wird nicht gefährdet, wenn man x um 1 herum rückläufig aus seinem Stande zwischen 0 und 1 in einen reellen Werth, der 1 übertrifft, hinüber dreht. Ist dieses geschehen, so kann man die hypergeometrische Reihe anwenden und hat

$$\overset{\infty}{S}_{1} = -e^{-i\pi\alpha}\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}{\Gamma(\beta-\alpha+1)}F\left(\beta-\gamma+1,\ \beta,\ \beta-\alpha+1,\ \frac{1}{x}\right).$$

Bringt man nun x auf demselben Wege, den es gegangen war, wieder in seinen alten Stand zwischen 0 und 1, so läuft das Argument der mit F bezeichneten Function aus seinem hypergeometrischen Stande zwischen 0 und 1 südlich an 1 vorbei (durch rechtläufige Drehung) in den östlichen Stand $\frac{1}{x}$; und der auf diesem Wege aus dem hypergeometrischen Stamme sich fortsetzende Zweig soll auf der rechten Seite der letzten Gleichung mit dem Functionszeichen F' bezeichnet sein, damit alle fünf bestimmten Integrale zum selben zwischen 0 und 1 liegenden Werthe von x gehören. Unter ihnen wollen wir das von 0 bis 1 und das von $\frac{1}{x}$ bis ∞ als die zwei unabhängigen Integrale betrachten, und je eines der drei übrigen mit ihnen durch lineare und homogene Relationen verbinden.

4. Legt man vom Ostpunkt aus eine rückläufige Schlinge um $\frac{1}{x}$, so kann man sie öffnen und ihre Enden in den Westpunkt bringen. Sie ist dann zu einer rechtläufigen Schlinge geworden. Daher ist

$$(1-e^{-2i\pi\beta})\overset{\infty}{S}_{\frac{1}{x}} = (1-e^{-2i\pi\gamma})\overset{\infty}{S}_{0} + (-1+e^{2i\pi(\alpha-\gamma)})\overset{1}{S}_{0}.$$

Legt man von $\frac{1}{x}$ aus eine rechtläufige Schlinge um 0 und 1, so kann diese auch als Schlinge gefasst werden, die von $\frac{1}{x}$ aus um ∞ gelegt ist. Daher die Relation:

$$(1 - e^{2i\pi(\gamma-\beta)}) \overset{\infty}{\underset{\frac{1}{x}}{S}} = (-1 + e^{2i\pi\alpha}) \overset{1}{\underset{0}{S}} + (-1 + e^{2i\pi\gamma}) \overset{\frac{1}{x}}{\underset{1}{S}}.$$

Nimmt man als dritte Relation

$$\overset{\infty}{\underset{1}{S}} = \overset{\frac{1}{x}}{\underset{1}{S}} + \overset{\infty}{\underset{\frac{1}{x}}{S}}$$

hinzu, gebraucht

$$F(x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x),$$
$$G(x) = x^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma, x)$$

als Stellvertreter der zwei unabhängigen Integrale, ersetzt die drei übrigen Integrale durch Functionsausdrücke und vereinfacht, so ergeben sich folgende drei Relationen zwischen Functionswerthen:

(1)
$$F(\alpha, \beta, 1 - \varepsilon, 1 - x) = \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\Gamma(\beta-\gamma+1)} F(x) + \frac{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} G(x),$$

(2)
$$(1 - x)^{\varepsilon} F(1 - \alpha, 1 - \beta, \varepsilon + 1, 1 - x) = \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\varepsilon+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)} x^{\gamma-1} F(x) + \frac{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\varepsilon+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} x^{\gamma-1} G(x),$$

(3)
$$F\left(\beta, \beta - \gamma + 1, \beta - \alpha + 1, \frac{1}{x}\right) \quad \left(0 \overset{1}{\frown} \rightarrow \frac{1}{x}\right)$$
$$= e^{-i\pi\beta} \frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta-\gamma+1)} x^{\beta} F(x) - e^{i\pi(\gamma-\beta)} \frac{\Gamma(\gamma-1)\Gamma(\beta-\alpha+1)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} x^{\beta} G(x).$$

5. So lange als x absolut kleiner als 1 ist, hat die mit $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bezeichnete Summenreihe in Bezug auf die Elemente α, β, γ keine andern Unstetigkeiten als solche von der Form $\frac{A}{\gamma + n}$, wenn γ in die Nähe einer nullen oder negativen ganzen Zahl $-n$ kommt. Es ist daher gleichgültig, auf welcher Seite γ an einem solchen Unendlichkeitspunkt $-n$ vorbei geführt wird; die Summenreihe bleibt in Bezug auf α, β, γ eindeutig. Aehnliches gilt von den Coefficienten, die in den Relationen (1), (2), (3) auftreten. Da es immer möglich ist eine Gruppe von Werthen von α, β, γ mit Vermeidung von Unendlichkeitspunkten in eine andere Gruppe überzuführen, so gelten die Relationen (1), (2), (3) auch noch, wenn die Ungleichheiten

$$2 > \beta + 1 > \gamma > \alpha > 0$$

nicht erfüllt sind.

6. In der Relation (1) lasse man α, β, γ resp. in α, β, $1-\varepsilon$ übergehen, in (2) α, β, γ resp. in $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$, $\varepsilon+1$ (ich erinnere daran, dass $\varepsilon = \gamma-\alpha-\beta$) und setze

$$1-\gamma = \varrho^2,$$

$$g = \frac{1}{\varrho}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}, \qquad h = \frac{1}{\varrho}\frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)},$$

$$j = \varrho\,\frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(\varepsilon)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)}, \qquad k = \varrho\,\frac{\Gamma(1-\gamma)\,\Gamma(1-\varepsilon)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)},$$

$F_1(x) = F(\alpha, \beta, 1-\varepsilon, x)$, $G_1(x) = x^\varepsilon F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \varepsilon+1, x)$, so hat man

$$\left.\begin{aligned} F(1-x) &= \varrho g\, F_1(x) - \frac{\varrho}{\varepsilon}\, h\, G_1(x), \\ G(1-x) &= \varrho j\, F_1(x) - \frac{\varrho}{\varepsilon}\, k\, G_1(x). \end{aligned}\right\} \quad (A)$$

Da $gk = \dfrac{\sin\pi(\gamma-\alpha)\,.\,\sin\pi(\gamma-\beta)}{\sin\pi\gamma\,.\,\sin\pi\varepsilon}$, $\quad hj = \dfrac{\sin\pi\alpha\,.\,\sin\pi\beta}{\sin\pi\gamma\,.\,\sin\pi\varepsilon}$, so folgt $gk - hj = 1$. Das Substitutionsmaass der Verwandlung (A) ist also $-\dfrac{\varrho^2}{\varepsilon} = \dfrac{1-\gamma}{\alpha+\beta-\gamma}$.

In der Relation (3) lasse man das eine Mal α, β, γ resp. in $\beta-\gamma+1$, β, $\beta-\alpha+1$ übergehen; das andere Mal multiplicire man (3) mit $x^{\alpha-\beta}$ und lasse dann α, β, γ resp. in α, $\alpha-\gamma+1$, $\alpha-\beta+1$ übergehen. Setzt man dann

$$a = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}, \qquad b = \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)},$$

$$c = \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}, \qquad d = \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)},$$

$$\underset{\infty}{F}(x) = x^\alpha F(\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1, x),$$

$$\underset{\infty}{G}(x) = x^\beta F(\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1, x),$$

so hat man die Verwandlung

$$\left(0 \overset{1}{\frown} \infty \quad \frac{1}{x}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} F\left(\frac{1}{x}\right) &= e^{-i\pi\alpha}\, a\,.\,\underset{\infty}{F}(x) + e^{-i\pi\beta}\, b\,.\,\underset{\infty}{G}(x), \\ G\left(\frac{1}{x}\right) &= -e^{i\pi(\gamma-\alpha)}\, c\,.\,\underset{\infty}{F}(x) - e^{i\pi(\gamma-\beta)}\, d\,.\,\underset{\infty}{G}(x). \end{aligned}\right\} \quad (B)$$

Die linken Seiten bedeuten das Zweigpaar, das sich durch eine rechtläufige Drehung des Arguments um 1 nach dem reellen 1 übertreffenden Werthe $\frac{1}{x}$ hin aus dem hypergeometrischen Stämmepaar fortsetzt; rechts hingegen bedeuten $\underset{\infty}{F}(x)$, $\underset{\infty}{G}(x)$ ein hypergeometrisches Stämmepaar. Da

$$bc = \frac{1-\gamma}{\alpha-\beta} \cdot \frac{\sin\pi\alpha \,.\, \sin\pi(\gamma-\beta)}{\sin\pi\gamma \,.\, \sin\pi(\beta-\alpha)}, \qquad ad = \frac{1-\gamma}{\alpha-\beta} \cdot \frac{\sin\pi\beta \,.\, \sin\pi(\gamma-\alpha)}{\sin\pi\gamma \,.\, \sin\pi(\beta-\alpha)},$$

so ist $ad - bc = \frac{1-\gamma}{\alpha-\beta}$. Das Substitutionsmaass der Verwandlung (B) ist also $e^{i\pi\cdot\frac{1-\gamma}{\beta-\alpha}}$.

Der ursprüngliche Zustand des Functionspaares zeigt 0 als Verzweigungspunkt mit den Exponenten 0 und $1-\gamma$ an, die Verwandlung (A) giebt 1 als Verzweigungspunkt mit den Exponenten 0 und $\gamma-\alpha-\beta$, und die Verwandlung (B) giebt ∞ als Verzweigungspunkt mit den Exponenten α, β, und die Summe aller sechs Verzweigungsexponenten ist 1. (S. Riemann's Abh. § I.).

Die Verwandlungen (A) und (B) finden sich in Kummer's Abhandlung über die hypergeometrische Reihe (Crelle's J. Bd. 15.) als Gleichungen (23) S. 58. und (27) S. 60.

Zu diesen Verwandlungen kommt noch eine dritte (die aus dem Ausdruck für $\overset{1}{S}_0$ sich ergiebt, wenn man darin $u = 1-t$ setzt):

$$\left.\begin{aligned} F'(\alpha,\beta,\gamma,x) &= (1-x)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha,\beta,\gamma,\frac{x}{x-1}\right) \\ &= (1-x)^{-\alpha} F\left(\gamma-\beta,\alpha,\gamma,\frac{x}{x-1}\right). \end{aligned}\right\} (C)$$

Damit links und rechts hypergeometrische Reihen möglich seien, muss x absolut kleiner als 1 und seine reelle Componente kleiner als $\frac{1}{2}$ sein.

Die Summenreihen geben die Werthe des Functionenpaares $F(x)$, $G(x)$ innerhalb des mit Radius 1 um 0 beschriebenen Kreises; die Verwandlung (B) giebt sie ausserhalb dieses Kreises. Aber für Argumente, die auf der Peripherie dieses Kreises liegen, hätte man entweder sehr schwache oder keine Convergenz der Summenreihen. Bedeutet φ die Phase des Arguments, so giebt die Verwandlung (A) für $x = e^{i\varphi}\left(-\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{3}\right)$ convergente Summenreihen, die Verwandlung (C) für $\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{5\pi}{3}$. Nur für $x = e^{\frac{i\pi}{3}}, e^{-\frac{i\pi}{3}}$ geben alle drei Verwandlungen zusammen keine Summenreihen, die nach Art einer fallenden geometrischen Reihe convergirten.

7. Im Gleichungenpaar (A) führe man das Argument $1-x$ der zwei Functionen links μ Male um 1 herum, also das Argument x der Functionen rechts μ Male um 0 herum. Wenn $m = e^{2i\pi\alpha}$, so werden die zwei Functionen rechts durch die Substitution $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & m^{\mu} \end{pmatrix}$ verwandelt. Die links durch die Umwicklung von 1 entstandenen Functionszweige mögen mit $\overline{F}(1-x)$, $\overline{G}(1-x)$ bezeichnet werden; dann sind diese durch die zusammengesetzte Substitution

$$\begin{pmatrix} \varrho g \cdot & -\frac{\varrho}{\varepsilon} h \\ \varrho j \cdot & -\frac{\varrho}{\varepsilon} k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & . & 0 \\ 0 & . & m^{\mu} \end{pmatrix}$$

in zwei hypergeometrischen Stämmen $F_1(x)$, $G_1(x)$ ausgedrückt. Löst man das Gleichungenpaar (A) nach diesen auf, so sind sie durch die inverse Substitution

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\varrho} k \cdot & -\frac{1}{\varrho} h \\ \frac{\varepsilon}{\varrho} j \cdot & -\frac{\varepsilon}{\varrho} g \end{pmatrix}$$

in den zwei Stämmen $F(1-x)$, $G(1-x)$ ausgedrückt. Bezeichnet man nun das reelle zwischen 0 und 1 befindliche Argument $1-x$ einfach mit x, so sind die zwei durch Umwicklung von 1 (in μ Umläufen) entstandenen Zweige $\overline{F}(x)$, $\overline{G}(x)$ mittelst der Substitution

$$\begin{pmatrix} g & . & h \\ j & . & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & . & 0 \\ 0 & .. & m^{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & \cdot & -h \\ -j & \cdot & g \end{pmatrix}$$

in den zwei Stämmen $F(x)$, $G(x)$ ausgedrückt. Zwischen zwei inverse Substitutionen mit dem Maass 1 ist die drehende Substitution mit dem Maass m^{μ} eingeschoben, und man hat

$$\overline{F}(x) = (-hjm^{\mu} + gk)\, F(x) + gh\,(m^{\mu} - 1)\, G(x)\,,$$
$$\overline{G}(x) = -jk(m^{\mu} - 1\ )\, F(x) + (gkm^{\mu} - hj)\, G(x)\,.$$

Zu λ Umläufen um 0 gehört, wenn $l = e^{-2i\pi\gamma}$ gesetzt wird, die Substitution $\begin{pmatrix} 1 & . & 0 \\ 0 & . & l^{\lambda} \end{pmatrix}$. Setzt man

$$S = \begin{pmatrix} g & . & h \\ j & . & k \end{pmatrix}\ ,\quad L = \begin{pmatrix} 1 & . & 0 \\ 0 & . & l \end{pmatrix}\ ,\quad M = \begin{pmatrix} 1 & . & 0 \\ 0 & . & m \end{pmatrix},$$

und macht das Argument der hypergeometrischen Stämme F, G von seinem anfänglichen Stande x zwischen 0 und 1 aus zuerst λ Umläufe um 0, dann μ Umläufe um 1, dann λ' um 0, dann μ' um 1, dann λ'' um 0, dann μ'' um 1 und kehrt auf den Stand x zurück, so entspricht dem gegenwärtigen Zweigpaare die Substitution

$$L^{\lambda} S M^{\mu} S^{-1} L^{\lambda'} S M^{\mu'} S^{-1} L^{\lambda''} S M^{\mu''} S^{-1},$$

deren Substitutionsmaass $l^{\lambda+\lambda'+\lambda''} m^{\mu+\mu'+\mu''}$ ist. Man könnte $\lambda = 0$ setzen, oder rechts nur noch den Factor $L^{\lambda'''}$ beifügen. Eine Potenz von L kann also die Zusammensetzung beginnen oder nicht, und schliessen oder nicht. Aber eine Potenz von M tritt nicht anders auf, als indem ihr S vorangeht und S^{-1} folgt.

Im allgemeinen hat eine zusammengesetzte Substitution die Form

$$\begin{pmatrix} A & . & ghB \\ -jkC & . & D \end{pmatrix},$$

wo, wenn n getrennte Umwicklungen des Poles 1 stattgefunden haben, A, D ganze homogene Functionen n^{ten} Grades, B, C solche $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades von gk, hj sind, also mit Rücksicht auf die Relation $gk - hj = 1$ ganze Functionen resp. n^{ten} und $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades des einzigen Arguments gk sind, worin die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von gk wiederum ganze Functionen von l, m sind, so dass in den Ausdrücken für A, B, C, D die Elemente gk, l, m als Stellvertreter der drei unabhängigen α, β, γ erscheinen.

Bern, 19. Juni 1870.

Ueber iterirte Functionen.

Von Ernst Schröder in Pforzheim.

Ich lege hiemit einige Untersuchungen aus einem Felde vor, auf welchem ich sehr wenig Mitarbeitern begegne. Dass gleichwohl die von mir verfolgte Tendenz nicht der Berechtigung entbehrt, dürfte durch meinen vorangegangenen Aufsatz *über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen* *) hinreichend begründet erscheinen.

§ 1.

Charakter der Aufgabe.

Ist $F(z)$ eine beliebige eindeutig gegebene Function des complexen Argumentes z, so kann die *r fach wiederholte* oder *iterirte* Function $F^r(z)$ dadurch (in recurrenter Weise) definirt werden, dass man die Gleichungen festsetzt:

$$(1) \qquad F^1(z) = F(z), \qquad F^r(z) = F^{r-1}\{F(z)\},$$

welche für jedes Argument z gültig sein sollen, die letztere überdies für jede natürliche Zahl r. Darnach ist also $F^r(z)$ das Ergebniss einer $(r-1)$ maligen Einsetzung der Function $F(z)$ selbst an Stelle ihres Argumentes z, nämlich:

$$F^2(z) = FF(z), \qquad F^3(z) = FFF(z),$$

u. s. w., wenn der Einfachheit wegen die Einschliessung der zusammengesetzten Argumente unterlassen wird.

Aus der gegebenen Definition gehen sogleich die Relationen hervor:

$$(2) \qquad F^r F(z) = F^{r+1}(z) = FF^r(z),$$

$$(3) \qquad F^{r_1} F^{r_2}(z) = F^{r_1+r_2}(z) = F^{r_2} F^{r_1}(z),$$

$$(4) \qquad \{F^{r_1}\}^{r_2}(z) = F^{r_1 r_2}(z) = \{F^{r_2}\}^{r_1}(z),$$

*) Diese Annalen, Band II., Seite 317.

welche für alle positiven ganzen Zahlen r, r_1, r_2 gültig sind, vorerst nur für diese einen Sinn haben, und die Grundeigenschaften der Iteration ausdrücken.

Auf das *Problem der iterirten Functionen* kann man sich nun führen lassen durch die Bedürfnisse der rechnenden Analysis. Da selbst die leichtesten Rechnungen unausführbar sind, wenn ihre Anzahl gross ist, so wird man zunächst bemerken, dass es für eine einigermaassen grosse Zahl r nicht thunlich ist, das Endresultat:

$$z^{(r)} = F^r(z) \tag{5}$$

auf dem angegebenen Wege zu ermitteln. Es erwächst hieraus die Aufgabe, eine neue Bildungsweise für dieses Resultat zu finden, bei welcher die Ausführung jener successiven $(r-1)$ maligen Substitution nicht nur umgangen, sondern überhaupt folgende Anforderung erfüllt wird: Die Beschaffenheit der behufs Erlangung des Endresultates an den gegebenen Zahlen auszuführenden Rechengeschäfte soll unabhängig von r sein; genauer gesagt: die Reihenfolge und die Natur der arithmetischen Elementaroperationen, aus welchen die Rechnungen sich alle zusammensetzen (auch, sofern sie nicht unendlich ist, die Anzahl derselben), soll die nämliche bleiben, wie gross auch r werden möge. Da trotzdem das Endergebniss im Allgemeinen von r abhängen muss, so wird sich dies nicht anders erreichen lassen, als indem man die Grösse $z^{(r)}$ so darstellt, dass r in ihren Ausdruck nur als *allgemeine* Zahl eingeht, dass es also aus einem Index in ein Argument verwandelt und $z^{(r)}$ als analytische Function von r *explicirt* wird. Damit wird die Reihe der Grössen $z^{(1)}, z^{(2)}, z^{(3)}, \ldots$ zugleich interpolirt, und man sieht, dass das Problem, wie die Interpolationsprobleme überhaupt, nicht völlig bestimmt ist. Zur näheren Bestimmung eines Interpolationsproblems müssen offenbar noch Stetigkeitsbedingungen hinzugezogen werden; denn einer Function, die nur in einzelnen Punkten der Argumentenebene (hier den Punkten $r = 1, 2, 3, \ldots$) gegeben ist, können in allen übrigen Punkten dieser Ebene noch ganz beliebige Werthe beigelegt werden, wenn man sich nicht scheut, auch Unstetigkeit in Flächengebieten oder wenigstens (in den gedachten Punkten) die von Riemann bei seinen Untersuchungen stets ausgeschlossenen *aufhebbaren* Unstetigkeiten zuzulassen. An Stelle der zur Ergänzung erforderlichen Stetigkeitsbedingungen haben wir nun die Forderung treten lassen, dass die Function einen analytischen Ausdruck habe.

Die Aufgabe gehört darnach zu jenen *directen* Problemen, bei welchen — wie z. B. auch bei der Aufgabe der Reihensummirung — der in Gestalt einer vorgeschriebenen Reihenfolge von Operationen bereits bekannte Weg um zu einem bestimmten Endziel zu gelangen, nur durch einen practicabelern ersetzt werden soll. Wie man jedoch

die Aufgabe der Reihensummation (die endliche Integration) auch als ein inverses Problem formuliren kann, nämlich als dasjenige der Auflösung einer einfachen Differenzengleichung, so lässt sich auch das Problem der iterirten Functionen noch wie folgt fassen: Es soll eine Function $\Phi(r, z)$ zweier complexen Argumente r und z gefunden werden, welche überall in der r Ebene ausser etwa einzelnen Punkten oder Curven (zu denen $r = 1, 2, 3, \ldots$ nicht gehören) stetig ist für alle Punkte der z Ebene ausser einzelnen Punkten oder Curven der letzteren, und welche ausserdem die *Functionalgleichung*:

$$\Phi(r, z) = \Phi(r - 1, F(z))$$

nebst der Anfangsbedingung: $\Phi(1, z) = F(z)$ erfüllt.

Lässt sich eine solche Function nur analytisch ausdrücken, so wird sie mit der vorhin definirten Function $F^r(z)$ identisch sein; überhaupt werden die beiderlei Definitionen im Folgenden stets zusammenfallen.

Da sich eine *allgemeine* Methode, wenigstens für eine einigermaassen umfassende Classe von Functionen $F(z)$ die Aufgabe zu lösen, bis jetzt nicht finden liess, so bezweckt die gegenwärtige Arbeit nur, den wenigen bis jetzt behandelten Fällen einige neue hinzuzufügen. Ueberdies sind die Lösungen in jedem einzelnen Falle, also für eine bestimmte Function F, auch nicht *vollständig*, sodass sich etwa durch Variiren einer willkührlichen Function alle möglichen Arten der Auflösung ergeben würden; für die Zwecke der Rechnung ist aber schon eine particulare Lösung von der grössten Wichtigkeit, da man kein anderes Mittel besitzt für grössere r den Werth von $F^r(z)$ zu erfahren.

§ 2.

Iteration der linear gebrochenen Function.

Fast die einzige Function — meines Wissens — deren Wiederholungen untersucht und ermittelt sind, ist die linear gebrochene Function:

$$F(z) = \frac{\alpha_0 z + \alpha_1}{\beta_0 z + \beta_1} = \frac{\alpha_0}{\beta_0} - \frac{\alpha_0 \beta_1 - \alpha_1 \beta_0}{\beta_0 (\beta_1 + \beta_0 z)}. \tag{6}$$

Die $r$fache Wiederholung dieser Function kann auf zwei Wegen ermittelt werden: dieselbe lässt sich einerseits in Gestalt eines Kettenbruches darstellen, der abgesehen von dem letzten Theilnenner periodisch ist, und summirt werden kann; von R. Hoppe*) und in dem Lehrbuche von Serret**) finden sich andrerseits die Coefficienten der

*) Zeitschrift für Math. und Phys. von Schlömilch u. Cantor, Bd. 5, pag. 136.
**) Cours d'Algèbre Supérieure, t. II., pag. 329, 3. Auflage.

bezüglich z ebenfalls linear gebrochenen Functizn $F^r(z)$ mit Hülfe einfacher Recursionsformeln bestimmt.

Am elegantesten dürfte sich das Endresultat in folgender Weise darstellen. Sind ζ_1 und ζ_2 die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung $F(\zeta) = \zeta$, so ist:

$$(7) \qquad F^r(z) = \frac{\left(\zeta_1 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^r \left(\zeta_1 z + \frac{\alpha_1}{\beta_0}\right) - \left(\zeta_2 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^r \left(\zeta_2 z + \frac{\alpha_1}{\beta_0}\right)}{\left(\zeta_1 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^r (z - \zeta_2) - \left(\zeta_2 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\right)^r (z - \zeta_1)},$$

ein Ausdruck, welcher die Form $\frac{0}{0}$ annimmt, wenn die beiden Wurzeln ζ_1 und ζ_2 einander gleich sind; durch Differentiation von Zähler und Nenner ergiebt sich auch für diesen Fall leicht:

$$(8) \qquad F^r(z) = \frac{\left(\zeta z + \frac{\alpha_1}{\beta_0}\right) r + \left(\zeta + \frac{\beta_1}{\beta_0}\right) z}{(z - \zeta) r + \left(\zeta + \frac{\beta_1}{\beta_0}\right)},$$

wenn mit ζ der gemeinschaftliche Werth der beiden Wurzeln bezeichnet wird.

In Betreff zahlreicher interessanter Untersuchungen, die sich an die iterirte Function $F(z)$ knüpfen lassen, wie z. B. der Frage, unter welchen Bedingungen $F^r(z) = z$ für jedes z werde, u. A. m. kann füglich auf Serret (l. c.) verwiesen werden.

Ich bemerke hier nur noch, dass $F^r(z)$ für ein unendlich wachsendes r stets einer bestimmten von der Natur der Zahl r unabhängigen Grenze zustrebt, ausgenommen wenn:

$$\text{mod.}\left(\zeta_1 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\right) = \text{mod.}\left(\zeta_2 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\right)$$

ohne dass zugleich $\zeta_1 = \zeta_2$ selbst ist. Diese Grenze ist aber von dem Argumente z abhängig, und zwar:

$$(9) \qquad F^\infty(z) = \frac{\zeta_1 z + \frac{\alpha_1}{\beta_0}}{z - \zeta_2}, \qquad \text{wenn mod.}\left(\zeta_1 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\right) > \text{mod.}\left(\zeta_2 + \frac{\beta_1}{\beta_0}\right);$$

ist das Umgekehrte der Fall, so müssen ζ_1 und ζ_2 vertauscht werden; ist aber $\zeta_1 = \zeta_2 = \zeta$, so stimmen die beiden Ausdrücke miteinander überein.

Man kann auch die Curve bestimmen, auf welcher sich der Punkt $z^{(r)} = F^r(z)$ bewegt, wenn r von $-\infty$ bis $+\infty$ stets reell bleibend continuirlich wächst. Da $F^{-\infty}(z) = F^{+\infty}(z)$, so muss diese Curve eine geschlossene sein und muss jener Punkt bei seiner Bewegung von dieser Anfangslage aus durch die Punkte z, $F(z)$, $F^2(z)$, ... hindurchgehend wieder in dieselbe Endlage zurückkehren. Im All-

gemeinen hat der Punkt sogar unter unendlich viel Bahnen von gewissem Charakter die Wahl, da die Reihe der Werthe $z, F(z), F^2(z), \ldots$ durch die Gleichung (7) je nach der Definition, die man dem Logarithmus

$$\log \frac{\zeta_1 + \frac{\beta_1}{\beta_0}}{\zeta_2 + \frac{\beta_1}{\beta_0}}$$

geben will, auf unendlich viele Arten interpolirt werden kann.

In rechtwinkligen Coordinaten X, Y findet man die Gleichung der gedachten Curven ohne Schwierigkeit, indem man $F^r(z) = X + iY$ setzt, und in Gleichung (7) das Reelle von dem Imaginären sondert, endlich aus den beiden so entstehenden Gleichungen r eliminirt. Da jedoch diese Gleichung im Allgemeinen transscendent wird, und weder nach X noch nach Y aufgelöst werden kann, so thut man besser, r als unabhängige Variable beizubehalten, und die Curve durch die zwei Gleichungen auszudrücken:

$$X = \frac{\mathfrak{F}(r, i) + \mathfrak{F}(r, -i)}{2}, \qquad Y = \frac{\mathfrak{F}(r, i) - \mathfrak{F}(r, -i)}{2},$$

nachdem $F^r(z)$ auf die Form einer reellen Function von r und i, nämlich $\mathfrak{F}(r, i)$ gebracht ist.

Es wäre, scheint es, eine lohnende Aufgabe, die Bedingungen zu untersuchen, unter welchen die gedachten Curven algebraische, z. B. Kegelschnitte werden, und sich dann in das ganze System der Curven einen genaueren Einblick zu verschaffen.

§ 3.

Conforme Abbildung, als Princip zur Auffindung iterabler Functionen.

Kann man überhaupt *irgend eine* Function iteriren, so lässt sich dem Resultate eine bedeutend allgemeinere Gestalt geben, wenn man sich eines Principes bedient, welches ich jetzt in Kürze darlegen will. Wenngleich ich mich nicht speciell erinnere, dasselbe erwähnt gefunden zu haben, glaube ich doch nicht, dass es bei seiner grossen Einfachheit der Aufmerksamkeit der Mathematiker entgangen sein kann.

Ist $\zeta^{(1)} = \Phi(\zeta)$ eine Function, deren r fache Wiederholung $\zeta^{(r)} = \Phi^r(\zeta)$ bekannt ist, und $z^{(1)} = F(z)$ eine andre Function, deren r fache Wiederholung $z^{(r)} = F^r(z)$ gesucht wird (als explicirte Function von r), so ist die Aufgabe immer gelöst, wenn es gelungen ist, eine solche Function ψ zu finden, dass für:

(10) $$z = \psi(\zeta)$$

mithin $\zeta = \psi^{-1}(z)$, auch stets:

$$z^{(1)} = \psi(\zeta^{(1)}) \tag{11}$$

ist. Alsdann wird nämlich auch allgemein:

$$z^{(r)} = \psi(\zeta^{(r)})$$

sein, und man wird also die Function:

$$F^r(z) = \psi\left[\Phi^r\left\{\psi^{-1}(z)\right\}\right]$$

oder in kürzerer Bezeichnung

$$F^r = \psi\,\Phi^r\,\psi^{-1} \tag{12}$$

ebenfalls bilden können.

In der That folgt aus (10), dass die Function ψ nur einer Functionalgleichung zu genügen braucht, welche in einer der vier folgenden Formen angeschrieben werden kann:

$$\begin{cases} F = \psi\,\Phi\,\psi^{-1}\ , & F\psi = \psi\,\Phi\ , \\ \psi^{-1}F = \Phi\,\psi^{-1}\ , & \psi^{-1}F\,\psi = \Phi\ , \end{cases} \tag{13}$$

wenn wieder Kürze halber die zuletzt noch anzufügenden Argumente z weggelassen und auch die Klammern um die Argumente nicht geschrieben werden, sodass also die Functionszeichen sich auf alles Nachfolgende zu beziehen haben. Aus der ersten von diesen Gleichungen geht aber, da nach der Definition der Function ψ^{-1}:

$$\psi^{-1}\psi = 1\,,\ [\text{d. h. ausführlicher: } \psi^{-1}\left\{\psi(\xi)\right\} = \xi]$$

ist, sofort hervor:

$$F^2 = \psi\,\Phi\,\psi^{-1}\,\psi\,\Phi\,\psi^{-1} = \psi\,\Phi^2\,\psi^{-1}\,,$$

und durch Schluss von r auf $r+1$ erkennt man in derselben Weise leicht die Gültigkeit der allgemeinen Gleichung (12).

Möglichst kurz gefasst sagt nun der gefundene Satz aus, dass die Gleichungen (12) und (13) sich gegenseitig bedingen, oder:

(*A*) *Wenn bei beliebigem Argument:* $F = \psi\,\Phi\,\psi^{-1}$ *ist, so muss auch* $F^r = \psi\,\Phi^r\,\psi^{-1}$ *sein.*

Hängen aber zwei reelle Zahlen x, y von zwei andern reellen Zahlen ξ, η in der Weise ab, dass die complexe Zahl $z = x + iy$ eine Function ψ von ξ und η lediglich in der Verbindung $\xi + i\eta = \zeta$ ist, so wird bekanntlich die Ebene der in einem rechtwinkeligen Coordinatensystem dargestellten Punkte ξ, η von der Ebene der ebenso dargestellten Punkte x, y *conform* — d. h. mit Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen aller sich in beiden Ebenen entsprechenden Figuren — abgebildet. Man kann also auch den Satz aussprechen:

(*B*) *Wenn die Function* ψ *der Bedingung* (13) *genügt, so stellt die Ebene der Punkte* z, $z^{(1)}, \ldots z^{(r)}$ *eine conforme Abbildung von der Ebene der Punkte* ζ, $\zeta^{(1)}, \ldots \zeta^{(r)}$ *vor.*

Da für gewisse Functionen Φ die Iterationen Φ^r bekannt sind, so lässt sich auf Grund dieses Satzes das directe Problem des Iterirens irgend einer Function F stets zurückführen auf das inverse Problem der Auflösung einer Functionalgleichung (13).

Im Allgemeinen ist aber die Aufsuchung der Function ψ bei gegebenen Functionen Φ und F eine sehr schwierige Aufgabe, und man wird deshalb eher den umgekehrten Weg einschlagen. Nimmt man nämlich für ψ alle möglichen Functionen, von welchen man eine Umkehrung ψ^{-1} darzustellen im Stande ist, so liefert die Gleichung (13) alle diejenigen Functionen F, deren Wiederholungen sich aus denen der Function Φ ableiten lassen.

Setzt man z. B.:

$$\Phi(z) = \alpha z^n,$$

so findet man leicht direct:

$$\Phi^r(z) = \alpha^{\frac{n^r-1}{n-1}} z^{n^r}.$$

Nimmt man hierauf $\psi(z) = e^z$, also $\psi^{-1}(z) = \log z$, so ergiebt sich, dass die Wiederholungen der neuen Function:

$$F(z) = e^{\alpha (\log z)^n}$$

durch den Ausdruck dargestellt werden:

$$F^r(z) = e^{\alpha^{\frac{n^r-1}{n-1}} (\log z)^{n^r}}.$$

Hingegen bei der Annahme $\psi(z) = \log z$, $\psi^{-1}(z) = e^z$ folgt, wenn man β für $\log \alpha$ schreibt, leicht:

$$F(z) = \beta + n z, \qquad F^r(z) = \frac{n^r - 1}{n-1} \beta + n^r z,$$

wie auch schon als specieller Fall aus § 2. hervorgeht, da diese Function F eine lineare ist.

Für $\psi(z) = \mu z + \nu$ also $\psi^{-1}(z) = \frac{z-\nu}{\mu}$ hätte man gefunden, dass wenn:

$F(z) = \mu \alpha \left(\frac{z-\nu}{\mu}\right)^n + \nu$ ist, allgemein $F^r(z) = \mu \alpha^{\frac{n^r-1}{n-1}} \left(\frac{z-\nu}{\mu}\right)^{n^r} + \nu$

sein muss, und wäre hier das abgebildete System dem ursprünglichen durchaus ähnlich, etc.

Noch immer von beträchtlicher Allgemeinheit sind diejenigen speciellen Fälle des Theorems (A), bei welchen die Function ψ unbestimmt gelassen und nur Φ specialisirt wird. In dieser Richtung sind am bemerkenswerthesten die beiden folgenden Sätze, die sich bei der Annahme

$\Phi(\xi)=\xi+h$ oder aber $\Phi(\xi)=m\xi$ ergeben, für welche $\Phi^r(\xi)=\xi+rh$, beziehungsweise $\Phi^r(\xi)=m^r\xi$ ist.

(*C*) *Wenn für eine Function* $\psi(\xi)$ *ein Additionstheorem bekannt ist, vermöge dessen sich die von einer Summe* $\xi+h$ *genommene Function* ψ *durch dieselbe Function des einen Summanden* ξ *ausdrücken lässt, wie etwa:*

$$\psi(\xi+h)=F\{\psi(\xi)\},$$

so lässt sich jedesmal die iterirte Function $F^r(z)$ *hinsichtlich* r *explici ren*, und zwar ist $\psi(\xi+rh)=F^r\{\psi(\xi)\}$, also:

$$F^r(z)=\psi\{\psi^{-1}(z)+rh\}.$$

(*D*) *Wenn für eine Function* $\psi(\xi)$ *ein Multiplicationstheorem bekannt ist, vermöge dessen sich die von einem Vielfachen* $m\xi$ *des Argumentes genommene Function durch dieselbe Function des einfachen Argumentes* ξ *ausdrücken lässt, wie etwa:*

$$\psi(m\xi)=F\{\psi(\xi)\},$$

so kann man immer die iterirte Function $F^r(z)$ *hinsichtlich* r *explici ren*, und zwar ist: $\psi(m^r\xi)=F^r\{\psi(\xi)\}$, also:

$$F^r(z)=\psi\{m^r\psi^{-1}(z)\}.$$

Es wäre von Interesse, alle diejenigen Functionen F zusammenzustellen, welche sich mit Hülfe dieser ziemlich fruchtbar scheinenden Theoreme iteriren lassen. Diese Functionen sind oft ziemlich complicirten Ausdruckes, doch scheinen sie selten von sehr allgemeinem Charakter zu sein, indem sie wenig willkürliche Parameter zu enthalten pflegen. Ich begnüge mich, in Kürze einige Beispiele anzuführen.

§ 4.

Beispiele zu den vorausgehenden Theoremen.

I. Nimmt man $\psi(\xi)=\mu\,\mathrm{tg}\,\xi+\nu$, so findet man unter Benutzung des bekannten Satzes für $\mathrm{tg}(\xi+h)$ leicht das allgemeinere Additionstheorem:

$$\psi(\xi+h)=\frac{(\mu^2+\nu^2)\,\mathrm{tg}\,h+(\mu-\nu\,\mathrm{tg}\,h)\cdot\psi(\xi)}{(\mu+\nu\,\mathrm{tg}\,h)-\mathrm{tg}\,h\cdot\psi(\xi)}.$$

Wird dieser Ausdruck $=F\{\psi(\xi)\}$ gesetzt, und ferner $\psi(\xi)=z$, mithin $\psi^{-1}(z)=\mathrm{arctg}\,\frac{z-\nu}{\mu}$, endlich:

$$(\mu^2+\nu^2)\,\mathrm{tg}\,h=\varrho\,\alpha_1,\qquad \mu-\nu\,\mathrm{tg}\,h=\varrho\,\alpha_0,$$
$$\mu+\nu\,\mathrm{tg}\,h=\varrho\,\beta_1,\qquad -\mathrm{tg}\,h=\varrho\,\beta_0,$$

so ergiebt sich für $F(z)$ die (ganz beliebige) linear gebrochene

Function $\frac{\alpha_0 z + \alpha_1}{\beta_0 z + \beta_1}$ wie in (6), und man findet nach dem Theorem (*C*) die Iteration derselben in der neuen Gestalt:

$$(14) \qquad F^r(z) = \mu \operatorname{tg}\left\{\operatorname{arctg}\frac{z-\nu}{\mu} + r\,h\right\} + \nu,$$

worin die Grössen μ, ν, h aus den vorausgehenden Gleichungen zu bestimmen sind, und die Werthe erhalten:

$$(15) \quad \mu = i\frac{\sqrt{(\alpha_0-\beta_1)^2 + 4\,\alpha_1\beta_0}}{2\,\beta_0}, \quad \nu = \frac{\alpha_0-\beta_1}{2\,\beta_0}, \quad h = -\operatorname{arctg}\frac{2\,\beta_0\,\mu}{\alpha_0+\beta_1}$$

indem $\varrho = \frac{2\,\mu}{\alpha_0+\beta_1}$ wird. — Auch für die allgemeinere Function:

$$\psi(\xi) = \frac{a_0 \operatorname{tg}(\mu\,\xi+\nu) + a_1}{b_0 \operatorname{tg}(\mu\,\xi+\nu) + b_1}$$

liesse sich leicht ein Additionstheorem aufstellen; da dieses jedoch von einer ähnlichen Form wie das vorige wird, so führt dasselbe auch wieder nur zur Iteration der linear gebrochenen Function hin.

II. Da bekanntlich:

$$\operatorname{tg} m\,\xi = \frac{\sum_{a=0}^{a=\infty}(-1)^a (m)_{2a+1} (\operatorname{tg}\xi)^{2a+1}}{\sum_{a=0}^{a=\infty}(-1)^a (m)_{2a} (\operatorname{tg}\xi)^{2a}},$$

so ergiebt sich bei der Annahme $\psi(\xi) = \operatorname{tg}\xi$ nach dem Theorem (*D*), dass die Iterationen der Function:

$$(16) \qquad F(z) = \frac{\sum_{a=0}^{a=\infty}(-1)^a (m)_{2a+1} z^{2a+1}}{\sum_{a=0}^{a=\infty}(-1)^a (m)_{2a} z^{2a}} = \operatorname{tg}(m \operatorname{arctg} z)$$

dargestellt werden durch den Ausdruck:

$$(17) \qquad F^r(z) = \operatorname{tg}(m^r \operatorname{arctg} z) = \frac{\sum_{a=0}^{a=\infty}(-1)^a (m^r)_{2a+1} z^{2a+1}}{\sum_{a=0}^{a=\infty}(-1)^a (m^r)_{2a} z^{2a}}.$$

Die Formeln gelten unbedingt für eine natürliche Zahl m, wo dann die Reihen in Zähler und Nenner abbrechen; bei beliebigem m sind die Reihen nur zulässig, so lange mod. $z < 1$ ist, jedoch kann man sie auch leicht für den Fall mod. $z > 1$ modificiren. — Aehnliche Formeln könnte man aus dem entsprechenden Theorem für cotg $m\,\xi$ ableiten.

Fasst man nur die beiden rationalen Ausdrücke für $F(z)$ und $F^r(z)$ ins Auge, so sind hierin, nach dem Theorem (2), merkwürdige Relationen der Binomialcoefficienten sowie der Facultätencoefficienten verborgen, die ich an dieser Stelle unterdrücke.

Nimmt man insbesondere $m=2$ an, so wird nach (16): $F(z)=\frac{2z}{1-z^2}$, und die Aehnlichkeit dieses Ausdruckes mit den beiden in § 14. meiner schon citirten Abhandlung betrachteten quadratisch gebrochenen Functionen führt sogleich zu der Bemerkung, dass dieselben wie folgt dargestellt werden können:

$$\frac{2z}{1+z^2} = -i \operatorname{tg}(2 \operatorname{arctg} iz), \qquad \frac{1+z^2}{2z} = -i \operatorname{cotg}(2 \operatorname{arccotg} iz),$$

wo $i=\sqrt{-1}$ bedeutet. Es gehören demnach auch die beiden letzten Functionen zu den iterablen, und ist z. B. für die erstere gefunden, wenn:

$$F(z) = \cfrac{2}{z+\cfrac{1}{z}} \tag{18}$$

gesetzt wird, dass:

$$F^r(z) = -i \operatorname{tg}(2^r \operatorname{arctg} iz) \tag{19}$$

sein muss.

Was die andre Function betrifft, so ist nicht nur diese selbst, sondern sind auch ihre Wiederholungen beziehungsweise das Reciproke von der vorigen Function und ihren Wiederholungen. Diese Eigenschaft: dass die r fache Wiederholung der reciproken Function gleich der reciproken r fachen Wiederholung der Function selbst ist, kommt überhaupt einer Function $F(z)$ dann und nur dann stets zu, wenn für jedes z:

$$F(z) = F\left(\frac{1}{z}\right)$$

ist; denn alsdann hat man, wenn $\frac{1}{F(z)} = F_1(z)$ gesetzt wird:

$$F_1^2(z) = \frac{1}{F\left\{\frac{1}{F(z)}\right\}} = \frac{1}{F\left\{F(z)\right\}} = \frac{1}{F^2(z)}$$

und ebenso allgemein: $F_1^r(z) = \frac{1}{F^r(z)}$.

Einer rationalen gebrochenen Function kommt also jene Eigenschaft zu, wenn im Zähler sowie im Nenner derselben, nachdem beide eventuell durch Einführung von Null-Coefficienten auf den gleichen Grad gebracht sind, die Coefficienten derjenigen Potenzen von z einander gleich sind, deren Exponenten sich zu dem Grade dieses Zählers oder Nenners ergänzen, also die Coefficienten der höchsten und der niedersten, dann der zweithöchsten und der zweitniedersten Potenz des Argumentes, u. s. w.

Ich bemerke noch, dass wenn man dem Ausdruck (19) die Form einer rationalen Function: $F^r(z) = \frac{A_r(z)}{B_r(z)}$ giebt, wo

$$A_r(z) = \sum_{a=0}^{a=2^{r-1}-1} (2^r)_{2a+1}\, z^{2a+1} = -i\,\frac{\sin(2^r \operatorname{arctg} iz)}{(\cos \operatorname{arctg} iz)^{2^r}},$$

$$B_r(z) = \sum_{a=0}^{a=2^{r-1}} (2^r)_{2a}\, z^{2a} = \frac{\cos(2^r \operatorname{arctg} iz)}{(\cos \operatorname{arctg} iz)^{2^r}}$$

sein wird, alsdann aus dem einen Theile von (2) die Recursionen hervorgehen: $A_{r+1}(z) = 2A_r(z)\,B_r(z)$, $B_{r+1}(z) = B_r(z)^2 + A_r(z)^2$; die erstere derselben liefert die Darstellung von $A_r(z)$ in Form eines Productes:

$$A_r(z) = 2^r z\, B_1(z)\, B_2(z)\, B_3(z) \ldots B_{r-1}(z),$$

also beispielsweise:

$A_4(z) = 16z(1+z^2)(1+6z^2+z^4)(1+28z^2+70z^4+28z^6+z^8) =$
$= 16(z+z^{15}) + 560(z^3+z^{13}) + 4368(z^5+z^{11}) + 11440(z^7+z^9)$,
und läuft im Grunde auf die goniometrische Identität hinaus:

$$\frac{\sin(2^r\xi)}{2^r \sin\xi} = \cos\xi \cdot \cos(2\xi)\cos(2^2\xi)\cos(2^3\xi)\ldots\cos(2^{r-1}\xi).$$

In ähnlicher Weise könnte man nun auch die bekannten Theoreme für $\sin m\xi$ und $\cos m\xi$ allgemein verwerthen. Aus:

$$(\sin 2\xi)^2 = 4(\sin\xi)^2\{1 - (\sin\xi)^2\}$$

folgt z. B. dass die Function:

$F(z) = 4z(1-z)$, iterirt, giebt: $F^r(z) = \{\sin(2^r \arcsin\sqrt{z})\}^2$.
Aus $\sin 3\xi = 3\sin\xi - 4(\sin\xi)^3$ folgt, dass für $F(z) = 3z - 4z^3$ wird: $F^r(z) = \sin(3^r \arcsin z)$, u. dergl. m.

III. Ist:

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

ein elliptisches Integral erster Gattung in der Normalform, so ist bekanntlich, wenn wir uns der Jacobi'schen Bezeichnung für die elliptischen Functionen bedienen:

$$x = \sin\operatorname{am}(u, \varkappa),$$

wofür auch, da der Modul $\varkappa$ stets der nämliche bleiben wird, das kürzere Zeichen $s(u)$ genommen werden möge; ebenso sei:
$\cos\operatorname{am}(u,\varkappa) = \sqrt{1-s(u)^2} = c(u)$ und $\Delta\operatorname{am}(u,\varkappa) = \sqrt{1-\varkappa^2 s(u)^2} = \Delta(u)$.
Alsdann gelten für den speciellen Fall der Verdoppelung des Argumentes die Theoreme:

$$s(2u) = \frac{2s(u)c(u)\Delta(u)}{1-\varkappa^2 s(u)^4}, \qquad c(2u) = \frac{c(u)^2 - s(u)^2\Delta(u)^2}{1-\varkappa^2 s(u)^4},$$

$$\Delta(2u) = \frac{\Delta(u)^2 - \varkappa^2 s(u)^2 c(u)^2}{1-\varkappa^2 s(u)^4}.$$

Rechter Hand ist in der ersten Formel Alles durch $s(u)$, in der zweiten durch $c(u)$, in der dritten durch $\Delta(u)$ auszudrücken, und da wir uns hier auf die Iteration rationaler Functionen beschränken wollen, so ist überdies die erste Gleichung behufs Wegschaffung des Wurzelzeichens in's Quadrat zu erheben. Wird dann beziehungsweise $s(u)^2$, $c(u)$ und $\Delta(u)$ gleich $\psi(u)$ gesetzt, so ergeben sich als Iteration der Functionen:

$$F(z) = \frac{4z(1-z)(1-\varkappa^2 z)}{1-\varkappa^2 z^2}, \qquad F(z) = \frac{z^2-(1-z^2)(1-\varkappa^2+\varkappa^2 z^2)}{1-\varkappa^2(1-z^2)^2},$$

$$F(z) = \frac{\varkappa^2 z^2-(1-z^2)(\varkappa^2-1+z^2)}{\varkappa^2-(1-z^2)^2},$$

deren letzte durch Einsetzung von $\frac{1}{\varkappa}$ anstatt $\varkappa$ aus der vorhergehenden hervorgeht und deshalb nicht weiter berücksichtigt zu werden braucht, respective:

$$F^r(z) = \left\{\sin\operatorname{am}\left(2^r \int_0^{\sqrt{z}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}, \varkappa\right)\right\}^2,$$

$$F^r(z) = \cos\operatorname{am}\left(2^r \int_0^{\sqrt{1-z^2}} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}, \varkappa\right),$$

u. s. w.

§ 5.

Anwendung zur Iteration einer Classe von quadratisch gebrochenen Functionen.

Besonderes Interesse verdient diejenige Annahme der Function ψ, bei welcher diese mitsammt ihrer Umkehrung ψ^{-1} rational ist, d. h. die Annahme einer linear gebrochenen Function

$$(20) \qquad \psi(z) = \frac{\alpha_0 z + \alpha_1}{\beta_0 z + \beta_1}, \qquad \psi^{-1}(z) = \frac{-\beta_1 z + \alpha_1}{\beta_0 z - \alpha_0}.$$

Aus $F(z) = \frac{2z}{1+z^2}$ ergiebt sich zum Beispiel bei dieser Annahme:

$$(21) \qquad \Phi(z) = \frac{\gamma_0 z^2 + 2\gamma_1 z + \gamma_2}{\delta_0 z^2 + 2\delta_1 z + \delta_2},$$

worin:

$$(22) \begin{cases} \gamma_0 = -2\alpha_0\beta_0\beta_1 + (\beta_0^2+\beta_1^2)\alpha_1, & \gamma_1 = (\alpha_0^2-\alpha_1^2)\beta_1, & \gamma_2 = -(\alpha_0^2-\alpha_1^2)\alpha_1, \\ \delta_0 = -(\beta_0^2-\beta_1^2)\beta_1, & \delta_1 = (\beta_0^2-\beta_1^2)\alpha_1, & \delta_2 = -2\alpha_0\alpha_1\beta_0 + (\alpha_0^2+\alpha_1^2)\beta_1 \end{cases}$$

ist, und es wird:

$$(23) \qquad \Phi^r(z) = \frac{\alpha_0\, i\, \mathrm{tg}\left(2^r \operatorname{arctg} i\, \frac{\beta_1 z - \alpha_1}{\beta_0 z - \alpha_0}\right) + \alpha_1}{\beta_0\, i\, \mathrm{tg}\left(2^r \operatorname{arctg} i\, \frac{\beta_1 z - \alpha_1}{\beta_0 z - \alpha_0}\right) + \beta_1}.$$

Hätte man dieselbe Betrachtung für die Function $F(z) = \frac{1+z^2}{2z}$ durchgeführt, so würde man zu demselben Resultate hinsichtlich der Function Φ gelangt sein, nur dass in dieser die Coefficienten α_0 mit α_1 und β_0 mit β_1 vertauscht erschienen wären.

Die Wiederholungen einer rational gebrochenen Function (21) vom zweiten Grade in Zähler und Nenner lassen sich also durch den Ausdruck (23) darstellen, wenn die 6 Coefficienten γ, δ derselben in der unter (22) angegebenen Weise von den 4 willkührlichen Constanten α, β abhängen.

Da es nur auf die Verhältnisse der Coefficienten ankommt, so ist also unsere Function Φ, anstatt wie im allgemeinen Falle durch 5, hier nur durch 3 willkührliche Parameter characterisirt, oder es müssen, wenn die Gleichung (23) anwendbar sein soll, zwischen den 5 Coefficientenverhältnissen des Ausdruckes (21) zwei Relationen bestehen.

Diese Relationen wollen wir wirklich aufstellen, wobei die Schwierigkeit allein in der Wahrung der Symmetrie bestehen wird. Zu dem Ende schreiben wir die Relationen (22) zunächst in der Gestalt:

$$(24) \quad \begin{cases} \alpha_1\gamma_1 + \beta_1\gamma_2 = 0, & \alpha_1\delta_0 + \beta_1\delta_1 = 0, \\ \gamma_1 + \delta_2 = 2\alpha_0(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0), & \gamma_0 + \delta_1 = -2\beta_0(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0), \\ \gamma_0 = -\beta_0(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0) + \beta_1(\alpha_1\beta_1 - \alpha_0\beta_0), & \delta_2 = \alpha_0(\alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0) + \alpha_1(\alpha_1\beta_1 - \alpha_0\beta_0), \end{cases}$$

und handelt es sich darum, aus diesen Gleichungen die 4 Grössen α, β zu eliminiren.

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt sofort die eine der gesuchten Relationen:

$$(25) \qquad \gamma_1\delta_1 = \gamma_2\delta_0;$$

nur in dem Falle $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ müsste diese Relation nicht bestehen; derselbe verdient aber nicht in Betrachtung gezogen zu werden, weil dann die Function $\psi(z)$ unabhängig von z oder constant wäre. — Die Werthe der 4 Coefficienten α, β können ferner mit einem beliebigen Factor multiplicirt werden, da es nur auf die 3 Verhältnisse dieser Grössen ankommt. Jenen Factor kann man z. B. so wählen, dass die Determinante der Substitutionscoefficienten

$$(26) \qquad \alpha_0\beta_1 - \alpha_1\beta_0 = \mu^2$$

eine beliebig gegebene Zahl ist; dies würde nur dann nicht angehen, wenn sie den Werth 0 hätte, welcher Fall aber wieder aus dem vorhin erwähnten Grunde nicht in Betracht kommt. Wir können also, unbeschadet der Allgemeinheit, die Relation (26) annehmen.

Dann aber folgt aus der 3ten und 4ten Gleichung (24):

$$(27) \qquad \alpha_0 = \frac{\gamma_1 + \delta_2}{2\mu^2} \quad , \quad \beta_0 = -\frac{\gamma_0 + \delta_1}{2\mu^2} \, ,$$

und durch Einsetzung dieser Werthe in (26):

$$(\gamma_0 + \delta_1)\,\alpha_1 + (\gamma_1 + \delta_2)\,\beta_1 = 2\mu^4 \, .$$

Diese Gleichung lässt sich sowohl mit der ersten als auch mit der zweiten Gleichung (24) verbinden und nach den Unbekannten α_1, β_1 auflösen. Man findet:

$$(28) \qquad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{2\gamma_2\mu^4}{\gamma_2(\gamma_0 + \delta_1) - \gamma_1(\gamma_1 + \delta_2)} = \dfrac{-2\delta_1\mu^4}{\delta_0(\delta_2 + \gamma_1) - \delta_1(\delta_1 + \gamma_0)} \, , \\ \beta_1 = \dfrac{-2\gamma_1\mu^4}{\gamma_2(\gamma_0 + \delta_1) - \gamma_1(\gamma_1 + \delta_2)} = \dfrac{2\delta_0\mu^4}{\delta_0(\delta_2 + \gamma_1) - \delta_1(\delta_1 + \gamma_0)} \, . \end{cases}$$

Setzt man nun entweder die untereinander stehenden oder die über's Kreuz combinirten Werthe von α_1, β_1 nebst den Ausdrücken (27) für α_0, β_0 in die beiden noch nicht verwertheten Gleichungen (24) ein, welche lauten:

$$(29) \quad \gamma_0 = -\beta_0\mu^2 + \beta_1(\alpha_1\beta_1 - \alpha_0\beta_0) \quad , \quad \delta_2 = \alpha_0\mu^2 + \alpha_1(\alpha_1\beta_1 - \alpha_0\beta_0),$$

und eliminirt μ aus den Ergebnissen, so erhält man die zweite der gesuchten Relationen, aber immer in einer andern Gestalt, je nach dem Paar von Ausdrücken, die man für α_1, β_1 benutzt. Am besten eliminirt man sogleich die Grösse $\alpha_1\beta_1 - \alpha_0\beta_0$, bildet also:

$$\alpha_1(\gamma_0 + \beta_0\mu^2) = \beta_1(\delta_2 - \alpha_0\mu^2),$$

da alsdann μ bei der Einsetzung von selbst herausfällt. Bei paralleler Verknüpfung der angegebenen Ausdrücke von α_1 und β_1 erscheint dann die Endgleichung in einer der beiden Formen:

$$(30) \quad \gamma_2(\gamma_0 - \delta_1) - \gamma_1(\gamma_1 - \delta_2) = 0 \text{ oder } \delta_0(\delta_2 - \gamma_1) - \delta_1(\delta_1 - \gamma_0) = 0,$$

welche mit Rücksicht auf (25) leicht in einander übergeführt werden können.

Nun ist also das Ergebniss unsrer Untersuchung folgendes: Die Iterationen der gebrochenen Function zweiten Grades (21) lassen sich auf dem eingeschlagenen Wege ermitteln, wenn die Coefficienten dieser Function folgende zwei Bedingungen erfüllen:

$$(I) \qquad \begin{vmatrix} \gamma_1 & , & \gamma_2 \\ \delta_0 & , & \delta_1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(II) \qquad \begin{vmatrix} \gamma_0 - \delta_1 & , & \gamma_1 - \delta_2 \\ \gamma_1 & , & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0 \text{ , oder auch } \begin{vmatrix} \delta_1 - \gamma_0 & , & \delta_2 - \gamma_1 \\ \delta_0 & , & \delta_1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder in symmetrischer Gestalt:

$$(II) \qquad \begin{vmatrix} \gamma_1 - \delta_0 & , & \delta_1 - \gamma_2 \\ \delta_1 - \gamma_0 & , & \gamma_1 - \delta_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Man darf endlich noch eine beliebige Relation zwischen den 6 Coefficienten γ, δ festsetzen, weil es nur auf die 5 Verhältnisse

derselben ankommt, und kann diese Relation so wählen, dass μ einen beliebig gegebenen Werth erhält, indem man für diesen Werth von μ eine der beiden einander äquivalenten Gleichungen (29) gelten lässt. Will man alsdann die iterirte Function $\Phi^r(z)$ durch die Coefficienten γ, δ ausgedrückt bilden, so braucht man nur die Werthe (27), (28) der Coefficienten α, β in (23) zu substituiren, von welchen aber die letzteren sich jetzt noch einfacher so darstellen lassen:

$$(31)\quad \begin{cases} \alpha_1 = \dfrac{\gamma_2\mu^4}{\gamma_0\gamma_2 - \gamma_1^2} = \dfrac{-\gamma_2\mu^4}{\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1} = \dfrac{-\delta_1\mu^4}{\delta_0\delta_2 - \delta_1^2} = \dfrac{\delta_1\mu^4}{\gamma_0\delta_1 - \gamma_1\delta_0}, \\ \beta_1 = \dfrac{-\gamma_1\mu^4}{\gamma_0\gamma_2 - \gamma_1^2} = \dfrac{\gamma_1\mu^4}{\gamma_1\delta_2 - \gamma_2\delta_1} = \dfrac{\delta_0\mu^4}{\delta_0\delta_2 - \delta_1^2} = \dfrac{-\delta_0\mu^4}{\gamma_0\delta_1 - \gamma_1\delta_0}; \end{cases}$$

am besten aber benutzt man die auf Grund der Relationen (I) und (II) den vorigen äquivalenten Ausdrücke:

$$(32)\qquad \alpha_1 = \frac{\gamma_1 - \delta_2}{\gamma_2\delta_0 - \gamma_0\delta_2}\mu^4 \quad , \quad \beta_1 = -\frac{\gamma_0 - \delta_1}{\gamma_2\delta_0 - \gamma_0\delta_2}\mu^4.$$

Wenn man nun die Coefficienten γ, δ keiner andern Relation unterwerfen will, als den beiden unerlässlichen Bedingungen (I) und (II), so hat man die Grösse μ aus einer der beiden Gleichungen (29) oder am besten aus ihrer Summe zu berechnen, nachdem die Ausdrücke der α und β eingesetzt sind. Die Gleichung wird vom ersten Grade bezüglich μ^{12} und es ergiebt sich:

$$(33)\qquad \mu^{12} = (\gamma_2\delta_0 - \gamma_0\delta_2)^2 \left\{\frac{\gamma_1\delta_1}{(\gamma_0 - \delta_1)(\gamma_1 - \delta_2)} + 1\right\}.$$

Der hieraus hervorgehende Werth von μ^4 und von μ^2 ist in die Gleichungen (27) und (32) zu substituiren.

§ 6.

Iteration einer Classe von Functionen die sich in eine Mac-Laurin'sche Reihe entwickeln lassen.

Wenn eine Function $F(z)$ durch eine Mac-Laurin'sche Potenzreihe dargestellt wird, so lässt sich das Bildungsgesetz für die Iterationen derselben — viel leichter als im allgemeinen Falle — finden, wenn die Reihenentwicklung die besondere Eigenthümlichkeit hat, dass sie mit dem Terme z als Anfangsglied beginnt. Mit den Wiederholungen einer solchen Function, deren allgemeine Form also ist:

$$(34)\qquad F(z) = z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \alpha_4 z^4 + \cdots,$$

oder $F(z) = \sum_{a=1}^{a=\infty} \alpha_a z^a$, wenn $\alpha_1 = 1$ gedacht wird, wollen wir uns noch eingehender beschäftigen.

Um die r fache Wiederholung $F^r(z)$ dieser Function bezüglich r explicirt zu erhalten, kann man aus einem glücklichen Gedanken

Vortheil ziehen, den ich in einer kurzen Notiz von Cayley*) erwähnt gefunden habe. Bekanntlich ist die Gleichung:

$$f(r) = \sum_{a=0}^{a=\infty} (r)_a \sum_{b=0}^{b=a} (-1)^b (a)_b f(a-b)$$

eine identische, wenn r eine natürliche Zahl bedeutet. Um ihre Richtigkeit zu erkennen, genügt es übrigens, rechts die Ordnung der Summationen umzukehren, die Umformung $(r)_a (a)_b = (r)_b (r-b)_{a-b}$ vorzunehmen und sich des Binomialtheorems für $(1-1)^{r-b}$ zu erinnern. Für ein beliebiges Argument r bei einer Function f in Anspruch genommen würde diese Gleichung den von Crelle**) auf endliche Differenzen erweiterten Taylor'schen Satz vorstellen, dessen Zulässigkeitsbedingungen — wie Herr *Weierstrass****) hervorhob — noch nicht gehörig klar gestellt sind.

Nimmt man nun $f(r) = F^r(z)$, so kann man also schreiben:

$$(35_a) \qquad F^r(z) = \sum_{a=0}^{a=\infty} (r)_a \sum_{b=0}^{b=a} (-1)^b (a)_b F^{a-b}(z),$$

oder in ausführlicherer Darstellung:

$$(35_b) \quad F^r(z) = F^0(z) +$$
$$+ \frac{r}{1}\left\{F^1(z) - F^0(z)\right\} +$$
$$+ \frac{r(r-1)}{1.2}\left\{F^2(z) - 2F^1(z) + F^0(z)\right\} +$$
$$+ \frac{r(r-1)(r-2)}{1.2.3}\left\{F^3(z) - 3F^2(z) + 3F^1(z) - F^0(z)\right\} +$$
$$+ \quad . \quad . \quad .

Es wird sich nun zeigen, dass die nach steigenden Potenzen von z angeordnete Entwicklung der $a+1^{\text{ten}}$ Zeile in (35_b), also des Ausdruckes:

$$S = \sum_{b=0}^{b=a} (-1)^b (a)_b F^{a-b}(z) \tag{36}$$

erst mit der $a+1^{\text{ten}}$ Potenz von z beginnt, und auf diesem Umstand, der sich nur bei der eben betrachteten Classe von Functionen darzubieten scheint, beruht es, dass man die ersten Glieder der gesuchten, nach Potenzen von z anzuordnenden Reihe für $F^r(z)$ sogleich in endlicher Form für ein beliebig grosses r anschreiben kann, ohne mehr Substitutionen von $F(z)$ statt z ausgeführt zu haben, als der Index dieser Glieder angiebt.

Um $F^r(z)$ auf dem angedeuteten Wege nach Potenzen von z zu entwickeln (für eine unbestimmt gelassene Zahl r), wird man zur Erleichterung der Rechnungen am besten folgende Vorarbeiten ausführen.

Man legt zuerst nach dem Schema des polynomischen Satzes eine Tabelle für die Potenzen der Function $F(z)$ an, wobei man nicht über eine bestimmte, z. B. die 5^{te} Potenz von z sowohl als von $F(z)$ hinauszugehen braucht. Indem man hierauf:

$$\Phi(z) = z + \beta_2 z^2 + \beta_3 z^3 + \beta_4 z^4 + \cdots$$

setzt, bildet man nach dem Schema:

$$F\Phi(z) = z + (\alpha_2+\beta_2)z^2 + (\alpha_3 + 2\alpha_2\beta_2 + \beta_3)z^3 + \{\alpha_4 + 3\alpha_3\beta_2 + \alpha_2(\beta_2^2 + 2\beta_3) + \beta_4\} z^4 +$$
$$+ \{\alpha_5 + 4\alpha_4\beta_2 + \alpha_3(3\beta_2^2 + 3\beta_3) + \alpha_2(2\beta_2\beta_3 + 2\beta_4) + \beta_5\} z^5 + \cdots$$

eine Tabelle der iterirten Functionen, wobei man immer nur $F^{r-1}(z)$ für $\Phi(z)$ zu nehmen braucht, um $F^r(z)$ zu erhalten; ich unterlasse es, die so zu berechnenden Ausdrücke von $F^2(z)$, $F^3(z)$, $F^4(z)$, $F^5(z)$, ... anzugeben, da sie mit Leichtigkeit a posteriori aus der nachstehenden Formel für $r = 2, 3, 4, 5, \ldots$ entnommen werden können. Setzt man endlich diese Ausdrücke in die Gleichung (35) ein, und ordnet nach Potenzen von z an, so ergiebt sich das Resultat:

$$\begin{aligned} F^r(z) = z &+ \\ &+ (r)_1 \alpha_2 z^2 + \\ &+ \{(r)_2 2\alpha_2^2 + (r)_1 \alpha_3\} z^3 + \\ &+ \{(r)_3 6\alpha_2^3 + (r)_2(\alpha_2^3 + 5\alpha_2\alpha_3) + (r)_1 \alpha_4\} z^4 + \\ &+ \{(r)_4 24\alpha_2^4 + (r)_3(10\alpha_2^4 + 26\alpha_2^2\alpha_3) + (r)_2(5\alpha_2^2\alpha_3 + 6\alpha_2\alpha_4 + 3\alpha_3^2) + (r)_1 \alpha_5\} z^5 + \cdots \end{aligned} \tag{37}$$

welches schon Cayley (l. c.) angegeben hat, jedoch in weniger übersichtlicher Form, indem er nach Potenzen anstatt nach Binomialcoefficienten von r ordnete. Wird diese Gleichung abgekürzt wie folgt geschrieben:

$$(38_a)\qquad \begin{aligned} F^r(z) = {} & A_{1,0}z + \\ & + A_{2,1}(r)_1 z^2 + \\ & + \{A_{3,2}(r)_2 + A_{3,1}(r)_1\} z^3 + \\ & + \{A_{4,3}(r)_3 + A_{4,2}(r)_2 + A_{4,1}(r)_1\} z^4 + \\ & + \{A_{5,4}(r)_4 + A_{5,3}(r)_3 + A_{5,2}(r)_2 + A_{5,1}(r)_1\} z^5 + \cdots \end{aligned}$$

oder in noch conciserer Darstellung:

$$(38_b)\qquad F^r(z) = \sum_{a=1}^{a=\infty} z^a \sum_{b=0}^{b=a-1} A_{a,b}(r)_b,$$

wobei $A_{1,0} = 1$ und $A_{a,0} = 0$ für $a > 1$ ist, so sind dadurch gewisse Coefficienten $A_{a,b}$ als ganze rationale Functionen von α_2, α_3, α_4, ... definirt, und ich stellte mir die Aufgabe, zur Berechnung dieser Coefficienten Recursionen aufzufinden, sowie auch, ihr independentes Bildungsgesetz zu ermitteln.

Zu dem Ende werde ich den Coefficienten von z^n in der Entwickelung der k^{ten} Potenz von $F(z)$ nach steigenden Potenzen von z stets bezeichnen mit:

$$[F(z)^k]_{z^n} = F_n^{(k)}.$$

Es können dann die Grössen $F_n^{(k)}$ nach dem polynomischen Satze sowohl recurrirend berechnet als auch independent dargestellt werden; für manche Functionen $F(z)$ sind sie sogar hinsichtlich der Zahl n explicabel. Mit Rücksicht auf die sich ergebenden Werthe dieser Grössen, welche bequem in eine Tabelle zu bringen sind, erkennt man nun leicht, dass:

$$A_{2,1} = A_{1,0}F_2^{(1)};$$

$$A_{3,2} = A_{2,1}F_3^{(2)} \quad , \quad A_{3,1} = A_{1,0}F_3^{(1)};$$

$$A_{4,3} = A_{3,2}F_4^{(3)} \quad , \quad A_{4,2} = A_{3,1}F_4^{(3)} + A_{2,1}F_4^{(2)} \quad , \quad A_{4,1} = A_{1,0}F_4^{(1)}$$

$$A_{5,4} = A_{4,3}F_5^{(1)} \quad , \quad A_{5,3} = A_{4,2}F_5^{(4)} + A_{3,2}F_5^{(3)},$$

$$A_{5,2} = A_{4,1}F_5^{(4)} + A_{3,1}F_5^{(3)} + A_{2,1}F_5^{(2)} \quad , \quad A_{5,1} = A_{1,0}F_5^{(1)};$$

u. s. w. und findet durch Induction das allgemeine Gesetz:

$$(39)\qquad A_{a,b} = \sum_{c=1}^{c=a-b} F_a^{(a-c)} A_{a-c,\,b-1},$$

wo hinzuzusetzen sind die Anfangswerthe: $A_{1,0} = 1$, $A_{a,0} = 0$.

Nach dieser Recursionsformel lassen sich die Coefficienten $A_{a,b}$ successive bequem berechnen, und die Aufgabe, sie als Functionen von a, b zu expliciren ist auf die Ausführung einfacher Summationen zurückgeführt, so oft die Coefficienten $F_n^{(k)}$ nach n und k explicabel sind.

Man kann nun auch das independente Bildungsgesetz derselben aussprechen. Durch Anwendung der Recursionsformel ergiebt sich nämlich, wenn man die Werthe der Grössen $F_n^{(k)}$ nicht einsetzt;

$$A_{2,1} = F_2^{(1)};$$

$$A_{3,2} = F_3^{(2)} F_2^{(1)} \quad , \quad A_{3,1} = F_3^{(1)};$$

$$A_{4,3} = F_4^{(3)} F_3^{(2)} F_2^{(1)} \quad , \quad A_{4,2} = F_4^{(3)} F_3^{(1)} + F_4^{(2)} F_2^{(1)} \quad , \quad A_{4,1} = F_4^{(1)};$$

$$A_{5,4} = F_5^{(4)} F_4^{(3)} F_3^{(2)} F_2^{(1)} \quad , \quad A_{5,3} = F_5^{(4)} F_4^{(3)} F_3^{(1)} + F_5^{(4)} F_4^{(2)} F_2^{(1)} + F_5^{(3)} F_3^{(2)} F_2^{(1}$$

$$A_{5,2} = F_5^{(4)} F_4^{(1)} + F_5^{(3)} F_3^{(1)} + F_5^{(2)} F_2^{(1)} \quad , \quad A_{5,1} = F_5^{(1)};$$

u. s. w. Es erinnern diese Formeln an die Darstellung der Coefficienten einer algebraischen Gleichung als grundsymmetrische Functionen ihrer Wurzeln. Allgemein ist:

$$(40) \qquad A_{a,b} = \Sigma F_a^{(a_1)} F_{a_1}^{(a_2)} F_{a_2}^{(a_3)} \dots F_{a_{b-2}}^{(a_{b-1})} F_{a_{b-1}}^{(1)},$$

wo die Summe auszudehnen ist über diejenigen Werthsysteme der Zahlen $a_1, a_2, a_3, \dots a_{b-1}$, welche die Combinationen der Elemente $a-1, a-2, \dots 3, 2$ zur $b-1^{\text{ten}}$ Classe ohne Wiederholungen vorstellen.

Ich schreite jetzt zum strengen Beweise des durch Induction gefundenen recurrenten Bildungsgesetzes (39) der Coefficienten $A_{a,b}$, von welchem die independente Darstellung (40) nur eine leicht zu ziehende Consequenz ist.

Es war gefunden, dass die r fach wiederholte Function F von der Form ist:

$$F^r(z) = \sum_{a=1}^{a=\infty} z^a \sum_{b=1}^{b=a} A_{a,b-1}(r)_{b-1},$$

wo die Coefficienten $A_{a,b-1}$ von r sowohl als von z unabhängig sind. Für $r=1$ ist dies richtig, und wir wollen es auch für die höheren Werthe bis zu dem angegebenen r als Annahme gelten lassen, da sich die Richtigkeit dieser Annahme alsdann für $r+1$ von selbst bestätigen wird; es werden sich nämlich die Coefficienten $A_{a,b-1}$ so bestimmen lassen, dass auch, wenn man $r+1$ für r nimmt:

$$(41) \qquad F^{r+1}(z) = \sum_{a=1}^{a=\infty} z^a \sum_{b=1}^{b=a} A_{a,b-1}(r+1)_{b-1}$$

wird. Nun ist nach der Definition der iterirten Functionen:

$$F^{r+1}(z) = F^r F(z) = \sum_{a=1}^{a=\infty} F(z)^a \sum_{b=1}^{b=a} A_{a,b-1}(r)_{b-1},$$

und hierin kann man die Entwicklung des polynomischen Satzes:

$$F(z)^a = \sum_{c=a}^{c=\infty} F_c^{(a)} z^a$$

substituiren. Man erhält durch Anordnung nach Potenzen von z und Vergleichung der Coefficienten mit denjenigen von (41) die Relation:

$$\sum_{b=1}^{b=c} A_{c,b-1}(r+1)_{b-1} = \sum_{a=1}^{a=c} F_c^{(a)} \sum_{b=1}^{b=a} A_{a,b-1}(r)_{b-1}.$$

Um beiderseits nach Binomialcoefficienten mit dem Exponenten r anordnen zu können substituire man hierin:

$$(r+1)_{b-1} = (r)_{b-1} + (r)_{b-2},$$

wodurch sich, da $(r)_{-1} = 0$ ist, ergiebt:

$$\sum_{b=1}^{b=c} A_{c,\,b-1}(r)_{b-1} + \sum_{b=1}^{b=c-1} A_{c,\,b}(r)_{b-1} = \sum_{b=1}^{b=c} (r)_{b-1} \sum_{a=b}^{a=c} F_c^{(a)} A_{a,\,b-1}.$$

Die Coefficienten von $(r)_{b-1}$ müssen aber beiderseits übereinstimmen, daher:

$A_{c,\,b-1} + A_{c,\,b} = \sum_{a=b}^{a=c} F_c^{(a)} A_{a,\,b-1}$, für $b = 1, 2, 3, \ldots c-1$, und

$A_{c,\,c-1} = F_c^{(c)} A_{c,\,c-1}$.

Die letztere Gleichung ist wegen $F_c^{(c)} = 1$ eine Identität, und aus demselben Grunde hebt sich in der vorausgehenden Gleichung das erste Glied linker Hand gegen das oberste Glied der Summe rechter Hand weg, sodass bleibt:

$$A_{c,\,b} = \sum_{a=b}^{a=c-1} F_c^{(a)} A_{a,\,b-1};$$

dies ist nun in der That die zu beweisende Recursion (39), nur mit anderer Bezeichnung der Summationsvariabeln.

Ich will jetzt auch noch nachweisen, dass die nach steigenden Potenzen von z geordnete Entwicklung des Summenausdruckes S in (36) erst mit der $a+1^{\text{ten}}$ Potenz von z beginnt, wie Eingangs behauptet wurde.

Zu dem Ende benütze ich die gefundene Entwicklung:

$$F^{a-b}(z) = \sum_{n=1}^{n=\infty} z^n \sum_{c=0}^{c=n-1} A_{n,\,c}(a-b)_c,$$

und erhalte als Coefficienten von z^n in dem Ausdrucke von S:

$$[S]_{z^n} = \sum_{c=0}^{c=n-1} A_{n,\,c} \sum_{b=0}^{b=a} (-1)^b (a)_b (a-b)_c.$$

Da nun: $(a)_b (a-b)_c = (a)_c (a-c)_b$, so ist die letzte Summe

$$= (a)_c \sum_{b=0}^{b=a} (-1)^b (a-c)_b = (-1)^a (a)_c \sum_{b=0}^{b=a} (-1)_{a-b} (a-c)_b;$$

nach dem bekannten Additionstheoreme der Binomialcoefficienten:

$$\sum_{b=0}^{b=a} (\mu)_{a-b} (\nu)_b = (\mu+\nu)_a$$

ist sie also $= (-1)^a (a)_c (a-c-1)_a = (a)_c (c)_a$, und wird mithin:

$$[S]_{z^n} = \sum_{c=0}^{c=n-1} (a)_c (c)_a A_{n,\,c}.$$

Nun ist $(a)_c (c)_a = 0$, so oft c von a verschieden ist, und da c höchstens $= n-1$, so ist dies für alle Glieder unsrer Summe der Fall, so lange $n \leqq a$; demnach haben wir alsdann:

$$[S]_{z^n} = 0,$$

wie zu zeigen war. Ist aber $n > a$, so bleibt in der Summe allein der Term stehen, welcher dem Werth a der Summationsvariabeln c entspricht, und ist:

$$[S]_{z^n} = A_{n,a},$$

wie dies auch sein musste.

Die bisherigen Betrachtungen sind selbstverständlich nur anwendbar insofern die Reihen für $F(z)$, $F(z)^k$ und $F^r(z)$ gleichzeitig convergiren, was im Allgemeinen der Fall sein wird innerhalb eines den Punkt $z = 0$ umgebenden Kreises, welcher allerdings in den Punkt 0 selbst degeneriren könnte. Bei der Untersuchung der Convergenzbedingungen dürfen die Potenzen $F(z)^k$ aus dem Spiel gelassen werden, denn da das Product zweier unbedingt convergirenden Reihen stets wieder eine unbedingt convergirende Reihe giebt, so sind die Entwicklungen von $F(z)^k$ nach dem polynomischen Satze für positive ganze k stets Potenzreihen, welche innerhalb des nämlichen Bereiches von z convergiren wie $F(z)$ selbst, abgesehen, vielleicht, von der Grenzlinie dieses Bereiches, auf welcher die Convergenz eine bedingte wird. Es kommt also nur darauf an, dass gleichzeitig die Reihen für die Function $F(z)$ und deren Wiederholungen bis $F^r(z)$ convergiren, und in dieser Beziehung muss wenigstens gezeigt werden, dass es Functionen F giebt, für welche dieses stattfindet. Einen Beleg hierzu liefert die Function:

$$F(z) = \frac{z}{1 - \alpha z},$$

welche für mod. $z < \frac{1}{\alpha}$ in eine Potenzreihe entwickelt werden kann; alsdann liefert die Gleichung (37) eine Potenzreihe für $F^r(z)$, welche für mod. $z < \frac{1}{r\alpha}$ convergirt, und deren Summe:

ist.
$$F^r(z) = \frac{z}{1 - r\alpha z}$$

Unter Voraussetzung der Convergenz lässt sich nun, wie dies u. A. bei dem eben angeführten Beispiel der Fall ist, die Gleichung (37) auch noch als Definition der iterirten Function $F(z)$ beibehalten, wenn r eine andere als eine positive ganze Zahl ist.

Der also definirten Function $F^r(z)$ kommen auch bei beliebigem complexem r noch die Fundamentaleigenschaften der eine natürliche Anzahl mal wiederholten Functionen zu, vor allem diejenigen, welche durch die Gleichungen (2) bis (4) des §. 1. ausgedrückt sind.

Der Beweis dieser Behauptung lässt sich durch folgende Ueberlegung führen.

Nach §. 1. bestehen die genannten Theoreme für alle natürlichen Zahlen r, r_1 und r_2.

Die Coefficienten der entsprechenden Potenzen von z auf beiden Seiten der zu beweisenden Gleichungen sind aber ganze rationale Functionen von r beziehungsweise von r_1 und r_2 endlichen Grades, und da dieselben für ∞ viele Werthe dieser Grössen beiderseits übereinstimmen, so müssen sie überhaupt identisch und für alle möglichen Werthe derselben einander gleich sein. Die Theoreme (2) bis (4) gelten demnach für complexe wie für reelle Werthe von r, r_1 und r_2, sofern nur diese Theoreme überhaupt einen Sinn besitzen, d. h. sofern die Reihen, von welchen die Rede ist, convergiren.

Als besondre Fälle heben wir noch hervor:

$$F^r F^{-r}(z) = F^{-r} F^r(z) = F^0(z) = z\,,$$

$$F^{\frac{p}{q}}(z) = \left(F^{\frac{1}{q}}\right)^p(z) = \left(F^p\right)^{\frac{1}{q}}(z)\,,$$

$$\left(F^r\right)^{\frac{1}{r}}(z) = \left(F^{\frac{1}{r}}\right)^r(z) = F(z)\,,$$

u. s. w. Dies vorausgesetzt ist es nun leicht, die folgenden Aufgaben zu lösen.

Soll eine Grösse w als Function von z aus der Gleichung

$$F^r(w) = z$$

berechnet werden, so ist eine Auflösung:

$$w = F^{-r}(z)\,,$$

wie man erkennt, wenn man von der ersten Gleichung als Argument beiderseits die Function F^{-r} bildet, und eine der vorigen Relationen berücksichtigt. Als eine Auflösung der Gleichung:

$$F(w) = z$$

erhält man also insbesondere:

$$w = F^{-1}(z)\,,$$

d. h. es liefert die Formel (37) für $r = -1$ auch die inverse Function F^{-1} von F; sie leistet die Auflösung der Gleichung $F(w) = z$ oder die *Umkehrung* der Function F, und zwar erhält man genau dieselbe Reihe, welche die Lagrange'sche Umkehrungsformel für diesen Fall liefert.

Soll eine Function Φ gefunden werden, welche der Functionalgleichung genüge:

$$\Phi^q(z) = F^p(z)\,,$$

so findet man dieselbe, indem man nach der Formel (37) bildet:

$$\Phi(z) = F^{\frac{p}{q}}(z).$$

Der Beweis ergiebt sich leicht, indem man die Probe macht, nämlich die Functionen rechts und links vom Gleichheitszeichen q fach wiederholt; so wird nämlich:

$$\Phi^q(z) = \left(F^{\frac{p}{q}}\right)^q(z) \text{ mithin } = F^p(z).$$

Insbesondere ist also: $\Phi(z) = F^{\frac{1}{q}}(z)$ eine Auflösung der Functionalgleichung: $\Phi^q(z) = F(z)$ u. s. w.

§ 7.

Anwendung auf die Discussion von Algorithmen.

Die Ergebnisse des § 3. will ich nun für die Untersuchung der in meiner vorausgehenden Abhandlung betrachteten Algorithmen verwerthen und insbesondere den Nachweis der dort (§ 14.) aufgestellten Behauptung leisten, dass die beiden wichtigsten Algorithmen:

$$z' = z - \frac{f}{f_1} \quad \text{und} \quad z' = z - \frac{ff_1}{f_1^2 - ff_2}$$

für eine quadratische Gleichung $[z^2 - 1 = 0]$ in der ganzen Zahlenebene — mit Ausnahme einer einzigen Linie — gegen eine der beiden Wurzeln ± 1 convergiren.

Zu diesem Zwecke braucht nur für $F(z) = \frac{2z}{1+z^2}$ der Grenzwerth von:

$$z^{(r)} = F^r(z) = -i\,\mathrm{tg}(2^r \operatorname{arctg} i z)$$

bei ∞ wachsendem r aufgesucht zu werden.

Wie man leicht findet, ist:

$$\operatorname{arctg}(x+iy) = h\pi + \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\{x^2+(y+1)^2\}\{x^2+(y-1)^2\}}+x^2+y^2-1}{2x} + \frac{i}{4}\log\frac{x^2+(y+}{x^2+(y-}$$

eine Formel, die ich in den mir bekannten Lehrbüchern der Analysis vermisse*). Setzt man also $-y$ statt x, und x statt y, so wird:

$$(42)\quad \begin{cases} \operatorname{arctg} iz = h\pi + \xi + i\eta, \text{ wo } \xi = \operatorname{arctg}\dfrac{1-x^2-y^2-\sqrt{\{y^2+(x+1)^2\}\{y^2+(x-1)}}{2y} \\ \text{und } \eta = \frac{1}{4}\log\dfrac{y^2+(x+1)^2}{y^2+(x-1)^2}, \end{cases}$$

worin ferner unter h irgend eine ganze Zahl, unter dem log stets der reelle Werth, endlich unter arctg rechter Hand derjenige kleinste positive oder negative Bogen (also zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$) zu verstehen ist,

*) Vergl. hiermit z. B. Schlömilch, Handbuch der algebraischen Analysis, 3. Aufl. Jena 1862, pag. 242.

dessen tg gleich dem Argumente ist, und zwar positiv oder negativ, je nachdem dieses Argument selbst positiv oder negativ ist. Zur Vermeidung jeder Zweideutigkeit kann noch festgesetzt werden, dass der Werth $-\frac{1}{2}\pi$ nie vollkommen erreicht werden und $\operatorname{arctg}\frac{1}{0} = +\frac{1}{2}\pi$ sein soll. Ausserdem hat man für die Quadratwurzel den positiven Werth zu wählen. Alsdann ist:

$$(43)\quad z^{(r)} = -i\operatorname{tg}\left\{2^r h\pi + 2^r(\xi + i\eta)\right\} = -i\operatorname{tg} 2^r(\xi + i\eta)$$

Nach dem Schema:

$$\operatorname{tg}(x + iy) = \frac{\operatorname{tg} x + i\operatorname{Tg} y}{1 - i\operatorname{tg} x \operatorname{Tg} y} = \frac{\sin 2x + i\operatorname{Sin} 2y}{\cos 2x + \operatorname{Cos} 2y},$$

in welchem wir uns der hyperbolischen Functionen:

$$\operatorname{Tg} y = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1}, \quad \operatorname{Sin} 2y = \frac{e^{2y} - e^{-2y}}{2}, \quad \operatorname{Cos} 2y = \frac{e^{2y} + e^{-2y}}{2}$$

bedient haben, wird also:

$$(44)\qquad z^{(r)} = \frac{\operatorname{Tg}(2^r\eta) - i\operatorname{tg}(2^r\xi)}{1 - i\operatorname{tg}(2^r\xi)\operatorname{Tg}(2^r\eta)} = \frac{\operatorname{Sin} 2^{r+1}\eta - i\sin 2^{r+1}\xi}{\cos 2^{r+1}\xi + \operatorname{Cos} 2^{r+1}\eta},$$

welche beide Formen sich gleich gut zur Ermittelung des gesuchten Grenzwerthes eignen. Die goniometrischen Functionen sin und cos $2^{r+1}\xi$ sowie tg $2^r\xi$ werden nun für $r = \infty$ unbestimmt; nicht aber die hyperbolischen Functionen. Setzt man vielmehr zur Abkürzung:

$$\sqrt{\frac{y^2 + (x+1)^2}{y^2 + (x-1)^2}} = \xi,$$

so ist:

$$\operatorname{Tg} 2^r\eta = \frac{\xi^{2^r} - 1}{\xi^{2^r} + 1}, \quad \operatorname{Sin} 2^{r+1}\eta = \frac{\xi^{2^r} - \xi^{-2^r}}{2}, \quad \operatorname{Cos} 2^{r+1}\eta = \frac{\xi^{2^r} + \xi^{-2^r}}{2}.$$

Ist nun $x > 0$, so ist bei beliebigem endlichen y stets: $\xi > 1$ und:

$$\lim_{r=\infty} \xi^{2^r} = \infty, \quad \lim_{r=\infty} \xi^{-2^r} = 0.$$

Ist hingegen $x < 0$, so ist bei beliebigem y stets: $\xi < 1$ und:

$$\lim_{r=\infty} \xi^{2^r} = 0, \quad \lim_{r=\infty} \xi^{-2^r} = \infty,$$

also wird im ersten Falle:

$$\lim_{r=\infty} \operatorname{Tg} 2^r\eta = 1, \quad \lim_{r=\infty} \operatorname{Sin} 2^{r+1}\eta = \infty = \lim_{r=\infty} \operatorname{Cos} 2^{r+1}\eta,$$

und im zweiten Falle:

$$\lim_{r=\infty} \operatorname{Tg} 2^r\eta = -1, \quad \lim_{r=\infty} \operatorname{Sin} 2^{r+1}\eta = -\infty = -\lim_{r=\infty} \operatorname{Cos} 2^{r+1}\eta.$$

Ungeachtet der Unbestimmtheit jener goniometrischen Functionen erhalten wir demnach die völlig bestimmten Grenzwerthe:

$$(45)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{r=\infty} z^{(r)} = 1 & \text{für } x > 0, \text{ und} \\ \lim\limits_{r=\infty} z^{(r)} = -1 & \text{für } x < 0, \end{cases}$$

womit das Theorem bewiesen ist.

Ausnahmelinie kann nämlich nur noch der geometrische Ort der Punkte sein, für welche $x = 0$ ist, d. h. die Achse der rein imaginären Zahlen. Diese ist es in der That, denn, wenn x exact $= 0$ ist, so ist für jedes r, also auch für $r = \infty$:

$\xi = 1$, $\operatorname{Tg} 2^r\eta = 0$, $\operatorname{Sin} 2^{r+1}\eta = 0$, $\operatorname{Cos} 2^{r+1}\eta = 1$, folglich:

$$z^{(r)} = -i \operatorname{tg}(2^r\xi) = i \operatorname{tg}(2^r \operatorname{arctg} y);$$

Dieser Ausdruck ist aber stets imaginär, und kann daher nicht der Grenze ± 1 zustreben. Für $r = \infty$ wird er im Allgemeinen unbestimmt mit Ausnahme der Fälle, wo für ganze Zahlen h und p:

$$y = \operatorname{tg} \frac{h\pi}{2^p}$$

ist, wo folglich: $\lim\limits_{r=\infty} z^{(r)} = 0$ wird.

Wenn $\operatorname{arctg} y$ sonst ein aliquoter Theil eines Multiplums von π, also von der Form $\frac{h\pi}{2^p q}$ ist, wo $q > 1$ ist und den Primfactor 2 nicht enthält, so wird $z^{(r)}$ bei ∞ wachsendem r zwischen einer endlichen Anzahl verschiedener Werthe sprungweise oscilliren; in allen übrigen Fällen wird $z^{(r)}$ für ein rein imaginäres z bei ohne Ende wachsendem r unendlich viele Werthe durchlaufen.

Frägt man sich für welche Werthe von z bei gegebenem r:

$$z^{(r)} = z,$$

also der Algorithmus ein in sich zurücklaufender, periodischer wird, indem dann das Argument stets durch die Reihe der Werthe z, $z^{(1)}$, $z^{(2)}$, ... $z^{(r-1)}$ cyclisch hindurchspringt, so erhält man dieselben leicht aus der Gleichung:

$$\operatorname{tg}(2^r \operatorname{arctg} iz) = iz \quad , \quad \text{oder} \quad 2^r \operatorname{arctg} iz = \operatorname{arctg} iz + h\pi .$$

Abgesehen von den Wurzeln $z = \pm 1$, welche wegen $\operatorname{arctg} i = \infty i$ in dieser Gleichung verborgen sind, sind dieselben alle in der Form enthalten:

$$z = i \operatorname{tg} \frac{h\pi}{2^r - 1} .$$

Zur Herleitung des letzteren Ergebnisses hätte man auch den in § 4., II. angegebenen rationalen Ausdruck von $z^{(r)}$ benutzen können, und hätte nach Ausscheidung der Wurzel $z = 0$ die Gleichung erhalten:

$$\sum_{a=0}^{a=2^{r-1}} \left\{ (2^r)_{2a} - (2^r)_{2a+1} \right\} z^{2a} = 0,$$

und nach Division mit $1 - z^2$:

$$\sum_{a=0}^{a=2^{r-1}-1} (2^r - 1)_{2a+1} z^{2a} = \frac{\sin\{(2^r-1)\operatorname{arctg} iz\}}{iz\{\cos\operatorname{arctg} iz\}^{2^r-1}} = 0.$$

Lässt man die Gleichung (43) zum Beispiel bei der Annahme $h = 0$ für jeden beliebigen reellen Werth von r als Definition von $z^{(r)}$ bestehen, und r von $-\infty$ bis $+\infty$ alle Werthe durchlaufen, so bewegt sich das Argument $z^{(r)}$ durch die aufeinanderfolgenden Näherungswerthe hindurch auf einer stetigen Curve, deren Gleichung ähnlich wie in § 2. gebildet werden kann; man kann alsdann die Bahn zeichnen, auf welcher sich der Anfangswerth in den Wurzelpunkt ± 1 hineinstürzt. Variirt man noch h oder z, so erhält man ein eigenthümliches Gewebe oder Netz von Curven mit unzähligen Maschen, dessen Eigenschaften wohl näher untersucht zu werden verdienten.

Wie nun die Discussion der beiden Eingangs dieses Paragraphen erwähnten Algorithmen für die Gleichung $z^2 - 1 = 0$ erledigt ist, so ist sie es zufolge des § 13. meines vorausgehenden Aufsatzes für jede quadratische Gleichung. Da die Formel (43) für $r = -1$ auch die inverse Function von $F(z)$ liefert, welche eine Quadratwurzel involvirt, so giebt es auch gewisse irrationale Functionen, deren Iterationen sich nach dem Bisherigen ohne Schwierigkeit ermitteln lassen; desgleichen die Ergebnisse einer r maligen Anwendung der sechs in § 14. des gedachten Aufsatzes angegebenen combinirten Algorithmen.

Schliesslich erwähne ich noch, dass man für eine gegebene Function $F(z)$ auch leicht diejenige Gleichung $f(z) = 0$ aufsuchen kann, welche durch den Algorithmus $z' = F(z)$ aufgelöst wird.

Soll nämlich dieser Algorithmus der Newton'sche sein, so muss:

$$z - \frac{f(z)}{f^{(1)}(z)} = z - \frac{1}{\partial_z \log f(z)} = F(z) \text{ sein, woraus: } f(z) = e^{\int \frac{dz}{z - F(z)}}$$

hervorgeht. Soll er hingegen von der Natur des zweiten zu Anfang dieses Paragraphen erwähnten Algorithmus sein, so ist:

$$z - \frac{f(z) f^{(1)}(z)}{f^{(1)}(z)^2 - f(z) f^{(2)}(z)} = z - \frac{1}{\partial_z \log \frac{1}{\partial_z \log f(z)}} = F(z),$$

woraus sich durch Integration ergiebt:

$$f(z) = c \int^{\cdot} dz\, c^{-\int^{\cdot} \frac{dz}{z - F(z)}}.$$

Nimmt man zum Beispiel für $F(z)$ die linear gebrochene Function und führt die Quadraturen aus, so entsteht jedesmal eine Gleichung $f(z) = 0$, welche da $F^{\infty}(z)$ nach § 2. keinen von z unabhängigen Grenzwerth hat, auch keine Wurzel von der in jenem Aufsatze betrachteten Art besitzen kann.

Pforzheim, im Juni 1869.

Addition au mémoire sur les séries de points correspondants sur deux courbes (p. 150 de ce volume).

Par H. G. Zeuthen à Copenhague.

Monsieur Clebsch, ayant donné beaucoup de beaux exemples de la représentation d'une surface sur un plan où chaque point représente un seul point de la surface et réciproquement, vient de faire usage aussi de représentations de surfaces sur *un plan double ou multiple*, c'est à dire sur un plan où chaque point représente deux ou plusieurs points de la surface, pendant que chaque point de la surface ne donne qu'un seul point du plan. Seulement à certains points distincts du plan et de la surface correspondent tous les points d'une courbe. On appelle ces points singuliers *les points fondamentaux*. Dans le plan de représentation se trouve une courbe remarquable, *la courbe de liaison* (Uebergangscurve), dont chaque point représente deux points consécutifs de la surface (ou un nombre de points dont deux sont consécutifs).

Notre formule (2) peut servir à déterminer le genre p_1 de la courbe qui sur la surface correspond à une courbe donnée du plan de représentation. Alors y_1 est le nombre des intersections de cette dernière courbe avec la courbe de liaison, à l'exception de celles qui ont lieu aux points fondamentaux du plan; car à celles-ci ne correspondent pas en général des intersections des courbes homologues de la surface. y_1 est donc connu lorsque la courbe du plan est donnée. En désignant par μ la multiplicité du plan et par p le genre de la courbe donnée, et en substituant

$$x_1 = \mu, \quad x_2 = 1, \quad y_2 = 0, \quad p_2 = p,$$

on trouve

$$y_1 = 2(p_1 - 1) - 2\mu(p - 1),$$

d'où

$$p_1 = \frac{y_1}{2} + \mu \cdot p - (\mu - 1).$$

Cette formule montre que y_1 est toujours un nombre pair. Comme la courbe du plan dont on cherche l'homologue peut être une droite

qui ne passe par aucun point fondamental, ou qui ne passe que par un seul de ces points, il faut que l'ordre de la courbe de liaison et le nombre de fois qu'elle passe par chaque point fondamental soient divisibles par *deux*. M. Clebsch fait aussi cette remarque pour l'ordre de cette courbe singulière.*)

Dans le cas dont traite specialement M. Clebsch dans son mémoire sur une *classe de surfaces du 5me ordre* **), on a

$$y_1 = 6m - 4\alpha - 2\beta,$$

où m, α et β ont les mêmes significations qu'à la page 25 du mémoire cité. La substitution de cette valeur et de $\mu = 2$ donne

$$p_1 = 3m - 2\alpha - \beta + 2p - 1.$$

*) Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1870, p. 254.
**) Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften. 15. Bd.

Copenhague, Septb. 1870.

Revision einiger allgemeinen Sätze aus der Theorie des Logarithmischen Potentials.

Von Carl Neumann in Leipzig.

So wichtig und fruchtbar die von Green und Gauss in der Theorie des Newton'schen Potentials aufgestellten allgemeinen Sätze auch sein mögen, so bedarf es doch für manche Untersuchungen einer Revision dieser Sätze, theils um ihnen eine *strengere* Begründung und Fassung zu geben, theils auch um sie nach einigen Seiten hin zu *erweitern*. Gleiches gilt von denjenigen Sätzen, welche (jenen nachgebildet) die Theorie des Logarithmischen Potentials zu ihrem Gegenstand haben. Und um mit dem Einfacheren zu beginnen, sollen hier vorläufig nur diese letztern Sätze in Betracht gezogen werden.

Es mögen zunächst einige einfache Bemerkungen Platz finden. Die *ganze unendliche Ebene* $\mathfrak{Z}$ wird offenbar als eine Fläche zu bezeichnen sein, welche *keine* Randcurven hat, nämlich nirgends begrenzt ist. Werden in dieser Fläche $\mathfrak{Z}$ zwei von einander getrennt liegende Kreisflächen $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ construirt, so wird die nach Absonderung von $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ noch übrig bleibende Fläche $(\mathfrak{Z} - \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2)$ ebenfalls eine *unendliche* Fläche sein, aber eine Fläche, welche *zwei* Randcurven hat. Wird ferner auf der Fläche $(\mathfrak{Z} - \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2)$ ein Quadrat construirt von solcher Lage und Grösse, dass jene beiden Randcurven innerhalb des Quadrates sich befinden, und denkt man sich sodann von der Fläche $(\mathfrak{Z} - \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2)$ denjenigen Theil $\mathfrak{B}$ abgesondert, welcher ausserhalb des Quadrates liegt, so wird die übrig bleibende Fläche $(\mathfrak{Z} - \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2 - \mathfrak{B})$ eine *endliche* Fläche sein, und versehen sein mit *drei* Randcurven.

Zu bemerken ist, dass bei den hier construirten Flächen sämmtliche *Randcurven* im *Endlichen* liegen. Auf derartige Flächen aber werden wir bei den nachfolgenden Untersuchungen uns beschränken, und dieselben bezeichnen mit $\mathfrak{T}$. Es soll nämlich unter $\mathfrak{T}$ eine in der Ebene abgegrenzte (einblättrige) Fläche verstanden werden, deren Rand aus beliebig vielen und beliebig gestalteten Curven besteht, einerlei ob die Fläche endlich oder unendlich ist; *nur soll beständig*

vorausgesetzt werden, dass sämmtliche Randpunkte der Fläche im Endlichen liegen.

Durch eine in der Ebene gezogene Kreislinie ϖ zerfällt die ganze unendliche Ebene $\mathfrak{Z}$ in zwei Flächen, von denen jede nur *eine* Randcurve hat, nämlich nur von ϖ begrenzt ist. Die eine dieser beiden Flächen ist eine *Kreisfläche*, die andere mag genannt werden eine *Kreisergänzungsfläche*; und zwar mag diese letztere, wenn m der Mittelpunkt und r der Radius von ϖ ist, bezeichnet werden als eine *um m mit dem Radius r* construirte Kreisergänzungsfläche. Ist $r < R$ und sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{A}$ zwei mit den Radien r, R um m beschriebene Kreisflächen, andererseits $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{B}$ zwei mit denselben Radien um m construirte Kreisergänzungsflächen, so wird offenbar $\mathfrak{a}$ vollständig innerhalb $\mathfrak{A}$ liegen; umgekehrt aber verhält es sich bei den Flächen $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{B}$, denn die dem grösseren Radius R entsprechende Fläche $\mathfrak{B}$ wird sich befinden vollständig innerhalb der dem kleineren Radius r entsprechenden Fläche $\mathfrak{b}$. *Von zwei gegebenen Flächen soll nämlich gesagt werden, die eine befinde sich vollständig innerhalb der andern, sobald sich darthun lässt, dass jedweder Punkt der ersten gelegen ist innerhalb der zweiten.*

Ist irgend eine *unendliche* Fläche $\mathfrak{T}$ gegeben [wie z. B. die vorhin angeführte Fläche $(\mathfrak{Z} - \mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}_2)$], so kann, weil zufolge der gemachten Voraussetzung alle Randcurven von $\mathfrak{T}$ im Endlichen liegen, um einen in der Ebene beliebig gegebenen Punkt m jederzeit eine Kreislinie ϖ beschrieben werden von so grossem Radius, dass sämmtliche Randcurven von $\mathfrak{T}$ innerhalb der durch ϖ bestimmten Kreisfläche liegen; solches ausgeführt, wird alsdann die durch ϖ bestimmte Kreisergänzungsfläche vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ sich befinden. *Wie also eine gegebene unendliche Fläche $\mathfrak{T}$ auch beschaffen sein mag, immer wird sich um einen in der Ebene beliebig gegebenen Punkt m eine Kreisergänzungsfläche construiren lassen von so grossem Radius, dass sie vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt.*

In Betreff des hier gebrauchten Wortes *innerhalb* bedarf es übrigens noch einer genaueren Festsetzung. — Bewegt sich ein Punkt auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ in solcher Weise, dass er vom Rande derselben stets durch irgend welchen (wenn auch beliebig kleinen) Zwischenraum getrennt ist, so mag er bezeichnet werden als ein beständig *innerhalb* $\mathfrak{T}$ bleibender Punkt. Ist andererseits die Bewegung des Punktes von solcher Beschaffenheit, dass der genannte Zwischenraum Null werden kann, dass aber der Punkt den Rand nirgends überschreiten darf, so mag derselbe bezeichnet werden als ein *auf* der Fläche, oder (in schärferer Betonung) als ein *in Erstreckung* der Fläche bleibender Punkt. — Sämmtliche *auf* oder *in Erstreckung* einer gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ vorhandenen Punkte zerfallen somit in zwei strenge

zu sondernde Kategorien, die eine bestehend aus den Punkten *innerhalb* $\mathfrak{T}$, die andere bestehend aus den Punkten am *Rande* von $\mathfrak{T}$.

Eine von den rechtwinkligen Coordinaten x, y abhängende Function $\Phi(x, y)$ wird daher als stetig *auf* oder *in Erstreckung* einer gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ nur dann bezeichnet werden dürfen, wenn nachgewiesen ist erstens, dass sie stetig ist in jedem Punkte *innerhalb* $\mathfrak{T}$, und zweitens, dass sie stetig ist in jedem Punkte am *Rande* von $\mathfrak{T}$. — Für die vorliegenden Betrachtungen scheint übrigens der gewöhnliche Begriff der Stetigkeit nicht ausreichend zu sein. Wie dem auch sei, jedenfalls wird in den hier zu erörternden Sätzen eine vollständige Strenge erreicht werden durch Einführung eines etwas engeren, von Heine angegebenen Begriffes, welcher — nach Heine's Vorgang — als der Begriff *gleichmässiger Stetigkeit* zu bezeichnen, und in folgender Weise zu definiren ist.

Sind p, q zwei auf der gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ bewegliche Punkte, welche mit einander verbunden sind durch einen Faden von der Länge ϱ, deren Entfernung von einander also beständig $\leq \varrho$ bleiben muss, und sind Φ_p, Φ_q die in diesen Punkten vorhandenen Werthe der Function, so wird im Allgemeinen die Differenz zwischen Φ_p und Φ_q um so kleiner sein, je kleiner ϱ genommen wird. Kann nun, mit Bezug auf ein gegebenes ε, wie klein dasselbe auch sein mag, jederzeit durch gehörige Verkleinerung der Fadenlänge ϱ dafür gesorgt werden, dass die genannte Differenz, während einer beliebigen in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{T}$ vor sich gehenden Bewegung des Punktpaares p, q, beständig *kleiner* bleibt als jenes ε, so soll die Function Φ bezeichnet werden als *gleichmässig stetig* in Erstreckung der Fläche $\mathfrak{T}$. In gewissen besonderen Fällen ist hierbei noch eine Festsetzung hinzuzufügen, darin bestehend, dass bei der gedachten Bewegung der Faden ϱ beständig *auf* der Fläche bleiben soll, dass er also den Rand der Fläche niemals überschreiten darf.

§ 1.

Die charakteristischen Bedingungen (Π).

Die in der Theorie des Logarithmischen Potentials auftretenden Functionen sind bekanntlich gewissen charakteristischen Bedingungen unterworfen, welche theils ihre Eindeutigkeit und Stetigkeit, theils die Erfüllung einer gewissen Differentialgleichung betreffen. Um nun die hier zur Sprache kommenden Sätze mit voller Strenge deduciren und formuliren zu können, mögen jene Bedingungen — wir bezeichnen sie mit (Π, 1) und (Π, 2) — hingestellt werden in folgender Form.

(Π, 1) ... *Es wird verlangt, die Function Φ solle in ganzer Erstreckung der gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ eindeutig und gleichmässig*

stetig sein. Ueberdies wird, falls die Fläche $\mathfrak{T}$ *unendlich ist, gleichzeitig noch verlangt, der Werth von* Φ *solle für sämmtliche Punkte, die ins Unendliche sich entfernen, convergiren gegen irgend eine bestimmt angebbare Constante* Γ.

Erläuterung. Um die genannte Convergenzbedingung in strenger Form vor Augen zu haben, denke man sich um irgend welchen festen Punkt m' mit dem Radius r' eine Kreisergänzungsfläche beschrieben, und die auf dieser Fläche befindlichen Werthe von Φ bezeichnet mit Φ'; so dass also jede Variation von r' eine Aenderung in der Bedeutung von Φ' nach sich zieht. Jene Convergenzbedingung lautet alsdann so: *Es soll eine der Function* Φ *zugehörige Constante* Γ *existiren von solcher Beschaffenheit, dass die Werthe der* Φ' *durch Vergrösserung von* r' *beliebig nahe an* Γ *herangedrückt werden können; mit Bezug auf ein blindlings gegebenes* ε *soll also* r' *jedesmal soweit vergrössert werden können, dass sämmtliche* Φ' *der Relation*

$$\Gamma - \varepsilon < \Phi' < \Gamma + \varepsilon$$

Genüge leisten.

Bemerkung. Es handele sich um eine beliebig gegebene *unendliche* Fläche $\mathfrak{T}$, und um irgend eine auf $\mathfrak{T}$ gegebene Function Φ; und es sei — mag angenommen werden — jene Convergenzbedingung als wirklich erfüllt nachgewiesen mit Bezug auf einen bestimmten festen Mittelpunkt m'; die dabei zu Tage getretene Convergenzconstante heisse Γ. Um m' wird alsdann eine Kreisergänzungsfläche (r') construirbar sein von solcher Ferne, dass alle Φ' um weniger als ein blindlings gegebenes ε von Γ abweichen.

Sei nun m'' irgend ein anderer in der Ebene festgesetzter Mittelpunkt. Wo dieser Punkt m'' auch gelegen sein mag, immer wird offenbar um denselben eine Kreisergänzungsfläche (r'') construirbar sein von solcher Ferne, dass sie *vollständig innerhalb* jener vorhin construirten Kreisergänzungsfläche (r') sich befindet, mithin die auf ihr vorhandenen Φ'' nichts anderes sind als ein Theil der Φ'. Ebenso wie die Φ' werden also auch die Φ'' um weniger als ε differiren von jener Constanten Γ.

Die in Rede stehende Convergenzbedingung wird also, falls sie erfüllt ist mit Bezug auf irgend einen festen Mittelpunkt m', eo ipso auch erfüllt sein mit Bezug auf jeden andern festen Mittelpunkt m''. Auch ergibt sich aus dieser Betrachtung, dass die Convergenzconstante, wenn sie mit Bezug auf den einen Mittelpunkt $= \Gamma$ ist, mit Bezug auf den anderen ebenfalls $= \Gamma$ sein wird. Kann also nachgewiesen werden, dass eine Function Φ mit Bezug auf irgend einen bestimmten Mittelpunkt m' der Convergenzbedingung Genüge leistet, so wird die dabei zu Tage tretende Convergenzconstante Γ von der Wahl dieses

Mittelpunktes unabhängig sein, mithin einen Werth besitzen, *der lediglich bedingt ist durch die Beschaffenheit der Function* Φ.

(Π, 2) ... *Es wird verlangt, dass die Ableitungen von* Φ *eindeutig und gleichmässig stetig sind in Erstreckung eines jeden Gebietes, welches vollständig innerhalb* $\mathfrak{T}$ *liegt; gleichzeitig wird verlangt, dass in Erstreckung eines jeden solchen Gebietes der Ausdruck* $\Delta\Phi$ *gleich Null ist.*

Erläuterung. Unter den Ableitungen von Φ sind dabei sämmtliche Ausdrücke von der Form

$$\frac{\partial^{p+q}\Phi}{\partial x^p \partial y^q}, \quad (p+q=1, 2),$$

zu verstehen, wo x, y die rechtwinkligen Coordinaten vorstellen. Andererseits soll

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}$$

die Formel sein, durch welche $\Delta\Phi$ definirt ist.

Es soll nun eine Reihe von Sätzen entwickelt werden, welche gültig sind für solche Functionen Φ, die den hier angegebenen Bedingungen (Π) d. i. den Bedingungen (Π, 1) und (Π, 2) Genüge leisten.

§ 2.

Die Sätze des arithmetischen Mittels.

Es sei Φ eine Function, welche auf einer *beliebig* gegebenen (also endlichen oder unendlichen) Fläche $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π) erfüllt. Ferner sei $\mathfrak{E}$ irgend eine *endliche* Fläche, welche völlig *innerhalb* $\mathfrak{T}$ liegt, d. h. deren sämmtliche Punkte *innerhalb* $\mathfrak{T}$ sich befinden. Bezeichnet man das Randelement von $\mathfrak{E}$ mit $d\sigma$, die auf $d\sigma$ errichtete Normale mit N, und den in $d\sigma$ vorhandenen Werth von Φ mit Φ_σ, so gelangt man alsdann in bekannter Weise und (weil $\mathfrak{E}$ völlig *innerhalb* $\mathfrak{T}$ vorausgesetzt ist) mit voller Strenge zu der Formel:

$$(1) \qquad \int_{\mathfrak{E}} \frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial N}\, d\sigma = 0,$$

die Integration hinerstreckt über den ganzen Rand von $\mathfrak{E}$. Versteht man ferner unter m irgend einen festen Punkt, der in der Ebene beliebig gewählt sein kann, jedoch *ausserhalb* $\mathfrak{E}$ liegen soll, und unter $L_{m\sigma}$ den natürlichen Logarithmus der Entfernung des Elementes $d\sigma$ von diesem Punkte, so gelangt man mit gleicher Leichtigkeit und mit gleicher Strenge zu folgender zweiten Formel:

$$(2) \qquad \int_{\mathfrak{E}} \left(\Phi_\sigma \frac{\partial L_{m\sigma}}{\partial N} - L_{m\sigma} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial N} \right) d\sigma = 0,$$

die Integration wiederum ausgedehnt über den Rand von $\mathfrak{E}$. Die Fläche $\mathfrak{E}$ kann beliebig viele Randcurven besitzen. Für die Normale N kann in den Formeln (1) und (2), nach Belieben, entweder *durchweg die innere* (in $\mathfrak{E}$ hineinlaufende), oder *durchweg die äussere* Normale gewählt werden.

An Stelle der endlichen Fläche $\mathfrak{E}$ mag nun genommen werden eine von zwei concentrischen Kreislinien begrenzte Ringfläche. Die Radien der beiden Kreislinien seien r, r', und demgemäss mögen diese Linien selber bezeichnet werden mit (r), (r'). Gleichzeitig mag dabei für m das Centrum der beiden Kreislinien genommen werden, was erlaubt ist, weil dieses Centrum in der That *ausserhalb* der Ringfläche sich befindet. Die Formeln (1), (2) nehmen alsdann folgende Gestalt an:

$$(3) \qquad \int_{(r)} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} d\sigma = \int_{(r')} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} d\sigma,$$

$$(4) \qquad \int_{(r)} \left(\Phi_\sigma \frac{\partial L_{m\sigma}}{\partial \nu} - L_{m\sigma} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} \right) d\sigma = \int_{(r')} \left(\Phi_\sigma \frac{\partial L_{m\sigma}}{\partial \nu} - L_{m\sigma} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} \right) d\sigma,$$

die Integrationen links hinerstreckt über den Rand (r), die rechts hinerstreckt über den Rand (r'). Dabei repräsentiren die ν die auf den *convexen* Seiten von (r), (r') errichteten Normalen; es sind also die ν von centrifugaler Richtung, falls man m als Centrum betrachtet, folglich von anderer Art als die früheren Normalen N. Die Formel (4) kann, weil $L_{m\sigma}$ für den einen Rand $= \log r$, für den andern $= \log r'$ ist, auch so dargestellt werden:

$$(5) \qquad \int_{(r)} \Phi_\sigma \frac{d\sigma}{r} - \log r \int_{(r)} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} d\sigma = \int_{(r')} \Phi_\sigma \frac{d\sigma}{r'} - \log r' \int_{(r')} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} d\sigma,$$

folglich auch so:

$$(6) \qquad 2\pi \mathsf{M} - \log r \int_{(r)} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} d\sigma = 2\pi \mathsf{M}' - \log r' \int_{(r')} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} d\sigma,$$

wo nämlich M das arithmetische Mittel aller derjenigen Werthe bezeichnet, welche Φ besitzt auf der Kreislinie (r), ebenso M' das arithmetische Mittel derjenigen Werthe, welche Φ auf (r') hat. Aus (3) und (6) folgt endlich:

$$(7) \qquad \begin{gathered} 2\pi (\mathsf{M} - \mathsf{M}') = \mathsf{K} (\log r - \log r'), \\ \text{wo} \quad \mathsf{K} = \int_{(r)} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} d\sigma. \end{gathered}$$

Diese Formeln (3), (4), (5), (6), (7) werden also strenge gültig sein für jeden beliebigen von zwei concentrischen Kreislinien (r), (r') be-

grenzten Flächenring, falls nur sämmtliche Punkte dieser Ringfläche sich befinden *innerhalb* der gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$; und sie werden also ihre Gültigkeit behalten, sobald man, ohne jene Bedingung zu verletzen, die Ringfläche durch eine Aenderung der Radien r, r' beliebig anwachsen oder abnehmen lässt.

Eine solche Operation soll nun wirklich vorgenommen werden. Dabei mögen die beiden durch (r), (r') bestimmten Kreisflächen mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, andererseits die beiden durch (r), (r') sich bestimmenden Kreisergänzungsflächen mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ bezeichnet, und der Reihe nach zwei verschiedene Fälle in Betracht gezogen werden.

Erster Fall. Es sei $r' < r$, und es werde vorausgesetzt, dass nicht nur die Ringfläche $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$, sondern auch die Kreisflächen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ sich völlig innerhalb $\mathfrak{T}$ befinden. Alsdann wird die Formel (7) gültig bleiben, wenn man r' *unendlich klein* werden lässt, während r, folglich auch M und das über die Kreislinie (r) ausgedehnte Integral K ungeändert erhalten werden. Hierbei wird offenbar das auf der linken Seite von (7) befindliche M' gegen einen endlichen Werth, nämlich gegen den in m vorhandenen Werth Φ_m convergiren, das auf der rechten Seite von (7) befindliche $\log r'$ aber gegen $-\infty$ convergiren. Somit folgt aus (7), dass

$$\mathsf{K} = 0 \tag{8_a}$$

sein muss. Und solches erkannt, reducirt sich alsdann die Formel (7) auf

$$\mathsf{M} - \mathsf{M}' = 0 . \tag{8_b}$$

Lässt man jetzt in dieser Formel von Neuem den Radius r' unendlich klein werden, so ergibt sich

$$\mathsf{M} - \Phi_m = 0 . \tag{8_c}$$

Zweiter Fall. Es sei $r' > r$, und es werde vorausgesetzt, dass nicht nur die Ringfläche $\mathfrak{B} - \mathfrak{B}'$, sondern auch die Kreisergänzungsflächen $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$ völlig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegen; was selbstverständlich nur dann möglich ist, wenn $\mathfrak{T}$ eine *unendliche* Fläche repräsentirt. Alsdann wird die Formel (7) gültig bleiben, wenn man, während r, mithin auch M und K constant erhalten werden, den Radius r' *ins Unendliche anwachsen* lässt. Hierbei wird das auf der linken Seite von (7) befindliche M' [wie aus den von Φ erfüllten Bedingungen (Π) hervorgeht] gegen die der Function Φ zugehörige endliche Constante Γ convergiren, das auf der rechten Seite von (7) befindliche $\log r'$ aber gegen $+\infty$ convergiren. Somit folgt aus (7):

$$\mathsf{K} = 0 . \tag{9_a}$$

Solches erkannt, nimmt die Formel (7) die einfachere Gestalt an:

$$\mathsf{M} - \mathsf{M}' = 0 . \tag{9_b}$$

Lässt man jetzt in dieser Formel von Neuem den Radius r' ins Unendliche anwachsen, so ergiebt sich:

$$(9_c) \qquad \mathsf{M} - \Gamma = 0 .$$

Durch die Formeln (8_a) und (9_a) gelangen wir zu folgendem Ergebniss.

I. Satz. Es sei eine Function Φ *gegeben, welche auf irgend einer Fläche* $\mathfrak{T}$ *die Bedingungen* (Π) *erfüllt. Ferner repräsentire*

$$\mathsf{K} = \int \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} d\sigma$$

ein über irgend eine Kreislinie ausgedehntes Integral, wo unter $d\sigma$ *das Element dieser Kreislinie, unter* ν *die auf* $d\sigma$ *errichtete Normale, und unter* Φ_σ *der in* $d\sigma$ *vorhandene Werth von* Φ *verstanden werden soll.*

Alsdann wird K *gleich Null sein, falls die durch jene Kreislinie bestimmte Kreisfläche vollständig innerhalb* $\mathfrak{T}$ *liegt, ebenso aber auch dann gleich Null sein, wenn die durch die Kreislinie bestimmte Kreisergänzungsfläche vollständig innerhalb* $\mathfrak{T}$ *sich befindet.*

Mit Leichtigkeit kann dieser Satz ausgedehnt werden auf den Fall, dass die betrachtete geschlossene Curve keine Kreislinie, sondern von beliebiger Gestalt ist. — Andererseits ergiebt sich aus den Formeln $(8_{b,\,c})$ und $(9_{b,\,c})$ folgendes Resultat.

II. Satz. Es sei eine Function Φ *gegeben, welche auf irgend einer Fläche* $\mathfrak{T}$ *die Bedingungen* (Π) *erfüllt.*

Construirt man irgend ein System concentrischer Kreisflächen, jede vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ *gelegen, und denkt man sich ferner für jede dieser Flächen das arithmetische Mittel gebildet von den auf ihrem Rande vorhandenen Werthen* Φ*, so werden alle diese arithmetischen Mittel von gleicher Grösse, und zwar ebenso gross sein, wie der in dem gemeinschaftlichen Centrum befindliche Werth von* Φ*.*

Construirt man andrerseits irgend ein System concentrischer Kreisergänzungsflächen, jede vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ *gelegen,* [*selbstverständlich wird solches nur möglich sein, wenn* $\mathfrak{T}$ *unendlich ist*]*, und denkt man sich für jede dieser Flächen das arithmetische Mittel gebildet von den auf ihrem Rande vorhandenen Werthen* Φ*, so werden wiederum alle diese arithmetischen Mittel von gleicher Grösse, und zwar ebenso gross sein, wie die der Function* Φ *zugehörige Convergenzconstante* Γ*.*

Wir halten fest an den hier gemachten Voraussetzungen und Bezeichnungen. Es sei m irgend ein Punkt innerhalb $\mathfrak{T}$, ferner $\mathfrak{A}$ irgend eine um m beschriebene, ebenfalls völlig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegende Kreisfläche. Die Peripherie von $\mathfrak{A}$ werde mit σ, und irgend ein auf σ gegebener Punkt mit x bezeichnet. Es werde angenommen, dass der in x vorhandene Werth Φ_x um eine angebbare positive Zahl δ grösser ist als der in m vorhandene Werth Φ_m:

$$(10) \qquad \Phi_x = \Phi_m + \delta .$$

Es sollen die Consequenzen aufgesucht werden, zu welchen diese Annahme hinleitet.

Zufolge des letztgefundenen Satzes ist das arithmetische Mittel aller auf der Kreislinie σ vorhandenen Werthe Φ identisch mit Φ_m. D. h. es findet die Formel statt:

$$\frac{\int \Phi d\sigma}{\sigma} = \Phi_m, \tag{11}$$

wo σ die Länge der genannten Kreislinie, ferner $d\sigma$ das Element derselben vorstellt, und die Integration ausgedehnt zu denken ist über die ganze Kreislinie. Diese Formel kann auch so dargestellt werden:

$$\int \Phi d\sigma = \Phi_m \sigma, \tag{12}$$

oder, wenn man die Kreislinie σ in irgend zwei Bogen σ', σ'', und das Integral in die beiden entsprechenden Theile zerlegt, auch so:

$$\int \Phi' d\sigma' + \int \Phi'' d\sigma'' = \Phi_m \sigma. \tag{13}$$

Der Bogen σ' mag so gewählt werden, dass der auf σ gegebene Punkt x gerade in der Mitte dieses Bogens sich befindet; und gleichzeitig mag der Bogen so klein genommen werden, dass *alle* auf σ' befindlichen Werthe Φ' von dem in x vorhandenen Werth Φ_x um weniger als $\frac{\delta}{2}$ abweichen, dass mithin *alle* jene Werthe Φ' der Relation entsprechen:

$$\Phi_x - \frac{\delta}{2} < \Phi' < \Phi_x + \frac{\delta}{2}, \tag{14}$$

wo δ die gegebene [bei (10) genannte] positive Zahl vorstellen soll. Dass sich die Länge des Bogens σ' in dieser Weise wirklich bestimmen lässt, unterliegt keinem Zweifel, weil Φ auf $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π) erfüllt, folglich auf $\mathfrak{T}$, und mithin auch auf σ gleichmässig stetig ist. Substituirt man in (14) für Φ_x den Werth (10), so folgt:

$$(\Phi_m + \delta) - \frac{\delta}{2} < \Phi',$$

d. i.

$$\Phi_m + \frac{\delta}{2} < \Phi'. \tag{15}$$

Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus der Formel (13) sofort:

$$\left(\Phi_m + \tfrac{\delta}{2}\right) \int d\sigma' + \int \Phi'' d\sigma'' < \Phi_m \sigma,$$

oder weil $\int d\sigma' = \sigma'$, und $\sigma = \sigma' + \sigma''$ ist:

$$\left(\Phi_m + \frac{\delta}{2}\right) \sigma' + \int \Phi'' d\sigma'' < \Phi_m (\sigma' + \sigma''),$$

d. i.

$$\int \Phi'' d\sigma'' < \Phi_m \sigma'' - \frac{\delta}{2} \sigma'. \tag{16}$$

Unter allen auf dem Bogen σ'' vorhandenen Werthen Φ'' muss, weil die Function Φ auf $\mathfrak{T}$, folglich auch auf σ gleichmässig stetig ist,

jederzeit einer vorhanden sein, welcher unter all' diesen Werthen Φ'' der *kleinste* ist. Bezeichnen wir denjenigen Punkt des Bogens σ'', in welchem dieser kleinste Werth vorhanden ist, mit y, und den Werth selber mit Φ_y'' oder kürzer mit Φ_y, so findet für sämmtliche Φ'' die Relation statt:

$$\Phi_y \leqq \Phi''. \tag{17}$$

Hierdurch verwandelt sich die Formel (16) in:

$$\Phi_y \int d\sigma'' < \Phi_m \sigma'' - \frac{\delta}{2}\sigma', \tag{18}$$

oder, weil $\int d\sigma'' = \sigma''$ ist, in:

$$\Phi_y < \Phi_m - \frac{\delta}{2}\frac{\sigma'}{\sigma''}. \tag{19}$$

Da nun δ eine positive Zahl repräsentirt, andrerseits σ', σ'' ihrer Bedeutung nach ebenfalls positiv sind, so geht aus dieser Formel (19) hervor, dass Φ_y um eine angebbare positive Zahl, nämlich mindestens um die Zahl

$$\frac{\delta}{2}\frac{\sigma'}{\sigma''},$$

kleiner ist als Φ_m. Befindet sich also, wie wir angenommen haben, auf dem Rande der Kreisfläche $\mathfrak{A}$ ein Werth Φ_x, welcher um eine angebbare positive Zahl *grösser* ist als der im Mittelpunkt m vorhandene Werth Φ_m, so wird sich jederzeit auf jenem Rande auch ein Werth Φ_y vorfinden, welcher um eine angebbare positive Zahl *kleiner* ist als Φ_m. In genau derselben Weise lässt sich umgekehrt zeigen, dass wenn am Rande ein Werth Φ_x supponirt wird, der *kleiner* als Φ_m ist, auf jenem Rande nothwendig auch ein Werth Φ_y existiren muss, der *grösser* als Φ_m ist.

Zu einem analogen Resultat gelangt man, falls $\mathfrak{T}$ eine *unendliche* Fläche ist, durch Betrachtung einer Kreisergänzungsfläche. Denkt man sich nämlich um einen in der Ebene beliebig angenommenen Punkt m eine Kreisergänzungsfläche $\mathfrak{B}$ mit so grossem Radius construirt, dass sie vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt, so wird, nach dem II. Satz, das arithmetische Mittel aller auf dem Rande σ der Fläche $\mathfrak{B}$ vorhandenen Werthe Φ identisch sein mit der der Function Φ zugehörigen Convergenzconstanten Γ. Es wird also die Formel stattfinden:

$$\frac{\int \Phi d\sigma}{\sigma} = \Gamma,$$

d. i. die Formel:

$$\int \Phi d\sigma = \Gamma\sigma.$$

Mit Hülfe dieser Formel aber wird sich, wie nun leicht zu übersehen ist, nachweisen lassen, dass wenn auf σ ein Werth Φ_x vorhanden sein sollte, der um eine angebbare Zahl *grösser* als Γ ist, nothwendiger Weise auf σ gleichzeitig auch ein Werth Φ_y existiren muss, der um

eine angebbare Zahl *kleiner* als Γ ist. Und ebenso wird sich der umgekehrte Satz darthun lassen. Wir gelangen somit zu folgendem Resultat.

III. Satz. Genügt die Function Φ auf einer Fläche $\mathfrak{T}$ den Bedingungen (Π), *und existirt am Rande irgend einer völlig innerhalb $\mathfrak{T}$ gelegenen Kreisfläche ein Werth von Φ, welcher um eine angebbare Zahl grösser ist als der im Mittelpunkt der Kreisfläche vorhandene Werth Φ_m, so wird jederzeit an jenem Rande auch ein gewisser anderer Werth von Φ sich vorfinden, der um eine angebbare Zahl kleiner ist als Φ_m; und umgekehrt.*

Denkt man sich ferner irgend eine Kreisergänzungsfläche construirt, welche vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt, [*was allerdings nur möglich sein wird, wenn die Fläche $\mathfrak{T}$ unendlich ist*], *und existirt am Rande dieser Kreisergänzungsfläche ein Werth von Φ, welcher um eine angebbare Zahl grösser ist als die der Function zugehörige Convergenzconstante Γ, so wird an jenem Rande jederzeit auch ein gewisser anderer Werth von Φ sich vorfinden, der um eine angebbare Zahl kleiner ist als Γ; und umgekehrt.*

§ 3.

Darstellung einer Function vom Character (Π) innerhalb einer Kreisfläche.

Die Function Φ erfülle auf einer beliebig gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π). Ferner sei $\mathfrak{A}$ eine beliebig gegebene Kreisfläche, welche vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt. Untersucht sollen werden diejenigen Werthe von Φ, welche sich befinden auf $\mathfrak{A}$.

Es sei i irgend ein Punkt *innerhalb* $\mathfrak{A}$. Um den in diesem Punkt vorhandenen Werth Φ_i näher zu untersuchen, beschreiben wir um i eine kleine Kreisfläche $\mathfrak{A}'$, welche sich vollständig innerhalb $\mathfrak{A}$ befindet, und bringen die allgemeine Formel (2) in Anwendung auf die Ringfläche $\mathfrak{A} - \mathfrak{A}'$, indem wir dabei statt des Punktes m den Punkt i nehmen. Wir erhalten alsdann eine mit (4) analoge Gleichung, welche so lautet:

$$(20) \qquad \int_{\mathfrak{A}} \left(\Phi_\sigma \frac{\partial L_{i\sigma}}{\partial \nu} - L_{i\sigma} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} \right) d\sigma = \int_{\mathfrak{A}'} \left(\Phi_\sigma \frac{\partial L_{i\sigma}}{\partial \nu} - L_{i\sigma} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} \right) d\sigma ,$$

wo unter den ν die auf den *convexen* Seiten der Kreislinien errichteten Normalen zu verstehen sind. Ist nun r' der Radius von $\mathfrak{A}'$, und M' das arithmetische Mittel aller Werthe, welche Φ am Rande von $\mathfrak{A}'$ besitzt, so kann die rechte Seite dieser Gleichung auch so dargestellt werden:

$$\int_{\mathfrak{A}'} \Phi_\sigma \frac{d\sigma}{r'} - \log r' \int_{\mathfrak{A}'} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} d\sigma ,$$

oder auch so:

$$2\pi M' - \log r' \int_{\mathfrak{A}'} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} d\sigma.$$

Das in diesem letzten Ausdrucke vorhandene Integral ist aber, zufolge des I. Satzes, gleich Null. Ausserdem ist, zufolge des II. Satzes, das arithmetische Mittel M' identisch mit dem in i vorhandenen Werth Φ_i. Somit ergiebt sich aus (20)

$$\int_{\mathfrak{A}} \left(\Phi_\sigma \frac{\partial L_{i\sigma}}{\partial \nu} - L_{i\sigma} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} \right) d\sigma = 2\pi \Phi_i . \tag{21}$$

Andrerseits ergiebt sich, wenn man die Formel (2) auf die Fläche $\mathfrak{A}$ in Anwendung bringt, und dabei für m irgend welchen ausserhalb $\mathfrak{A}$ befindlichen Punkt k nimmt:

$$\int_{\mathfrak{A}} \left(\Phi_\sigma \frac{\partial L_{k\sigma}}{\partial \nu} - L_{k\sigma} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} \right) d\sigma = 0 . \tag{22}$$

Durch Subtraction von (21) und (22) ergiebt sich:

$$2\pi \Phi_i = \int_{\mathfrak{A}} \Phi_\sigma \left(\frac{\partial L_{i\sigma}}{\partial \nu} - \frac{\partial L_{k\sigma}}{\partial \nu} \right) d\sigma - \int_{\mathfrak{A}} (L_{i\sigma} - L_{k\sigma}) \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} d\sigma . \tag{23}$$

Es sei nun k derjenige Punkt, welcher dem Punkte i *conjugirt* ist in Bezug auf den Rand von $\mathfrak{A}$. Alsdann ergiebt sich durch einfache geometrische Betrachtungen

$$L_{i\sigma} - L_{k\sigma} = D_i ,$$

wo D_i nur noch abhängig ist von der Lage des Punktes i, hingegen unabhängig ist von σ, d. i. von der Stelle des Elementes $d\sigma$. Somit kann das letzte Integral in der Gleichung (23) auch so dargestellt werden:

$$D_i \int_{\mathfrak{A}} \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial \nu} d\sigma .$$

Hieraus aber folgt, durch Anwendung der allgemeinen Formel (1), dass dieses Integral gleich *Null* ist. Somit geht die Gleichung (23) über in

$$2\pi \Phi_i = \int_{\mathfrak{A}} \Phi_\sigma \left(\frac{\partial L_{i\sigma}}{\partial \nu} - \frac{\partial L_{k\sigma}}{\partial \nu} \right) d\sigma . \tag{24}$$

Endlich lässt sich, mit Rücksicht auf die festgesetzte Lage von k, durch einfache geometrische Betrachtungen darthun, dass

$$\frac{\partial L_{i\sigma}}{\partial \nu} - \frac{\partial L_{k\sigma}}{\partial \nu} = 2 \frac{\partial L_{i\sigma}}{\partial \nu} - \frac{1}{r} \tag{25}$$

ist, wo r den Radius von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Somit folgt:

$$2\pi \Phi_i = 2 \int_{\mathfrak{A}} \Phi_\sigma \frac{\partial L_{i\sigma}}{\partial \nu} d\sigma - \frac{1}{r} \int_{\mathfrak{A}} \Phi_\sigma d\sigma . \tag{26}$$

Beachten wir, dass in dieser Gleichung der Werth des letzten Integrals eine Constante, nämlich von i unabhängig ist, so haben wir folgenden Satz.

IV. Satz. Eine Function Φ erfülle auf einer beliebig gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π)*; ferner sei $\mathfrak{A}$ irgend eine Kreisfläche, welche vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt.*

Alsdann werden sich sämmtliche Werthe, welche Φ innerhalb $\mathfrak{A}$ besitzt, darstellen lassen durch folgendes über den Rand von $\mathfrak{A}$ hinerstrecktes Integral:

$$\Phi_i = \frac{1}{\pi}\int_{\mathfrak{A}}\left(\Phi_\sigma \frac{\partial L_{i\sigma}}{\partial \nu} d\sigma\right) - \mathsf{M}. \tag{27}$$

Hier bezeichnet i jeden beliebigen Punkt innerhalb $\mathfrak{A}$, $d\sigma$ das Randelement von $\mathfrak{A}$, und ν die auf der convexen Seite von $d\sigma$ errichtete Normale. Ferner repräsentiren Φ_i und Φ_σ die Werthe von Φ in i und $d\sigma$, andererseits $L_{i\sigma}$ den natürlichen Logarithmus der zwischen i und $d\sigma$ vorhandenen Entfernung. Endlich ist unter M eine von i unabhängige Grösse zu verstehen, nämlich das arithmetische Mittel aller Werthe, welche Φ besitzt auf dem Rande von $\mathfrak{A}$. Hieraus ergiebt sich übrigens (zufolge des II. Satzes), dass M auch definirt werden kann als derjenige Werth, welchen Φ besitzt im Mittelpunkt der Kreisfläche $\mathfrak{A}$.

Der hier auftretende Logarithmus $L_{i\sigma}$ lässt sich bekanntlich, wenn ϱ, ω und ϱ_σ, ω_σ die Polarcoordinaten von i und von $d\sigma$ in Bezug auf den Mittelpunkt der Kreisfläche $\mathfrak{A}$ sind, darstellen durch folgende Reihe:

$$L_{i\sigma} = \log \varrho_\sigma - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{\varrho}{\varrho_\sigma}\right)^n \cos n(\omega - \omega_\sigma) \tag{28}$$

Hieraus folgt, weil die Richtung der eingeführten Normale ν zusammenfällt mit der Richtung des Radius ϱ_σ, sofort:

$$\frac{\partial L_{i\sigma}}{\partial \nu} = \frac{1}{\varrho_\sigma} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{\varrho_\sigma}\left(\frac{\varrho}{\varrho_\sigma}\right)^n \cos n(\omega - \omega_\sigma). \tag{29}$$

Die Restglieder dieser Reihen (28) und (29) sind leicht angebbar. Substituirt man in der Formel (27) für

$$\frac{\partial L_{i\sigma}}{\partial \nu}$$

den Werth (29), so erhält man Φ_i ausgedrückt durch eine unendliche Reihe, deren Restglied $R^{(n)}$ aus den schon genannten Restgliedern sofort abgeleitet werden kann. Nun lässt sich leicht nachweisen, dass dieses Restglied $R^{(n)}$, wie nahe der Punkt i dem Rande von $\mathfrak{A}$ auch liegen mag, durch Vergrösserung von n jederzeit kleiner gemacht werden kann als ein blindlings gegebenes ε, dass also jene für Φ_i resultirende Reihenentwicklung convergent ist, wie nahe der Punkt i

dem Rande von $\mathfrak{A}$ auch sein mag. Somit gelangen wir zu folgendem Satz.

V. Satz. Eine Function Φ erfülle auf einer beliebig gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π); ferner sei $\mathfrak{A}$ irgend eine völlig innerhalb $\mathfrak{T}$ gelegene Kreisfläche.

Alsdann werden sich sämmtliche Werthe, welche Φ innerhalb $\mathfrak{A}$ besitzt, darstellen lassen durch eine convergente Reihenentwicklung von folgender Form:

$$(30) \qquad \Phi_i = A^{(0)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A^{(n)} \varrho^n \cos n\omega + B^{(n)} \varrho^n \sin n\omega).$$

Hier bezeichnet i jeden beliebigen Punkt, der innerhalb $\mathfrak{A}$ liegt, und Φ_i den in i vorhandenen Werth von Φ. Ferner sind unter ϱ, ω die Polarcoordinaten von i in Bezug auf den Mittelpunkt von $\mathfrak{A}$, und unter den A, B irgend welche constante Coefficienten zu verstehen.

Von einer Function Φ mag nun zweierlei bekannt sein, erstens, dass sie auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π) erfüllt, und zweitens, dass sie auf irgend einem beliebig kleinen Flächentheil von $\mathfrak{T}$ constant, $= C$ ist. Dieser Flächentheil heisse $\mathfrak{U}$.

Um irgend einen innerhalb $\mathfrak{U}$ gelegenen Punkt m werde eine Kreisfläche $\mathfrak{A}$ beschrieben, welche theilweise über $\mathfrak{U}$ hinausragt, jedoch vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt. Die Werthe, welche Φ innerhalb $\mathfrak{A}$ besitzt, lassen sich alsdann, zufolge des eben gefundenen V. Satzes, darstellen durch eine convergente Entwicklung von der Form

$$(31) \qquad \Phi_i = A^{(0)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A^{(n)} \varrho^n \cos n\omega + B^{(n)} \varrho^n \sin n\omega).$$

Lassen wir nun vom Mittelpunkt der Kreisfläche $\mathfrak{A}$ in irgend welchem Azimut ω_0 eine Linie ϱ_0 ausgehen, von solcher Kleinheit, dass sie vollständig innerhalb $\mathfrak{U}$ liegt, so wird Φ_i auf ϱ_0, zufolge der gemachten Voraussetzung, *constant*, nämlich $= C$ sein. Demnach muss für alle auf ϱ_0 gelegenen Punkte die Gleichung stattfinden:

$$(32) \qquad C = A^{(0)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} (A^{(n)} \cos n\omega_0 + B^{(n)} \sin n\omega_0) \varrho^n .$$

D. h. diese Gleichung muss beständig in Gültigkeit bleiben, während ϱ von 0 bis ϱ_0 anwächst. Hieraus folgt nach einem bekannten Satz über die Potenzreihen, dass

$$(33_a) \qquad A^{(0)} = C,$$

und ferner für jedes n

$$(33_b) \qquad A^{(n)} \cos n\omega_0 + B^{(n)} \sin n\omega_0 = 0$$

sein muss. Derartige Formeln $(33_{a,\,b})$ ergeben sich aber auch mit Bezug auf jedes beliebige *andere* Azimut ω_0. Somit ergiebt sich, dass

$$(34_a) \qquad A^{(0)} = C,$$

und ferner für jedes n

$$A^{(n)} = 0, \tag{34_b}$$

$$B^{(n)} = 0 \tag{34_c}$$

sein mnss. Durch diese Relationen ($34_{a,\,b,\,c}$) verwandelt sich die für *alle* innerhalb $\mathfrak{A}$ befindlichen Punkte i gültige Formel (31) in

$$\Phi_i = C. \tag{35}$$

Somit ist dargethan, dass Φ den constanten Werth C besitzen muss in sämmtlichen Punkten, die *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegen.

Nunmehr werde um irgend einen innerhalb $\mathfrak{A}$ befindlichen Punkt m' eine Kreisfläche $\mathfrak{A}'$ beschrieben, welche über $\mathfrak{A}$ hinausreicht, jedoch vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt. In ähnlicher Weise lässt sich alsdann darthun, dass Φ auch für sämmtliche Punkte, die innerhalb $\mathfrak{A}'$ liegen, constant, nämlich $= C$ sein muss. U. s. w.

Vermittelst einer solchen Kette von Kreisen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, ... von denen jede vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt, und von denen jede ihren Mittelpunkt im Innern der vorhergehenden liegen hat, können wir nun offenbar von dem gegebenen Flächentheil $\mathfrak{U}$ aus vordringen bis zu *jedem beliebigen innerhalb* $\mathfrak{T}$ *gelegenen* Punkt i; mithin nachweisen, dass Φ in jedem solchen Punkt i den Werth C hat.

Es sei nun s ein Punkt am *Rande* von $\mathfrak{T}$. Da Φ die Bedingungen (Π) erfüllt, mithin gleichmässig stetig ist in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{T}$, so wird ein Punkt i *innerhalb* $\mathfrak{T}$ angebbar sein, welcher dem Punkte s so nahe liegt, dass die in i und s vorhandenen Werthe Φ_i und Φ_s um weniger von einander differiren, als ein blindlings gegebenes ε. Ist i in solcher Weise festgesetzt, so kann nun durch die vorhin exponirte Methode dargethan werden, dass $\Phi_i = C$ ist. Folglich findet zwischen C und Φ_s ein Unterschied statt, der kleiner ist als ε. Jenes ε war aber blindlings gegeben. Somit folgt, dass C und Φ_s einander *gleich* sind, dass also die Function Φ den Werth C nicht nur besitzt in sämmtlichen Punkten *innerhalb* $\mathfrak{T}$, sondern auch in sämmtlichen *Rand*punkten von $\mathfrak{T}$.

Wir gelangen daher zu folgendem (allerdings nicht neuem, aber bisher wohl noch nicht mit hinreichender Strenge bewiesenem) Satz.

VI. Satz. Ist von einer Function Φ *bekannt, dass sie auf einer beliebig gegebenen Fläche* $\mathfrak{T}$ *die Bedingungen* (Π) *erfüllt, und ferner bekannt, dass sie auf irgend einem Flächentheil von* $\mathfrak{T}$ *constant ist, so wird sie constant sein in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{T}$.

Bemerkung. Die vorhin zur Ableitung des IV. Satzes angewandte Methode findet sich ausführlicher entwickelt in meiner Schrift über den stationären Temperatur-Zustand einer Kugel, Halle, Verlag von Schmidt, 1861.

§ 4.

Relationen zwischen den Werthen im Innern und am Rande einer gegebenen Fläche bei einer Function vom Charakter (Π).

Es sei eine beliebige Fläche $\mathfrak{T}$ gegeben, und Φ eine Function, welche auf $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π) erfüllt. Ferner sei m irgend ein *innerhalb* $\mathfrak{T}$ gegebener Punkt.

Wir machen die *Hypothese*, Φ *besitze in* m *einen seiner Grösse nach unübertroffenen Werth* G, d. i. einen Werth G von solcher Beschaffenheit, dass unter sämmtlichen auf $\mathfrak{T}$ vorhandenen Werthen Φ keiner existirt, welcher grösser als G ist. Es sollen die Consequenzen aufgesucht werden, zu denen diese Hypothese hinleitet.

Da m innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt, so werden sich um m als Mittelpunkt zwei Kreisflächen beschreiben lassen, welche ebenfalls vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegen, mithin Gleiches auch gilt von der durch Subtraction dieser beiden Flächen entstehenden Ringfläche $\mathfrak{R}$. Was nun das Verhalten der Function Φ auf der Ringfläche $\mathfrak{R}$ betrifft, so sind verschiedene Möglichkeiten vorhanden.

Erster Fall. Φ ist auf $\mathfrak{R}$ überall *constant*, etwa $= C$. Das arithmetische Mittel derjenigen Werthe Φ, welche vorhanden sind auf einer mit $\mathfrak{R}$ concentrischen und innerhalb $\mathfrak{R}$ liegenden Kreislinie, wird alsdann, da alle diese Werthe $= C$ sind, ebenfalls $= C$ sein. Zufolge des II. Satzes muss aber das genannte arithmetische Mittel identisch sein mit dem in m vorhandenen Werthe von Φ, d. i. identisch sein mit G. Somit folgt $C = G$. Bei Eintritt des hier betrachteten ersten Falles wird also der constante Werth von Φ nothwendiger Weise $= G$ sein. — Nach Absonderung dieses Falles bleiben daher nur noch folgende zwei Fälle denkbar:

Zweiter Fall. Auf der Fläche $\mathfrak{R}$ ist ein Punkt vorhanden, in welchem Φ um eine angebbare Zahl *grösser* als G ist. Dieser Fall aber befindet sich in Widerspruch mit der über G gemachten Hypothese.

Dritter Fall. Auf $\mathfrak{R}$ ist ein Punkt vorhanden, in welchem Φ um eine angebbare Zahl *kleiner* als G ist. Alsdann muss (zufolge des III. Satzes) auf einer mit $\mathfrak{R}$ concentrischen und durch diesen Punkt gehenden Kreislinie jederzeit ein gewisser anderer Punkt existiren, in welchem Φ um eine angebbare Zahl *grösser* als G ist. Somit zeigt sich, dass dieser dritte Fall ebenfalls in Widerspruch steht mit der über G gemachten Hypothese.

Die hier genannten drei Fälle sind die einzig möglichen; und, wie sich eben gezeigt hat, ist von diesen drei Fällen der erste der einzige, welcher mit der vorangestellten Hypothese *nicht* in Wider-

und ferner für jedes n

$$A^{(n)} = 0, \tag{34_b}$$

$$B^{(n)} = 0 \tag{34_c}$$

sein muss. Durch diese Relationen ($34_{a,\,b,\,c}$) verwandelt sich die für *alle* innerhalb $\mathfrak{A}$ befindlichen Punkte i gültige Formel (31) in

$$\Phi_i = C. \tag{35}$$

Somit ist dargethan, dass Φ den constanten Werth C besitzen muss in sämmtlichen Punkten, die *innerhalb* $\mathfrak{A}$ liegen.

Nunmehr werde um irgend einen innerhalb $\mathfrak{A}$ befindlichen Punkt m' eine Kreisfläche $\mathfrak{A}'$ beschrieben, welche über $\mathfrak{A}$ hinausreicht, jedoch vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt. In ähnlicher Weise lässt sich alsdann darthun, dass Φ auch für sämmtliche Punkte, die innerhalb $\mathfrak{A}'$ liegen, constant, nämlich $= C$ sein muss. U. s. w.

Vermittelst einer solchen Kette von Kreisen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}''$, ... von denen jede vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt, und von denen jede ihren Mittelpunkt im Innern der vorhergehenden liegen hat, können wir nun offenbar von dem gegebenen Flächentheil $\mathfrak{U}$ aus vordringen bis zu *jedem beliebigen innerhalb* $\mathfrak{T}$ *gelegenen* Punkt i; mithin nachweisen, dass Φ in jedem solchen Punkt i den Werth C hat.

Es sei nun s ein Punkt am *Rande* von $\mathfrak{T}$. Da Φ die Bedingungen (Π) erfüllt, mithin gleichmässig stetig ist in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{T}$, so wird ein Punkt i *innerhalb* $\mathfrak{T}$ angebbar sein, welcher dem Punkte s so nahe liegt, dass die in i und s vorhandenen Werthe Φ_i und Φ_s um weniger von einander differiren, als ein blindlings gegebenes ε. Ist i in solcher Weise festgesetzt, so kann nun durch die vorhin exponirte Methode dargethan werden, dass $\Phi_i = C$ ist. Folglich findet zwischen C und Φ_s ein Unterschied statt, der kleiner ist als ε. Jenes ε war aber blindlings gegeben. Somit folgt, dass C und Φ_s einander *gleich* sind, dass also die Function Φ den Werth C nicht nur besitzt in sämmtlichen Punkten *innerhalb* $\mathfrak{T}$, sondern auch in sämmtlichen *Rand*punkten von $\mathfrak{T}$.

Wir gelangen daher zu folgendem (allerdings nicht neuem, aber bisher wohl noch nicht mit hinreichender Strenge bewiesenem) Satz.

VI. Satz. Ist von einer Function Φ bekannt, dass sie auf einer beliebig gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π) *erfüllt, und ferner bekannt, dass sie auf irgend einem Flächentheil von $\mathfrak{T}$ constant ist, so wird sie constant sein in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{T}$.*

Bemerkung. Die vorhin zur Ableitung des IV. Satzes angewandte Methode findet sich ausführlicher entwickelt in meiner Schrift über den stationären Temperatur-Zustand einer Kugel, Halle, Verlag von Schmidt, 1861.

weil alle diese Werthe $= C$ sind, ebenfalls $= C$ sein. Von anderer Seite her (II. Satz) aber ergiebt sich, dass dieses arithmetische Mittel identisch sein muss mit der der Function Φ zugehörigen Convergenzconstanten Γ. Somit folgt $C = \Gamma$. Bei Eintritt des hier betrachteten ersten Falles wird also der constante Werth von Φ nothwendig $= \Gamma$ sein; und, da er vorhanden ist auf $\mathfrak{R}$, auch vorhanden sein auf der ganzen gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ (VI. Satz). Nach Absonderung dieses ersten Falles sind daher nur noch folgende zwei Fälle möglich:

Zweiter Fall. Auf $\mathfrak{R}$ ist ein Punkt vorhanden, in welchem Φ um eine angebbare Zahl *grösser* als Γ ist.

Dritter Fall. Auf $\mathfrak{R}$ existirt ein Punkt, in welchem Φ um eine angebbare Zahl *kleiner* als Γ ist. Alsdann wird auf einer mit $\mathfrak{R}$ concentrischen und durch diesen Punkt gehenden Kreislinie nothwendig ein gewisser zweiter Punkt vorhanden sein müssen, in welchem Φ um eine angebbare Zahl *grösser* als Γ ist (III. Satz).

Schliessen wir also, zur Erleichterung der weiteren Untersuchung, den ersten Fall, d. i. den Fall $\Phi = \text{Const.} = \Gamma$ vollständig aus, so muss *innerhalb* $\mathfrak{T}$ (*nämlich auf* $\mathfrak{R}$) *nothwendiger Weise irgend ein Punkt* x *existiren, in welchem der Werth von* Φ *grösser als* Γ *ist.* Dieser Werth mag bezeichnet werden mit

$$\Phi_x = \Gamma + \gamma, \tag{3}$$

wo also γ eine bestimmte positive Zahl ist, verschieden von Null.

Es sei σ der Rand von $\mathfrak{T}$. Ferner sei ϖ eine mit sehr grossem Radius um x beschriebene Kreisperipherie, durch welche $\mathfrak{T}$ in zwei Theile $\mathfrak{T}'$, $\mathfrak{T}''$ zerfällt, von denen der erste eine von σ und ϖ begrenzte *endliche*, den Punkt x in sich enthaltende Fläche repräsentirt, während der zweite eine *unendliche* Fläche repräsentirt, nämlich eine von ϖ begrenzte Kreisergänzungsfläche darstellt. Die auf σ und auf ϖ befindlichen Punkte mögen mit s und p, ferner die innerhalb $\mathfrak{T}'$ und innerhalb $\mathfrak{T}''$ befindlichen mit i' und i'' bezeichnet sein. Dabei mag der Radius von ϖ so gross gewählt gedacht werden, dass die auf der Kreisergänzungsfläche $\mathfrak{T}''$ vorhandenen Werthe Φ von der Convergenzconstanten Γ sämmtlich um weniger als γ differiren, mithin den Formeln entsprechen:

$$\Phi_{i''} < \Gamma + \gamma, \qquad \Phi_p < \Gamma + \gamma, \tag{4}$$

wo γ die bei (3) eingeführte positive Zahl sein soll. Dass eine derartige Bestimmung des Radius von ϖ immer möglich ist, unterliegt keinem Zweifel, weil Φ Genüge leistet den Bedingungen (Π).

Der vorhin, in (2), gefundene Satz kann sofort in Anwendung gebracht werden auf die von σ und ϖ begrenzte *endliche* Fläche $\mathfrak{T}'$. Ihm zufolge ergeben sich, wenn man den grössten am Rande von $\mathfrak{T}$

(d. i. auf σ und ϖ) vorhandenen Werth von Φ mit G bezeichnet, und beachtet, dass der Fall $\Phi = \text{Const.}$ excludirt ist, die Formeln:

$$\Phi_{i'} < G, \qquad \Phi_p \leqq G, \qquad \Phi_s \leqq G. \tag{5}$$

Da x ein specieller unter den Punkten i' ist, so kann auf x in Anwendung gebracht werden die erste der Formeln (5). Hiedurch ergiebt sich: $\Phi_x < G$, d. i. nach (3): $\Gamma + \gamma < G$. Somit kann in den Formeln (4) die Grösse $\Gamma + \gamma$ ersetzt werden durch G, wodurch sich ergiebt:

$$\Phi_{i''} < G, \qquad \Phi_p < G. \tag{6}$$

Die Formeln (5), (6) zusammengestellt, erhält man:

$$\begin{aligned} &\Phi_{i'} < G, \qquad \Phi_p < G, \\ &\Phi_{i''} < G, \qquad \Phi_s \leqq G. \end{aligned} \tag{7}$$

Die Punkte i', i'', p repräsentiren zusammengenommen *sämmtliche* Punkte, die *innerhalb* der ursprünglich gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ überhaupt angebbar sind; sie mögen daher zusammengenommen bezeichnet werden mit i. Andrerseits repräsentiren die s *sämmtliche Rand*punkte von $\mathfrak{T}$. Die Formeln (7) können also einfacher so dargestellt werden:

$$\Phi_i < G, \qquad \Phi_s \leqq G. \tag{8}$$

Die Grösse G repräsentirt, zufolge der ihr von Hause aus [bei (5)] zuertheilten Bedeutung, einen Werth, welchen die Function Φ auf der Fläche $\mathfrak{T}$ *wirklich* besitzt, nämlich besitzt in irgend welchen Punkten der Curven σ, ϖ. Aus den gegenwärtigen Formeln (8) folgt nun, dass dieser *wirklich* existirende Werth G nur auf σ, d. i. nur am *Rande* von $\mathfrak{T}$ sich vorfindet, dass derselbe definirt werden kann als der *grösste* unter den am *Rande* von $\mathfrak{T}$ befindlichen Werthen, und dass derselbe alle *innerhalb* $\mathfrak{T}$ befindlichen Werthe an Grösse überragt.

Ziehen wir nun, um keine Lücke offen zu lassen, den bisher excludirten Fall $\Phi = \text{Const.}$ mit in Betracht, so gelangen wir zu folgendem Resultat.

(9) .... Erfüllt eine Function Φ auf einer *unendlichen* Fläche $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π), und bezeichnet man den grössten Werth, welchen Φ am Rande von $\mathfrak{T}$ besitzt, mit G, so sind nur zwei Fälle möglich. *Entweder* Φ ist eine Constante, mithin überall $= G$; alsdann wird [wie eo ipso klar ist] die Convergenzconstante Γ der Function Φ ebenfalls $= G$ sein. *Oder* es finden die Formeln statt

$$\Phi_i < G, \qquad \Phi_s \leqq G,$$

die erstere gültig für sämmtliche Punkte i *innerhalb* $\mathfrak{T}$, die letztere gültig für alle Punkte s am *Rande* von $\mathfrak{T}$.

Die Ergebnisse (2) und (9) sind, wie man sieht, völlig gleichlautend, nur bezüglich auf verschiedene Flächen, und lassen sich also zusammenfassen zu einem einzigen Satze. Der so entstehende Satz kann nun sofort noch weiter vervollständigt werden. Erfüllt nämlich eine Function Φ auf einer gegebenen (endlichen oder unendlichen) Fläche $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π), so wird Gleiches offenbar auch gelten von der Function $-\Phi$. Ist mithin $-K$ der grösste Werth, welchen $-\Phi$ am Rande von $\mathfrak{T}$ besitzt, so sind, zufolge (2) und (9), nur zwei Fälle möglich. *Entweder* ist $-\Phi$ constant, d. h. überall $=-K$. *Oder* es finden die Formeln statt:

$$(10) \qquad -\Phi_i < -K, \qquad -\Phi_s \leqq -K,$$

d. i. die Formeln:

$$(11) \qquad \Phi_i > K, \qquad \Phi_s \geqq K.$$

Nun repräsentirt $-K$ den *grössten* Werth von $-\Phi$ am Rande von $\mathfrak{T}$. Folglich repräsentirt K den *kleinsten* Werth von Φ selber am Rande von $\mathfrak{T}$. Aus den Formeln (11) ist somit ersichtlich, dass der durch Zusammenfassung von (2) und (9) entstehende Satz erweitert werden kann zu folgendem allgemeineren Satze.

VII. Satz. Erfüllt eine Function Φ auf einer beliebig gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π), und bezeichnet man den grössten und den kleinsten Werth, welche Φ am Rande von $\mathfrak{T}$ besitzt, mit G und K, so sind nur zwei Fälle möglich: Entweder ist Φ eine Constante, mithin überall $= G = K$. Oder es finden die Formeln statt:

$$K < \Phi_i < G, \qquad K \leqq \Phi_s \leqq G,$$

wo unter i alle Punkte innerhalb $\mathfrak{T}$, unter den s alle Randpunkte von $\mathfrak{T}$ zu verstehen sind.

Die *zweite* von diesen beiden Fällen kann, wie aus der Formel

$$K < \Phi_i < G$$

augenblicklich folgt, nur dann eintreten, wenn $K < G$ ist, niemals aber dann, wenn $K = G$ ist. Denkt man sich also irgend eine Function Φ gegeben, bei welcher $K = G$ ist, so muss nothwendig der *erste* Fall stattfinden. Somit gelangt man zu folgendem Satz.

VIII. Satz. Erfüllt eine Function Φ auf einer beliebigen Fläche $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π), und ist sie am Rande von $\mathfrak{T}$ constant, $= C$, so wird sie diesen constanten Werth C auch besitzen in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{T}$.

Hieraus endlich ergiebt sich sofort noch folgendes Resultat.

IX. Satz. Es kann jederzeit nur eine einzige Function Φ existiren, welche auf einer gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π) erfüllt, und am Rande von $\mathfrak{T}$ vorgeschriebene Werthe besitzt.

Andererseits lässt sich, falls die vorgeschriebenen Werthe längs des Randes gleichmässig stetig sind, auch nachweisen, dass jederzeit

eine Function *existirt*, welche den eben gestellten Anforderungen entspricht. Mit voller Strenge kann dieser Nachweis dadurch geführt werden, dass man die in Rede stehende Function, deren Existenz in Frage steht, wirklich aufstellt; und solches ist erreichbar durch Methoden, die ich an einem andern Orte*) mitzutheilen begonnen habe, auf welche ich aber hier nicht weiter eingehen will.

§ 5.

Untersuchung gewisser Functionen, welche den Charakter (Π) nur unvollständig besitzen.

Beachtenswerth ist es, dass der VII. Satz auch noch gültig ist für Functionen Φ, welche die Bedingungen (Π) nicht in vollem Umfange erfüllen. In der That soll gezeigt werden, dass jener Satz noch gültig ist für solche Functionen, welche folgenden Voraussetzungen (1), (2), (3) entsprechen:

(1) .... Auf dem Rande der beliebig gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ befindet sich eine Anzahl einzelner Punkte a, in denen Φ *vieldeutig* ist, der Art, dass Φ in jedem solchen Punkte a ein von endlichen Grenzen eingeschlossenes stetig zusammenhängendes Werthsystem $\Phi_a' \ldots \Phi_a''$ besitzt, wo $\Phi_a' < \Phi_a''$ sein mag. — Auf jedwedem Segment des Randes, welches keinen der Punkte a enthält, ist hingegen Φ *eindeutig und gleichmässig stetig*; auch findet solches dann noch statt, wenn das Segment einen der Punkte a zum Endpunkte hat, falls man nur im Punkte a sämmtliche Werthe des dort vorhandenen Systems $\Phi_a' \ldots . \Phi_a''$ bis auf *einen*, der passend zu wählen ist, bei Seite wirft.

(2) .... Denkt man sich durch Kreislinien, welche um die Punkte a mit irgend welchen Radien ϱ beschrieben sind, kleine mit jenen Punkten behaftete Flächentheile $\mathfrak{A}$ von der gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ abgesondert, so leistet die Function Φ auf der übrig bleibenden Fläche $(\mathfrak{T} - \Sigma\mathfrak{A})$ den Bedingungen (Π) jedesmal Genüge, wie klein jene Radien ϱ auch genommen sein mögen.

(3) .... Für jeden Punkt a kann der Radius ϱ des zugehörigen Flächentheiles $\mathfrak{A}$, mit Bezug auf ein *blindlings* gegebenes ε, so klein gemacht werden, dass sämmtliche auf $\mathfrak{A}$ vorhandenen Werthe Φ ihrer Grösse nach sich befinden *innerhalb* des Grössensystems $\Phi_a' - \varepsilon \ldots . \Phi_a'' + \varepsilon$, wo unter $\Phi_a' \ldots . \Phi_a''$ das in

*) In den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. der Wiss. Jahrgang 1870, Seite 49.

dem betrachteten Punkte a vorhandene Werthsystem verstanden werden soll.

Denkt man sich sämmtliche *Randpunkte* von $\mathfrak{T}$ in zwei Kategorien gesondert, die eine bestehend aus den Punkten a, die andere bestehend aus allen von den a verschiedenen Punkten b, so wird Φ als eine Function zu bezeichnen sein, welche eindeutig ist in jedem Punkte b, vieldeutig in jedem Punkte a. Die am *Rande* von $\mathfrak{T}$ vorhandenen Werthe Φ bilden somit alle zusammengenommen ein System, welches zusammengesetzt ist theils aus den einzelnen Werthen Φ_b, die vorhanden sind in den b, theils aus den Werthsystemen $\Phi_a' \ldots . \Phi_a''$, die sich vorfinden in den a. Unter all' diesen *Randwerthen* Φ wird [wie aus den Voraussetzungen (1) folgt] einer existiren, welcher der *grösste*, ein anderer, welcher der *kleinste* ist. Diese beiden mögen bezeichnet werden mit G und K.

Bei der anzustellenden Untersuchuug mag nun, der Einfachheit willen, der Fall ausgeschlossen werden, dass die Function Φ eine Constante ist. Dass nämlich $\Phi = \text{Const.}$ den Voraussetzungen (1), (2), (3) ebenfalls entspricht, unterliegt keinem Zweifel. Die in den a vorhandenen Werthsysteme $\Phi_a' \ldots . \Phi_a''$ concentriren sich in diesem Fall jedes zu einem einzigen Werth; so dass sich in diesem Fall die im Allgemeinen in den a vorhandene Vieldeutigkeit von Φ specialisirt zur Eindeutigkeit.

Es sei nun i ein beliebiger Punkt *innerhalb* $\mathfrak{T}$. Nachgewiesen soll werden, dass alsdann der in i vorhandene Werth Φ_i nothwendig kleiner als G und grösser als K ist.

Es werde um i eine völlig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegende Kreisfläche beschrieben. Repräsentiren Φ_x und Φ_y den grössten und kleinsten Werth, welchen Φ am Rande der Kreisfläche besitzt, und x, y die Punkte, in denen diese Werthe sich vorfinden, so ergeben sich [weil der Fall $\Phi = \text{Const.}$ ausgeschlossen wurde] durch Anwendung des VII. Satzes die Formeln:

$$\Phi_y < \Phi_i < \Phi_x . \tag{4}$$

Jener Satz ist nämlich auf die construirte Kreisfläche *anwendbar*, weil dieselbe vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt, mithin Φ [wie aus der Voraussetzung (2) folgt] auf dieser Fläche die Bedingungen (Π) erfüllt.

Wie klein nun auch die durch (4) constatirten Unterschiede der Grössen Φ_y, Φ_i, Φ_x sein mögen, nothwendig muss eine positive Grösse δ von solcher Kleinheit angebbar sein, dass neben den Formeln (4) gleichzeitig auch noch folgende Formeln stattfinden:

$$\Phi_y + \delta < \Phi_i < \Phi_x - \delta . \tag{5}$$

Es werde jetzt die Fläche $(\mathfrak{T} - \Sigma\mathfrak{A})$ construirt; und zwar mögen dabei die zur Anwendung kommenden Radien ϱ so klein genommen

werden, dass einerseits die Punkte y, i, x *innerhalb* der Fläche $(\mathfrak{T} - \Sigma\mathfrak{A})$ sich befinden, ausserdem aber auch noch andere Anforderungen befriedigt werden.

Es soll nämlich, um zunächst irgend *einen* der Punkte a ins Auge zu fassen, der Radius ϱ für das zu a gehörige Flächenstück $\mathfrak{A}$ so klein sein, dass sämmtliche auf $\mathfrak{A}$ vorhandenen Werthe Φ ihrer Grösse nach sich befinden *innerhalb* des Grössensystems

$$\Phi_a' - \frac{\delta}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \Phi_a'' + \frac{\delta}{2}. \tag{6}$$

Dass ein solches ϱ stets angebbar ist, ergiebt sich aus der in (3) gemachten Voraussetzung. Das Grössensystem (6) liegt seinerseits *in Erstreckung* des Grössensystems

$$K - \frac{\delta}{2} \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot G + \frac{\delta}{2}, \tag{7}$$

wie hervorgeht aus der für K und G gegebenen Definition. Sämmtliche auf $\mathfrak{A}$ vorhandenen Werthe Φ werden also, weil sie bei der in Rede stehenden Wahl von ϱ *innerhalb* des Grössensystems (6) liegen, auch *innerhalb* des Grössensystems (7) sich befinden. — In analoger Weise soll der Radius ϱ gewählt werden bei jedem *andern* Punkte a.

Nehmen wir, nachdem die ϱ in solcher Weise festgesetzt sind, alle Flächentheile $\mathfrak{A}$ zusammen, so werden sämmtliche auf diesen $\mathfrak{A}$ vorhandenen Werthe Φ sich befinden *innerhalb* des Grössensystems (7). Gleiches gilt aber auch andererseits von den am Rande von $\mathfrak{T}$ vorhandenen Werthen Φ; denn diese befinden sich sämmtlich *in Erstreckung* des Grössensystems $K \ldots G$, folglich sämmtlich *innerhalb* des Grössensystems (7). *Gleiches gilt folglich auch von allen denjenigen Werthen* Φ, *welche sich befinden am Rande der Fläche* $(\mathfrak{T} - \Sigma\mathfrak{A})$; denn diese bestehen theils aus solchen, welche auf den $\mathfrak{A}$ (nämlich auf den Kreisrändern der $\mathfrak{A}$) befindlich sind, theils aus solchen, die sich vorfinden am Rande von $\mathfrak{T}$.

Die Werthe, welche Φ am Rande der Fläche $(\mathfrak{T} - \Sigma\mathfrak{A})$ besitzt, mögen für den Augenblick bezeichnet werden mit Φ'. Unter diesen Werthen Φ' muss sich, weil die Function Φ auf der genannten Fläche gleichmässig stetig ist [Voraussetzung (2)] einer befinden, welcher der grösste, ein andrer, welcher der kleinste ist; sie mögen heissen G' und K'. Da nun eben gezeigt worden ist, dass sämmtliche Φ' sich befinden *innerhalb* des Grössensystems (7), so werden *innerhalb* dieses Grössensystems sich auch befinden G' und K'. Somit ergeben sich die Formeln:

$$K - \frac{\delta}{2} < K' < G' < G + \frac{\delta}{2}. \tag{8}$$

Da die Function Φ auf der Fläche $(\mathfrak{T} - \Sigma\mathfrak{A})$ die Bedingungen (Π) erfüllt [Voraussetzung (2)], so kann auf diese Fläche der

VII. Satz angewandt werden. Ihm zufolge ergeben sich [weil der Fall $\Phi = \text{Const.}$ ausgeschlossen wurde] für die innerhalb $(\mathfrak{T} - \Sigma\mathfrak{N})$ befindlichen Punkte x, y die Formeln:

$$K' < \Phi_y, \qquad \Phi_x < G'. \tag{9}$$

Hieraus folgt mit Rücksicht auf (8) sofort:

$$K - \frac{\delta}{2} < \Phi_y, \qquad \Phi_x < G + \frac{\delta}{2}. \tag{10}$$

Nun werden offenbar die früher gefundenen Formeln (5):

$$\Phi_y + \delta < \Phi_i < \Phi_x - \delta \tag{5bis}$$

in Richtigkeit bleiben, wenn man in ihnen statt Φ_y einen kleineren, statt Φ_x einen grösseren Werth substituirt. Derartige Werthe aber bieten sich dar in (10). Durch Substitution derselben folgt aus (5):

$$\left(K - \frac{\delta}{2}\right) + \delta < \Phi_i < \left(G + \frac{\delta}{2}\right) - \delta, \tag{11}$$

d. i.:

$$K + \frac{\delta}{2} < \Phi_i < G - \frac{\delta}{2}. \tag{12}$$

Hieraus aber folgt, weil δ eine positive Grösse bezeichnet, sofort:

$$K < \Phi_i < G; \tag{13}$$

und dies war die zu beweisende Behauptung.

Bei unserer Untersuchung war der Fall $\Phi = \text{Const.}$ der Einfachheit willen ausgeschlossen worden. Ziehen wir, um keine Lücke offen zu lassen, diesen Fall jetzt nachträglich mit hinein, so gestaltet sich das erlangte Resultat folgendermassen.

X. Satz. Erfüllt eine Function Φ auf einer beliebig gegebenen Fläche $\mathfrak{T}$ die Voraussetzungen (1), (2), (3) — angegeben auf Seite 345 —, *und bezeichnet man unter ihren Werthen am Rande von $\mathfrak{T}$ den grössten mit G, den kleinsten mit K, so sind nur zwei Fälle möglich: Entweder Φ ist eine Constante, mithin überall $= G = K$. Oder es finden die Formeln statt:*

$$K < \Phi_i < G, \qquad K \leqq \Phi_s \leqq G,$$

wo unter den i sämmtliche Punkte innerhalb $\mathfrak{T}$, unter den s sämmtliche Punkte am Rande von $\mathfrak{T}$ zu verstehen sind.

§ 6.

Nachträgliche Bemerkungen.

In den hier durchgeführten Untersuchungen ist, wie man erkannt haben wird, mehrfach Gebrauch gemacht worden von einem Weierstrass'schen Satze, welcher bekannt wurde durch eine gelegentliche Aeusserung von Cantor (Borchardt's Journal, Bd. 72, S. 141), und so lautet:

Eine im Intervall $a \ldots . b$ (inclusive der Grenzen) der reellen Veränderlichen x gegebene, stetige Function $\Phi(x)$ *erreicht* das Maximum G der Werthe, welche sie annehmen kann, zum Mindesten für *einen* Werth x_0 der Veränderlichen, sodass $\Phi(x_0) = G$ ist.

Zugleich ist bei den durchgeführten Untersuchungen vorausgesetzt, dass ein analoger Satz existirt für jede von *zwei* Argumenten, nämlich von den rechtwinkligen Coordinaten x, y abhängende Function $\Phi(x, y)$, sobald dieselbe stetig ist *in Erstreckung* eines gegebenen endlichen Gebietes der Ebene.

Man übersieht leicht, sei schliesslich noch bemerkt, dass im Ganzen ähnliche Definitionen, Deductionen und Sätze sich auffinden lassen mit Bezug auf den *Raum*, d. i. mit Bezug auf diejenigen Functionen, welche auftreten in der Theorie des Newton'schen Potentials.

Leipzig, October 1870.

Untersuchungen über die Bewegung eines Systems starrer Körper.*)

Von Carl Neumann in Leipzig.

Beliebig viele fortschreitende Geschwindigkeiten V und beliebig viele Winkelgeschwindigkeiten Ω, welche für ein und denselben starren Körper in simultaner Weise gegeben sind, lassen sich bekanntlich — welche Richtungen und Axen jene Geschwindigkeiten auch besitzen mögen — immer reduciren erstens auf *eine einzige Winkelgeschwindigkeit* ω, deren Axe durch einen willkürlich gegebenen Punkt π geht, zweitens auf eine *einzige fortschreitende Geschwindigkeit* v.

Und zwar ist v identisch mit derjenigen Geschwindigkeit, welche der Punkt π besitzen wird in Folge all' jener gegebenen Geschwindigkeiten V und Ω zusammengenommen; während andererseits ω identisch ist mit derjenigen Winkelgeschwindigkeit, zu welcher die gegebenen Winkelgeschwindigkeiten Ω sich zusammensetzen werden, sobald ihre Axen sich selber parallel nach π verschoben gedacht sind.

Setzt man voraus, dass zum Punkte π der *Schwerpunkt* des Körpers gewählt ist, und bezeichnet man die durch den Schwerpunkt gehenden Hauptaxen des Körpers mit 1, 2, 3, so lässt sich die augenblickliche lebendige Kraft T des Körpers vermittelst der resultirenden Geschwindigkeiten v und ω in folgender Weise ausdrücken:

$$T = \frac{m v^2 + m_1 \omega_1^2 + m_2 \omega_2^2 + m_3 \omega_3^2}{2}.$$

Hier sind ω_1, ω_2, ω_3 die Componenten von ω nach den Axen 1, 2, 3; ferner sind m_1, m_2, m_3 die diesen Axen entsprechenden Trägheitsmomente des Körpers; endlich ist m die Masse des Körpers.

Eine Deduction dieser Sätze vermittelst *geometrischer* Methoden dürfte als ein Umweg zu bezeichnen sein; denn man würde dabei gezwungen sein, ausser den *Geschwindigkeiten* selber gleichzeitig auch in Betracht zu ziehen diejenigen *Bewegungen*, welche diesen Geschwindigkeiten, einzeln genommen, entsprechen. Auf mehr directem Wege

*) Wiederholt aus den Berichten der Kgl. Sächs. Ges. d. Wiss. Jahrgang 1869, Seite 132.

(und zugleich wohl auch in mehr übersichtlicher Weise) kann man zu den Sätzen gelangen durch Anwendung naheliegender *analytischer* Methoden. — Ich habe mich im Vorstehenden bemüht, diesen Sätzen diejenige Fassung zu geben, in welcher sie, bei der Behandlung einer grossen Anzahl mechanischer Probleme, am bequemsten verwendbar sind. Handelt es sich nämlich (wie z. B. beim Foucault'schen Pendel oder beim Fessel'schen Rotationsapparat) um die Bewegung eines Systems starrer Körper, die durch irgend welche Angelpunkte oder Axen mit einander verbunden sind, so kann man mit Hülfe der vorstehenden Sätze die lebendige Kraft des Systems in einfachster Weise berechnen; und gelangt sodann, unter Anwendung des Hamilton'schen Princips, sofort zu den erforderlichen Differentialgleichungen. Ich habe zwei derartige Probleme, welche bisher wohl noch *nicht* behandelt sein dürften, einer näheren Untersuchung unterworfen; und beabsichtige die erhaltenen Resultate, welche mir nicht ohne Interesse zu sein scheinen, hier kurz mitzutheilen.

I.

Es sei gegeben ein gewöhnliches Pendel, welches unter dem Einfluss der Schwerkraft hin- und herschwingt um seine in festen Lagern ruhende horizontale Axe. Der pendelnde Körper ist von beliebiger Gestalt; in seinem Innern befinde sich ein Hohlraum; im Innern des Hohlraumes befindet sich ein homogener Revolutionskörper, dessen geometrische Axe durch eine starre Linie repräsentirt ist, deren Enden fest eingefügt sind in die innere Wandung des Hohlraumes; durch irgend welchen anfänglichen Stoss ist der Revolutionskörper um seine geometrische Axe in Rotation versetzt. Es soll der Einfluss untersucht werden, den dieser rotirende innere Körper ausübt auf die Schwingungen des Pendels.

Bezeichnet man den Revolutionskörper kurzweg als *Kern*, und den übrigen Theil des Pendels als *Schale*, so lassen sich die Resultate meiner Untersuchung folgendermassen zusammenfassen.

1. Die Pendelschwingungen sind unabhängig von der anfänglichen Rotationsgeschwindigkeit des Kernes. Hingegen sind zu unterscheiden: der Fall des *relativ festen*, und der des *relativ beweglichen* Kernes. Im ersteren Fall sollen Schale und Kern mit einander verbunden gedacht werden zu einem einzigen starren Körper. Im letzteren Fall hingegen ist der Kern frei beweglich um seine geometrische Axe; seine anfängliche Winkelgeschwindigkeit entweder Null, oder von irgend welchem Werth.

2. Mag der Kern relativ fest oder relativ beweglich sein, das Gesetz der Pendelschwingungen wird immer denselben *Charakter* haben,

und nur einen Unterschied zeigen hinsichtlich der in ihm enthaltenen *Constanten*. Denkt man sich nämlich den Kern zu Anfang relativ fest, und später erst relativ beweglich gemacht, so wird hiedurch in dem Gesetz der Pendelschwingungen eine Aenderung hervorgerufen werden von genau derselben Art und Grösse, als wäre das anfängliche Trägheitsmoment des Pendels *vermindert* um $\mathfrak{m}_1 \cos^2 k$. Dabei ist unter $\mathfrak{m}_1$ das Trägheitsmoment des Kerns um seine geometrische Axe, anderseits unter k derjenige Winkel zu verstehen, unter welchem diese Axe geneigt ist gegen die horizontale Pendelaxe. So z. B. ist, was sehr kleine Amplituden anbelangt, die Schwingungsdauer bei *relativ festem* Kern:

$$T_F = \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_x}{gMR}},$$

hingegen die bei *relativ beweglichem* Kern:

$$T_B = \pi \sqrt{\frac{\mathfrak{M}_x - \mathfrak{m}_1 \cos^2 k}{gMR}}.$$

Hier ist g die Intensität der Schwerkraft; M die Masse des ganzen Pendels (Schale und Kern zusammengenommen); R der Abstand, den der Schwerpunkt der Masse M von der Pendelaxe hat; endlich $\mathfrak{M}_x$ das Trägheitsmoment von M in Bezug auf die Pendelaxe. (Die geometrische Axe des Kernes ist mit 1, andrerseits die horizontale Pendelaxe mit x bezeichnet zu denken; hieraus erklärt sich die Wahl der Indices bei $\mathfrak{m}_1$ und $\mathfrak{M}_x$.)

3. Ist die Masse der Schale verschwindend klein gegen die Masse des Kernes, und die geometrische Axe des Kernes parallel zur Pendelaxe, so werden die Pendelschwingungen, im Falle der *relativen Beweglichkeit* des Kernes, genau ebenso vor sich gehen, als wäre die ganze Masse des Pendels concentrirt in seinem Schwerpunkt. Mit andern Worten: Wir haben in diesem Fall ein Pendel vor uns, *dessen Schwingungsmittelpunkt zusammenfällt mit dem Schwerpunkt.*

II.

In Bezug auf Gestalt und gegenseitige Verbindung der beiden Körper, welche im Vorhergehenden als Kern und Schale bezeichnet sind, mögen die schon gemachten Voraussetzungen beibehalten werden. An Stelle der horizontalen Pendelaxe soll aber gegenwärtig gegeben sein eine im Raume unbewegliche *vertikale* Axe. Um diese soll die Schale frei beweglich sein; auch soll sie längs derselben empor- und hinabgleiten können. Ausserdem mag angenommen werden, dass die Schale auf ihrer oberen Seite begrenzt ist von einer ebenen horizontalen Fläche.

Schale und Kern mögen dem Einfluss der Schwerkraft unterworfen sein; sie mögen getragen werden durch eine Anzahl vertikaler Fäden, welche sämmtlich gleich weit von der vertikalen Axe entfernt sind. Die unteren Enden dieser Fäden sind angeheftet an der horizontalen Begrenzungsfläche der Schale, während die oberen Enden befestigt sind an einer gegebenen horizontalen Ebene, die unbeweglich im Raume ist.

So lange die Fäden vertikal sind, befindet sich die Schale im Gleichgewicht. Denken wir uns aber die Schale durch eine Drehung um die vertikale Axe aus jener Gleichgewichtslage abgelenkt, so gerathen die Fäden in geneigte Stellungen. Wird daher die Schale in einem solchen Augenblick sich selber überlassen, so wird sie unter dem Einfluss der Schwerkraft in Oscillationen gerathen, die verbunden sind mit einem abwechselnden Sinken und Steigen. — Diese Oscillationen sollen untersucht werden für den Fall des *relativ festen*, namentlich aber für den des *relativ beweglichen* Kernes.

Die Resultate, zu welchen man bei diesem Probleme gelangt, sind analog mit denen, die sich beim Probleme des Pendels ergeben; sie lauten:

1. Die Oscillationsbewegung des betrachteten Systems ist völlig unabhängig von der anfänglichen Winkelgeschwindigkeit des Kernes.

2. Das Gesetz der Oscillationsbewegung ist bei relativ beweglichem Kern *dasselbe* wie bei relativ festem Kern. Genauer ausgedrückt, jenes Gesetz zeigt bei einem Vergleich der genannten beiden Fälle keinen Unterschied in seinem *Charakter*, sondern nur einen Unterschied hinsichtlich seiner *Constanten*. Denkt man sich nämlich den Kern zu Anfang relativ fest, und später erst relativ beweglich gemacht, so wird hiedurch in dem Gesetz der Oscillationsbewegung eine Aenderung hervorgerufen von genau derselben Art und Grösse, als wäre das anfängliche Trägheitsmoment des Systems (in Bezug auf die vertikale Axe) *vermindert* worden um $\mathfrak{m}_1 \cos^2 k$. Dabei ist (ähnlich wie früher) unter $\mathfrak{m}_1$ das Trägheitsmoment des Kerns in Bezug auf seine geometrische Axe, und unter k derjenige Winkel zu verstehen, unter welchem diese Axe gegen die vertikale Axe geneigt ist.

3. Ist die Masse der Schale verschwindend klein gegen die des Kernes, und steht die Axe des Kernes vertikal, so werden die Oscillationsbewegungen, im Falle eines *relativ beweglichen* Kernes, genau ebenso vor sich gehen, als wäre die ganze Masse des betrachteten Systemes concentrirt in seinem Schwerpunkt. — Hieraus erkennt man leicht, wie die Oscillationsbewegung sich gestalten wird, wenn zu den ebengenannten Voraussetzungen noch *die* hinzugefügt wird, dass die Axe des Kernes *zusammenfallen* soll mit der Oscillationsaxe. Man

erkennt nämlich, dass der Schwerpunkt des Kernes alsdann in genau derselben Weise hinabsinken wird, wie ein *frei beweglicher* von der Schwerkraft getriebener materieller Punkt. Ferner erkennt man, dass diese Bewegung fortdauern wird bis zu *dem* Zeitaugenblick, wo der Schwerpunkt seine (aus der Natur der Aufhängung sich ergebende) *tiefste* Stelle erreicht hat. Wie aber von diesem Augenblick an die Bewegung sich weitergestalten wird, hängt wesentlich ab von der physischen Beschaffenheit des betrachteten Systems, und kann mathematisch nur dann untersucht werden, wenn über diese physische Beschaffenheit (namentlich über die Elasticität der Fäden) bestimmte Voraussetzungen zu Grunde gelegt sind. — Ist übrigens, um einen rein ideellen Fall zu betrachten, die Masse der Schale nicht nur verschwindend klein, sondern geradezu gleich *Null*, und sind gleichzeitig die Massen und die elastischen Kräfte der Fäden, welche bisher nur als verschwindend klein betrachtet wurden, ebenfalls gleich *Null*, so wird die Schale in jenem Augenblick, wo der Schwerpunkt seine tiefste Stelle erreicht hat, völlig zur Ruhe kommen, während der Kern seine augenblickliche Winkelgeschwindigkeit für immer beibehält.

Leipzig, April 1869.

Ueber die Bildung der Resultante zweier Gleichungen.

Von P. Gordan in Giessen.

Haben zwei Gleichungen:

$$f = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} \ldots\ldots$$
$$\varphi = \alpha_m x^m + \alpha_{m-1} x^{m-1} \ldots\ldots$$

eine Wurzel w gemein, dann findet zwischen den Coefficienten a_n, $a_{n-1} \ldots \alpha_m$, $\alpha_{m-1} \ldots$ eine Relation:

$$R = 0$$

statt und die Potenzen von w verhalten sich, wie gewisse Functionen A_i der Coefficienten

$$1 : w : w^2 : \cdots\cdots = A_0 : A_1 : A_2 : \cdots\cdots$$

Der Ausdruck R heisst die Resultante der Gleichungen f und φ. Die Grössen A_i verschwinden, wenn f und φ mehr als eine Wurzel gemein haben.

Das Problem der Elimination einer Unbekannten aus zwei Gleichungen beruht im Wesentlichen auf der Bestimmung der Resultante R und der Grössen A; es besitzt bereits eine reiche Literatur, deren wichtigste Resultate in Herrn Baltzers Determinantentheorie (3. Aufl., Seite 98 — 125) zusammengestellt sind. — Auf S. 102 und 112 derselben wird die Resultante durch die Determinanten dargestellt:

$$R_1 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & & & & & & & \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & & & & & & \\ & & a_0 & a_1 & \cdots & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & & & & & & & \\ & \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & & & & & & \\ & & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & & & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

und:

$$R_2 = \begin{vmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots \\ 0 & \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m-1,0} & c_{m-1,1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{00} & c_{01} & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

In der letzten sind die Elemente c_{ix} die Coefficienten des Ausdruckes (s. Seite 114):

$$F(x, y) = \frac{f(x)\varphi(y) - \varphi(x)f(y)}{x - y} = \Sigma c_{ix} x^i y^x.$$

Bezeichnet man die Unterdeterminanten der Determinante R_1 durch R_{ik} und die Unterdeterminanten der Determinante R_2 nach den Elementen c_{ix} durch γ_{ix}, dann sind die Grössen γ_{ix} gleichzeitig Unterdeterminanten zweiter Ordnung von R_1 und es bestehen, im Falle die Resultante R verschwindet, zur Bestimmung der gemeinsamen Wurzel w die Gleichungen (s. Seite 107, 109 und 113):

$$\begin{aligned} 1 : w : w^2 \ldots\ldots &= R_{i0} : R_{i1} : R_{i2} \ldots\ldots \\ &= \frac{\partial R}{\partial a_0} : \frac{\partial R}{\partial a_1} : \frac{\partial R}{\partial a_2} \ldots\ldots \\ &= \frac{\partial R}{\partial \alpha_0} : \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} : \frac{\partial R}{\partial \alpha_2} \ldots\ldots \\ &= \gamma_{i0} : \gamma_{i1} : \gamma_{i2} \ldots\ldots \end{aligned}$$

Von diesen Proportionen wird nur die letztere hier angewandt werden, weil die Grössen R_{ix}, $\frac{\partial R}{\partial a_i}$ und $\frac{\partial R}{\partial \alpha_i}$ von höherer Ordnung als die γ_{ix} sind und in ihnen daher überflüssige Factoren auftreten (siehe unten § 4, F. XXIII und § 7, F. XIX). — Da die Berechnung der Resultante aus den Determinanten R_1 und R_2 äusserst beschwerlich ist, so hat man versucht, andere Methoden zu ihrer Bestimmung ausfindig zu machen. Herr Cayley hat (Philosophical Transactions Bd. 147, pag. 703 und Bd. 158, pag. 173) die Resultanten von Gleichungen niederen Grades als Aggregate von Produkten ihrer Coefficienten dargestellt und Herr Clebsch hat (Crelle's Journal Bd. 58, pag. 273) die Resultante einer Gleichung n^{ten} Grades und einer quadratischen Gleichung durch symbolische Produkte ausgedrückt.

In der vorliegenden Untersuchung habe ich gezeigt, wie man die Elimination von x aus zwei Gleichungen auf eine Reihe von einfacheren Operationen, den Uebereinanderschiebungen (vgl. § 1) zurückführen kann und diese Zurückführung bei Gleichungen bis zum 5^{ten} Grade incl. beispielsweise bewerkstelligt. Gleichzeitig habe ich die

simultanen Covarianten aufgestellt, welche verschwinden, wenn die Gleichungen mehrere Wurzeln gemein haben.

§ 1.

Operationen.

Es giebt vorzüglich 3 Operationen, deren man sich in der Invariantentheorie bedient, nämlich

1. Die symbolische Rechnung resp. Bezeichnungsweise.
2. Die Polarenbildung.
3. Die Uebereinanderschiebung.

Die symbolische Rechnung will ich als bekannt voraussetzen; es existiren bereits verschiedene Abhandlungen darüber (u. And. Aronhold, Crelle's J. Bd. 55, Clebsch, Crelle's J. Bd. 59), ich will daher nur einige einleitende Worte über die beiden anderen Operationen vorausschicken.

Man kann bekanntlich jede (homogene) Form:

$$f = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} x_2 + a_{n-2} x_1^{n-2} x_2^2 \ldots + a_0 x_2^n$$

symbolisch durch:

$$(a_1 x_1 + a_2 x_2)^n = a_x^n$$

darstellen, nur muss man schliesslich die symbolischen Produkte $a_1^{\varkappa} a_2^{n-\varkappa}$ mittelst der Formel:

$$\text{(I)} \quad a_\varkappa = \frac{n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdots n-\varkappa+1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \quad \varkappa} a_1^{\varkappa} a_2^{n-\varkappa} = \binom{n}{\varkappa} a^{\varkappa}{}_1 a_2^{n-\varkappa}$$

durch die Coefficienten von f ersetzen.

Wenn man die Form f n mal hinter einander nach den Variabeln x (x_1 und x_2) differentiirt, die Incremente sodann durch neue Variable y (y_1 und y_2) ersetzt und durch die Zahl

$$n \cdot n-1 \cdot n-2 \cdots n-\varkappa+1$$

dividirt, dann entsteht eine neue Form, welche in den Variabeln x vom $(n-\varkappa)^{\text{ten}}$ und in den Variabeln y vom $\varkappa^{\text{ten}}$ Grade ist. Diese neue Form bezeichne ich durch $f_{y^\varkappa}$ und nenne sie die $\varkappa^{\text{te}}$ Polare von f; sie hat symbolisch den Werth:

$$\text{(II)} \quad f_{y^\varkappa} = a_x^{n-\varkappa} a_y^{\varkappa} = \Sigma_{\lambda,\mu} \binom{n-\varkappa}{\lambda} \binom{\varkappa}{\mu} a_1^{\lambda+\mu} a_2^{n-\lambda-\mu} x_1^{\lambda} y_1^{\mu} x_2^{n-\varkappa-\lambda} y_2^{\varkappa-\mu},$$

ist also nach F. (I) in die Reihe entwickelbar:

$$\text{(III)} \quad f_{y^\varkappa} = \Sigma_{\lambda,\mu} \frac{\binom{n-\varkappa}{\lambda}\binom{\varkappa}{\mu}}{\binom{n}{\lambda+\mu}} a_{\lambda+\mu} x_1^{\lambda} y_1^{\mu} x_2^{n-\varkappa-\lambda} y_2^{\varkappa} \quad \mu. \; -$$

Aus je zwei Formen:

$$f = a_x^n \quad \text{und} \quad \varphi = \alpha_x^m$$

kann man die symbolischen Produkte bilden:

$$a_x^n \cdot \alpha_x^m; \quad (a\alpha)\, a_x^{n-1} \alpha_x^{m-1}; \quad (a\alpha)^2 a_x^{n-2} \alpha_x^{m-2} \ldots\ldots$$

Dieselben sollen durch

(IV) $$(f\varphi)^\varkappa = (a\alpha)^\varkappa a_x^{n-\varkappa} \alpha_x^{m-\varkappa}$$

bezeichnet und die $\varkappa^{\text{te}}$ Uebereinanderschiebung der Formen f und φ genannt werden.

Den symbolischen Ausdruck $(a\alpha)^\varkappa a_x^{n-\varkappa} \alpha_x^{m-\varkappa}$ erhält man aus der $\varkappa^{\text{ten}}$ Polare $a_x^{n-\varkappa} a_y^\varkappa$ dadurch, dass man die Variabeln y durch die Symbole α (y_1 durch α_2 und y_2 durch $-\alpha_1$) ersetzt und sodann mit $\alpha_x^{m-\varkappa}$ multiplicirt.

Entwickelt man in der Formel:

$$(f\varphi)^\varkappa = a_x^{n-\varkappa} \alpha_x^{m-\varkappa} (a\alpha)^\varkappa = \{a_1 x_1 + a_2 x_2\}^{n-\varkappa} \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2\}^{m-\varkappa} \{a_1 \alpha_2 - a_2 \alpha_1$$

die drei Factoren rechter Hand nach dem binomischen Lehrsatze, dann erhält man die Formel:

$$(f\varphi)^\varkappa = \Sigma_{\lambda,\mu,\nu} (-1)^\nu \binom{n-\varkappa}{\lambda} \binom{m-\varkappa}{\mu} \binom{\varkappa}{\nu} a_1^{\lambda+\nu} a_2^{n-\lambda-\nu} \alpha_1^{\mu+\varkappa-\nu} \alpha_2^{m-\varkappa-\mu+\nu} x_1^{\lambda+\mu} x_2^{m+n-2\varkappa-\lambda}$$

und wenn man die Ausdrücke:

$$a_1^{\lambda+\nu} a_2^{n-\lambda-\nu} \quad \text{und} \quad \alpha_1^{\mu+\varkappa-\nu} \alpha_2^{m-\varkappa-\mu+\nu}$$

durch ihre Werthe aus Formel (I) ersetzt:

$$(f\varphi)^\varkappa = \Sigma_{\lambda\mu\nu} \frac{(-1)^\nu \binom{n-\varkappa}{\lambda} \binom{m-\varkappa}{\mu} \binom{\varkappa}{\nu}}{\binom{n}{\lambda+\nu} \binom{m}{\mu+\varkappa-\nu}} a_{\lambda+\nu} \alpha_{\mu+\varkappa-\nu} x_1^{\lambda+\mu} x_2^{m+n-2\varkappa-\lambda-\mu}$$

Der Coefficient von $x_1^{\varrho-\varkappa} x_2^{m+n-\varkappa-\varrho}$ in dieser Form hat den Werth:

$$(f\varphi)^\varkappa_{\varrho-\varkappa} = \Sigma_{\lambda\mu\nu} \frac{(-1)^\nu \binom{n-\varkappa}{\lambda} \binom{m-\varkappa}{\mu} \binom{\varkappa}{\nu}}{\binom{n}{\lambda+\nu} \cdot \binom{m}{\mu+\varkappa-\nu}} a_{\lambda+\nu} \alpha_{\mu+\varkappa-\nu},$$

wobei die Summe rechter Hand über alle Werte $\lambda\,\mu\,\nu$ auszudehnen ist, für welche

$$\lambda + \mu = \varrho - \varkappa$$

ist. Setzt man:

$$\lambda + \nu = \sigma,$$

dann erhält man die Formel:

$$(f\varphi)^\varkappa_{\varrho-\varkappa} = \Sigma_\sigma (-1)^\sigma \frac{a_\sigma \; \alpha_{\varrho-\sigma}}{\binom{n}{\sigma} \binom{m}{\varrho-\sigma}} \Sigma_\lambda (-1)^\lambda \binom{n-\varkappa}{\lambda} \binom{m-\varkappa}{m-\varrho+\lambda} \binom{\varkappa}{\sigma-\lambda},$$

welche, wenn man die Zahl:

(V$_a$) $$\Sigma_\lambda (-1)^\lambda \binom{n-\varkappa}{\lambda} \binom{m-\varkappa}{m-\varrho+\lambda} \binom{\varkappa}{\sigma-\lambda} = C_\sigma$$

durch C_σ bezeichnet, in die folgende übergeht:

$$(V_b) \qquad (f\varphi)^{\varkappa}_{\varrho-\varkappa} = \Sigma_\sigma (-1)^\sigma C_\sigma \frac{a_\sigma \; \alpha_{\varrho-\sigma}}{\binom{n}{\sigma}\binom{m}{\varrho-\sigma}}.$$

Sind die Grade m und n der Formen f und φ einander gleich, dann hat man die Gleichung (s. F. IV):

$$(f\varphi)^n = (a_1\alpha_2 - a_2\alpha_1)^n = \Sigma_\nu \binom{n}{\nu} (-1)^\nu a_1{}^\nu a_2{}^{n-\nu} \alpha_1{}^{n-\nu} \alpha_2{}^\nu,$$

$$(VI) \qquad (f\varphi)^n = \Sigma_\nu (-1)^\nu \frac{a_\nu \cdot \alpha_{n-\nu}}{\binom{n}{\nu}}.$$

Statt die Coefficienten $(f\varphi)^{\varkappa}_{\varrho}$ mittelst der Formel V_a zu berechnen, ist es in den meisten Fällen vortheilhafter, ein von Herrn Cayley (Philosophical Transactions vol. 146, pag. 104) angegebenes Recursionsverfahren einzuschlagen. Variirt man nämlich die Symbole $a_1\, a_2\, \alpha_1\, \alpha_2$ und die Variabeln x_1 und x_2 der Art, dass:

$$\delta a_1 = a; \quad \delta a_2 = a_1; \quad \delta \alpha_1 = 0; \quad \delta \alpha_2 = \alpha_1; \quad \delta x_1 = -x_2; \quad \delta x_2 = 0$$

ist, dann erhalten die übrigen Ausdrücke folgende Variationen:

$$(VII_a) \quad \begin{cases} \delta a_\varkappa = (\varkappa+1) a_{\varkappa+1}, \quad \delta \alpha_\varkappa = (\varkappa+1)\alpha_{\varkappa+1}; \quad \delta a_x = 0; \quad \delta \alpha_x = 0; \quad \delta(a\alpha) = 0 \\ \delta (f\varphi)^\varkappa = 0. \end{cases}$$

Aus der letzten derselben folgt, da:

$$(f\varphi)^\varkappa = \Sigma_r (f\varphi)^\varkappa_r x_1{}^r x_2{}^{m+n-r-2\varkappa}$$

ist, die Gleichung:

$$0 = \Sigma_\varrho \left\{ \delta (f\varphi)^\varkappa_r x_1{}^r x_2{}^{m+n-2\varkappa-r} - r (f\varphi)^\varkappa_r x_1{}^{r-1} x_2{}^{m+n-2\varkappa-r+1} \right\}$$

und, wenn man darin die einzelnen Coefficienten gleich 0 setzt:

$$(VII_b) \qquad \begin{cases} \frac{1}{r} \delta (f\varphi)^\varkappa_{r-1} = (f\varphi)^\varkappa_r \\ \delta (f\varphi)^\varkappa_{m+n-2\varkappa} = 0. \end{cases}$$

Der Coefficient $(f\varphi)^\varkappa_0$ wird von Herrn Cayley „leading term" genannt; er hat den Werth:

$$a_2{}^{n-\varkappa} \alpha_2{}^{m-\varkappa} (a\alpha)^\varkappa$$

und lässt sich daher in die Reihe entwickeln:

$$(f\varphi)^\varkappa_0 = \Sigma_\nu (-1)^{\varkappa-\nu} \binom{\varkappa}{\nu} a_1{}^\nu a_2{}^{n-\nu} \alpha_1{}^{\varkappa-\nu} \alpha_2{}^{n-\varkappa+\nu}$$

$$= \Sigma_\nu (-1)^{\varkappa-\nu} \frac{\binom{\varkappa}{\nu}}{\binom{n}{\nu}\binom{m}{\varkappa-\nu}} a_\nu \cdot \alpha_{\varkappa-\nu},$$

$$(VII_c) \quad (f\varphi)^\varkappa_0 = \frac{(-1)^\varkappa}{\binom{m}{\varkappa}} \Sigma_\nu \frac{m-\varkappa+1}{n} \cdot \frac{m-\varkappa+2}{n-1} \cdots \frac{m-\varkappa+\nu}{n-\nu+1} a_\nu \cdot \alpha_{\varkappa-\nu}.$$

Aus ihm lassen sich die übrigen Coefficienten

$$(f\varphi)_1^x \quad , \quad (f\varphi)_2^x \ldots\ldots$$

mittelst der Formel (VII_b) der Reihe nach entwickeln.

§ 2.

Formen mit 2 Reihen Veränderlicher.

Ebenso wie binäre Formen, in denen nur *eine* Reihe von Variabeln x_1 und x_2 auftritt, kann man auch eine Form mit zwei Reihen Veränderlicher x (x_1 und x_2) und y (y_1 und y_2) symbolisch darstellen.

Die allgemeinste homogene Form in x und y ist:

$$(I) \qquad F = \Sigma_{ix}\, c_{ix}\, x_1^i y_1^x x_2^{n-i} y_2^{m-x},$$

sie ist in den Variabeln x vom n^{ten}, in den y vom m^{ten} Grade. Setzt man symbolisch

$$F = (r_1 x_1 + r_2 x_2)^n (s_1 y_2 + s_2 y_2)^m = r_x^n s_y^m,$$

dann muss man schliesslich die Produkte der Symbole r und s durch die Coefficienten von F ersetzen. Die hierzu nöthige Formel findet man mittelst der Relation:

$$\Sigma_{ix}\, c_{ix}\, x_1^i y_1^x x_2^{n-i} y_2^{n-x} = \Sigma_{ix} \binom{n}{i}\binom{m}{x} r_1^i s_1^x r_2^{n-i} s_2^{m-x} x_1^i y_1^x x_2^{n-i} y_2^{n-x},$$

aus welcher folgt, dass:

$$(II) \qquad c_{ix} = \binom{n}{i}\binom{m}{x} r_1^i s_1^x r_2^{n-i} s_2^{m-x}$$

ist. Ebenso wie sich nun alle Covarianten und Invarianten von $f = a_x^n$ durch symbolische Produkte darstellen lassen, in denen nur f darstellende Symbole vorkommen, so lassen sich alle Invarianten und Covarianten von $F = r_x^n s_y^m$ durch symbolische Produkte darstellen, in denen nur die Symbolenpaare rs vorkommen. Die einfachsten symbolischen Produkte dieser Art sind die Formen:

$$r_x^n s_x^m \quad (rs) r_x^{n-1} s_x^{m-1} \quad (rs)^2 r_x^{n-2} s_x^{m-2} \ldots (rs)^x r_x^{n-x} s_x^{m-x};$$

ich will dieselben die Elementarcovarianten von F nennen und durch

$$(\overline{rs})^x = r_x^{n-x} s_x^{m-x} (rs)^x$$

bezeichnen. Desgleichen bezeichne ich ihre Coefficienten durch $(\overline{rs})_i^x$, so dass man hat:

$$(\overline{rs})^x = (\overline{rs})^x_{m+n-2x} x_1^{m+n-2x} + (\overline{rs})^x_{m+n-2x-1} x_1^{m+n-2x-1} x_2 + (\overline{rs})^x_{m+n-2x-2} x_1^{m+n-2x-2} x_2^2 \ldots$$

Die Anzahl dieser in der Entwickelung der Covariante $(\overline{rs})^x$ auf-

tretenden Coefficienten ist $m + n - 2\varkappa + 1$. Ist, wie ich annehmen will, $n \geq m$, dann giebt es die $m + 1$ Covarianten:

$$(\overline{rs})^0 \quad (\overline{rs})^1 \ldots . \quad (\overline{rs})^m .$$

Die Gesammtzahl ihrer Coefficienten ist:

$$n + n + 1) + (m + n - 1) + (m + n - 3) \ldots + (n - m + 1) = (m + 1)(n + 1),$$

also gleich der Anzahl der Coefficienten $c_{i\varkappa}$ in F. Um sie durch letztere auszudrücken, entwickele man die Factoren des symbolischen Produktes:

$$(rs)^\varkappa r_x^{n-\varkappa} s_x^{m-\varkappa} = (r_1 s_2 - s_1 r_2)^\varkappa (r_1 x_1 + r_2 x_2)^{n-\varkappa} (s_1 x_1 + s_2 x_2)^{m-\varkappa}$$

nach dem binomischen Lehrsatze. Es wird dann:

$$(\overline{rs})^\varkappa = \Sigma_\lambda (-1)^\lambda \binom{\varkappa}{\lambda} r_1^\lambda s_2^\lambda s_1^{\varkappa-\lambda} r_2^{\varkappa-\lambda}$$

$$\cdot \Sigma_\mu \binom{n-\varkappa}{\mu} r_1^\mu x_1^\mu r_2^{n-\varkappa-\mu} x_2^{n-\varkappa-\mu} \Sigma_\nu \binom{m-\varkappa}{\nu} s_1^\nu x_1^\nu s_2^{m-\varkappa-\nu} x_2^{m-\varkappa-\nu}$$

$$= \Sigma_{\lambda,\mu,\nu} (-1)^\lambda \binom{\varkappa}{\lambda} \binom{n-\varkappa}{\mu} \binom{m-\varkappa}{\nu} r_1^{\lambda+\mu} s_1^{\varkappa-\lambda+\nu} r_2^{n-\lambda-\mu} s_2^{m+\lambda-\nu-\varkappa} x_1^{\mu+\nu} x_2^{m+n-2\varkappa-\mu-\nu}$$

und wenn man

$$\mu + \nu = \varrho \qquad \lambda + \mu = \sigma$$

setzt:

$$(\overline{rs})^\varkappa = \Sigma_{\mu\varrho\sigma} (-1)^{\sigma-\mu} \binom{\varkappa}{\sigma-\mu} \binom{n-\varkappa}{\mu} \binom{m-\varkappa}{\varrho-\mu} r_1^\sigma s_1^{\varkappa+\varrho-\sigma} r_2^{n-\sigma} s_2^{m-\varkappa+\sigma-\varrho} x_1^\varrho x_2^{m+n-2\varkappa-\varrho}.$$

Aus dieser Formel erhält man für die Coefficienten der Elementarcovariante $(\overline{rs})^\varkappa$ die Werthe:

$$(\overline{rs})_\varrho^\varkappa = \Sigma_\sigma r_1^\sigma s_1^{\varkappa+\varrho-\sigma} r_2^{n-\sigma} s_2^{m-\varkappa+\sigma-\varrho} \Sigma_\mu (-1)^{\sigma-\mu} \binom{\varkappa}{\sigma-\mu} \binom{n-\varkappa}{\mu} \binom{m-\varkappa}{\varrho-\mu}$$

und nach F. (II):

$$\text{(III)} \quad (rs)_\varrho^\varkappa = \Sigma_\sigma \frac{c_{\sigma,\varkappa+\varrho-\sigma}}{\binom{n}{\sigma}\binom{m}{\varkappa+\varrho-\sigma}} \Sigma_\mu (-1)^{\sigma-\mu} \binom{\varkappa}{\sigma-\mu} \binom{n-\varkappa}{\mu} \binom{m-\varkappa}{\varrho-\mu}.$$

Für die Coefficienten der Elementarcovariante $(\overline{rs})^0 = r_x^n s_x^m$ erhält man hieraus die Werthe:

$$\text{(IV)} \qquad (\overline{rs})_\varrho^0 = \Sigma_\sigma \frac{c_{\sigma,\varrho-\sigma}}{\binom{n}{\sigma}\binom{m}{\varrho-\sigma}} \binom{n}{\sigma}\binom{m}{\varrho-\sigma} = \Sigma_\sigma c_{\sigma,\varrho-\sigma},$$

welche man übrigens auch aus F. (I) ableiten kann, wenn man darin $y = x$ setzt.

Nächst den Elementarcovarianten gehören zu den einfachsten Covarianten von F diejenigen symbolischen Produkte, welche nur ein Symbolenpaar rs enthalten, in denen aber zwei Reihen Variabeln x und y auftreten. Es sind dies die symbolischen Produkte

$$(rs)^\varkappa r_x^{n-\varkappa-\lambda} r_y^\lambda s_x^{m-\varkappa-\mu} s_y^\mu;$$

zu ihnen gehört die Form $F' = r_x^n s_y^m$ selbst.

Diese Covarianten (welche ich Polaren von F nenne) *lassen sich in Reihen entwickeln, deren Glieder Polaren der Elementarcovarianten sind, multiplicirt in Potenzen der Determinante* (xy).

Beweis.

Dieser Satz gilt offenbar für diejenigen symbolischen Produkte, welche den (symbolischen) Factor (rs) m mal enthalten, da dieselben Polaren der Elementarcovariante

$$(\overline{rs})^m = (rs)^m r_x^{n-m}$$

sind. Beweist man ihn also für ein symbolisches Produkt:

$$G = (rs)^\varkappa r_x^{n-\varkappa-\lambda} r_y^\lambda s_x^{m-\varkappa-\mu} s_y^\mu,$$

welches den Factor (rs) $\varkappa$ mal enthält unter der Annahme, er gelte bereits für diejenigen symbolischen Produkte, welche ihn mehr als $\varkappa$ mal enthalten, dann gilt er allgemein.

Die Form G ist nun eines der Glieder, welche bei der Bildung der Polare $(\overline{rs})^\varkappa_{y^{\lambda+\mu}}$ entstehen (vgl. Mathem. Ann. 2. Bd., S. 232) und die Differenz $G - (\overline{rs})^\varkappa_{y^{\lambda+\mu}}$ ist ein Aggregat symbolischer Produkte, welche den Factor (rs) mehr als $\varkappa$ mal enthalten, also nach obiger Annahme durch Polaren der Elementarcovarianten ausdrückbar sind. Mithin gilt dies auch für G.

Da die Producte von Polaren der Elementarcovarianten und Potenzen der Determinante (xy), deren Aggregat nach diesem Satze G wird, in den Variabeln x und y von denselben Graden wie G selbst sein müssen, also in den x vom Grade $m + n - 2\varkappa - \lambda - \mu$ und in den y vom Grade $\lambda + \mu$, so sind diese Glieder:

$$(rs)^\varkappa_{y^{\lambda+\mu}} \quad (rs)^{\varkappa+1}_{y^{\lambda+\mu-1}}(xy) \quad (rs)^{\varkappa+2}_{y^{\lambda+\mu-2}}(xy)^2 \ldots\ldots$$

und man hat eine Relation der Form:

$$(V) \qquad G = \Sigma_\nu c_\nu (\overline{rs})^{\varkappa+\nu}_{y^{\lambda+\mu-\nu}}(xy)^\nu,$$

in welcher die Coefficienten c_ν numerische Werthe besitzen.

Diese Coefficienten c_ν *sind eindeutig.*

Beweis.

Gäbe es für die Covariante G mehrere Reihenentwickelungen dieser Art, dann bestände zwischen den Polaren der Elementarcovarianten eine Relation der Form:

$$0 = \Sigma_\nu C_{\varkappa+\nu}(\overline{rs})^{\varkappa+\nu}_{y^{\lambda+\mu-\nu}}(xy)^\nu,$$

in welcher nicht sämmtliche numerische Coefficienten verschwinden. Ist $C_{\varrho+\nu}$ der erst nicht verschwindende Coefficient, dann wird unsere Relation:

$$\Sigma_\nu C_{\varrho+\nu} (\overline{rs})^{\varrho+\nu}_{y^{\lambda+\mu+\varkappa-\varrho-\nu}} (xy)^\nu = 0.$$

Da für $x = y$ diese Gleichung in $C_{\varrho+\nu} = 0$ übergeht, so ist sie unmöglich.

Für einige der symbolischen Produkte G haben die numerischen Coefficienten c einfach ausdrückbare Werthe. Es sind dies zunächst diejenigen symbolischen Produkte G, welche weder den (symbolischen) Factor r_y, noch den (symbolischen) Factor s_x enthalten, nämlich die symbolischen Produkte:

$$G = (rs)^\varkappa r_x^{n-\varkappa} s_y^{m-\varkappa};$$

zu ihnen gehört die Form F selbst.

Da die numerischen Coefficienten c_ν in ihren Reihenentwickelungen von den Zahlen $\varkappa$ und ν abhängen, so will ich sie durch $c_\nu = F(\varkappa, \nu)$ bezeichnen.

Die Reihe (V) wird dann:

$$\text{(VI)} \qquad (rs)^\varkappa r_x^{n-\varkappa} s_y^{m-\varkappa} = \Sigma_\nu F(\varkappa, \nu) (\overline{rs})^{\varkappa+\nu}_{y^{m-\varkappa-\nu}} (xy)^\nu.$$

Ich gehe an die Berechnung der Coefficienten $F(\varkappa, \nu)$. Setzt man in der Reihe (VI) $x = y$, dann reducirt sie sich auf ihr Anfangsglied; es wird dann:

$$(rs)^\varkappa r_x^{n-\varkappa} s_x^{m-\varkappa} = F(\varkappa, 0) (\overline{rs})^\varkappa;$$

es ist also der erste Coefficient:

$$\text{(VII)} \qquad F(\varkappa, 0) = 1.$$

Die übrigen Coefficienten berechne ich dadurch, dass ich für verschiedene Zahlen $\varkappa$ die Covarianten $(rs)^\varkappa r_x^{n-\varkappa} s_y^{m-\varkappa}$ in Reihen entwickle und diese Reihen sodann miteinander vergleiche.

Differentiirt man die Formel (VI) nach den Variabeln x und ersetzt die Incremente durch y, dann gelangt man zu der Gleichung:

$$(n-\varkappa)(rs)^\varkappa r_x^{n-\varkappa-1} r_y s_y^{m-\varkappa} = \Sigma_\nu (n-\varkappa-\nu) F(\varkappa, \nu) (\overline{rs})^{\varkappa+\nu}_{y^{m-\varkappa-\nu+1}} (xy)^\nu,$$

welche, wenn man nach y differentiirt und die Incremente durch x ersetzt, in die folgende übergeht:

$$(n-\varkappa)(rs)^\varkappa r_x^{n-\varkappa} s_y^{m-\varkappa} + (n-\varkappa)(m-\varkappa)(rs)^\varkappa r_x^{n-\varkappa-1} r_y s_y^{m-\varkappa-1} s_x$$
$$= \Sigma_\nu (n-\varkappa-\nu)(m-\varkappa-\nu+1) F(\varkappa, \nu) (\overline{rs})^{\varkappa+\nu}_{y^{m-\varkappa-\nu}} (xy)^\nu.$$

Multiplicirt man nun die Formel (VI) mit $(n-\varkappa)(m-\varkappa+1)$ und zieht sodann diese Formel ab, dann wird (wenn man mit (xy) dividirt):

$$(m-\varkappa)(n-\varkappa)(rs)^{\varkappa+1} r_x^{n-\varkappa-1} s_y^{m-\varkappa-1}$$
$$= \Sigma_\nu \nu (m+n-\nu-2\varkappa+1) F(\varkappa, \nu) (\overline{rs})^{\varkappa+\nu}_{y^{m-\varkappa-\nu}} (xy)^{\nu-1}.$$

Vergleicht man diese Reihe mit derjenigen, welche aus (VI) da-

durch entsteht, dass man x um 1 vermehrt und ν um 1 vermindert (was erlaubt ist), nämlich:

$$(rs)^{x+1} r_x^{n-x-1} s_y^{m-x-1} = \Sigma_\nu F(x+1, \nu-1) \overline{(rs)}^{x+\nu}_{y^{m-x-\nu}} (xy)^{\nu-1}$$

dann ergeben sich für die Coefficienten $F(x, \nu)$ die Relationen:

(VIII) $(m-x)(n-x) F(x+1, \nu-1) = \nu(m+n-\nu-2x+1) F(x, \nu)$.

Für $\nu = 1$ und 2 wird demnach:

$$F(x, 1) = \frac{\binom{m-x}{1}\binom{n-x}{1}}{\binom{m+n-2x}{1}}$$

$$F(x, 2) = \frac{\binom{m-x}{2}\binom{n-x}{2}}{\binom{m+n-2x-1}{2}}.$$

Da nach Gleichung (VIII), welche man so schreiben kann:

$$F(x, \nu) : \frac{\binom{m-x}{\nu}\binom{n-x}{\nu}}{\binom{m+n-2x-\nu+1}{\nu}} = F(x+1, \nu-1) : \frac{\binom{m-x-1}{\nu-1}\binom{n-x-1}{\nu-1}}{\binom{m+n-2x-\nu}{\nu-1}}$$

das Verhältniss $F(x, \nu) : \dfrac{\binom{m-x}{\nu}\binom{n-x}{\nu}}{\binom{m+n-2x-\nu+1}{\nu}}$ sich nicht ändert, wenn man gleichzeitig x um 1 vermehrt und ν um 1 vermindert, so bleibt es auch constant, wenn man gleichzeitig x um eine beliebige Zahl (also auch ν) vermehrt und ν um dieselbe vermindert. Es ist daher auch:

$$F(x, \nu) : \frac{\binom{m-x}{\nu}\binom{n-x}{\nu}}{\binom{m+n-2x-\nu+1}{\nu}} = F(x+\nu, 0) : \frac{\binom{m-x-\nu}{0}\binom{n-x-\nu}{0}}{\binom{m+n-2x-2\nu+1}{0}} = 1:1$$

(s. F. VII)

also:
$$F(x, \nu) = \frac{\binom{m-x}{\nu}\binom{n-x}{\nu}}{\binom{m+n-2x-\nu+1}{\nu}}.$$

Trägt man diesen Werth statt $F(x, \nu)$ in die Reihe (VI) ein, dann gelangt man zu der Reihe

(IX) $$(rs)^x r_x^{n-x} s_y^{m-x} = \Sigma_\nu \frac{\binom{m-x}{\nu}\binom{n-x}{\nu}}{\binom{m+n-2x-\nu+1}{\nu}} \overline{(rs)}^{x+\nu}_{y^{m-x-\nu}} (xy)^\nu,$$

welche für $x = 0$ in die folgende übergeht:

(X) $$F = r_x^n s_y^m = \Sigma \frac{\binom{m}{\nu}\binom{n}{\nu}}{\binom{m+n-\nu+1}{\nu}} \overline{(rs)}^{\nu}_{y^{m-\nu}} (xy)^\nu.$$

Beispiele.

$$r_x s_y = (\overline{rs})^0_y + \tfrac{1}{2}(rs)(xy)$$
$$r_x^2 s_y^2 = (\overline{rs})^0_{y^2} + (\overline{rs})_y(xy) + \tfrac{1}{3}(rs)^2(xy)^2$$
$$r_x^3 s_y^2 = (\overline{rs})^0_{y^2} + \tfrac{6}{5}(\overline{rs})_y(xy) + \tfrac{1}{2}(\overline{rs})^2(xy)^2$$
$$r_x^4 s_y^2 = (\overline{rs})^0_{y^2} + \tfrac{4}{3}(\overline{rs})_y(xy) + \tfrac{3}{8}(\overline{rs})^2(xy)^2$$
$$r_x^3 s_y^3 = (\overline{rs})^0_{y^3} + \tfrac{3}{2}(\overline{rs})_{y^2}(xy) + \tfrac{9}{10}(\overline{rs})^2_y(xy)^2 + \tfrac{1}{4}(rs)^3(xy)^3$$
$$r_x^4 s_y^3 = (\overline{rs})^0_{y^3} + \tfrac{12}{7}(\overline{rs})_{y^2}(xy) + \tfrac{6}{5}(\overline{rs})^2_y(xy)^2 + \tfrac{2}{5}(\overline{rs})^3(xy)^3$$
$$r_x^4 s_y^4 = (\overline{rs})^0_{y^4} + 2(\overline{rs})_{y^3}(xy) + \tfrac{12}{7}(\overline{rs})^2_{y^2}(xy)^2 + \tfrac{4}{5}(\overline{rs})^3_y(xy)^3 + \tfrac{1}{5}(rs)^4(xy)^4.$$

Die Formel (X) lehrt, dass, wie die Formen $(\overline{rs})^\varkappa$ als Covarianten der Form F angesehen wurden, umgekehrt diese Form eine simultane Covariante der Formen $(\overline{rs})^\varkappa$ ist und dass daher alle Covarianten und Invarianten von F simultane Covarianten und Invarianten der Formen $(\overline{rs})^\varkappa$ sind. Sie als solche darzustellen, ist das wesentlichste Ziel dieser Betrachtungen. Zunächst kann man die Coefficienten $c_{i\varkappa}$ in F linear durch die Coefficienten der Elementar-Covarianten ausdrücken. Zu dem Ende entwickle man die Factoren $(\overline{rs})^\nu_{y^{m-\nu}}$ und $(xy)^\nu$ in Reihen, welche nach Potenzen von den Variabeln x und y fortschreiten, und trage diese entwickelten Werthe in Formel (X) ein. Nach § 1. Formel (III) ist:

$$(\overline{rs})^\nu_{y^{m-\nu}} = \Sigma_{\lambda\mu} \frac{\binom{n-\nu}{\lambda}\binom{m-\nu}{\mu}}{\binom{m+n-2\nu}{\lambda+\mu}} (\overline{rs})^\nu_{\lambda+\mu}\, x_1^\lambda y_1^\mu x_2^{n-\nu-\lambda} y_2^{m-\nu-\mu},$$

ferner ist:

$$(xy)^\nu = (x_1y_2 - y_1x_2)^\nu = \Sigma_\varkappa \binom{\nu}{\varkappa} (-1)^\varkappa x_1^\varkappa y_2^\varkappa x_2^{\nu-\varkappa} y_1^{\nu-\varkappa},$$

mithin nach Formel (X):

$$c_{p,q} = \Sigma_{\varkappa\lambda\mu\nu} \frac{\binom{m}{\nu}\binom{n}{\nu}\binom{m-\nu}{\mu}\binom{n-\nu}{\lambda}\binom{\nu}{\varkappa}}{\binom{m+n-\nu+1}{\nu}\binom{m+n-2\nu}{\lambda+\mu}} (-1)^\varkappa (\overline{rs})^\nu_{\lambda+\mu} x_1^{\varkappa+\lambda} y_1^{\mu+\nu-\varkappa} x_2^{n-\varkappa-\lambda} y_2^{m-\nu-\mu+\varkappa}.$$

Setzt man in dieser Entwicklung auf beiden Seiten die Coefficienten gleich hoher Potenzen von x und y einander gleich, dann wird (vgl. § 2. Formel I)

$$c_{p,q} = c_{\varkappa+\lambda,\,\mu+\nu-\varkappa} = \Sigma \frac{\binom{m}{\nu}\binom{n}{\nu}\binom{m-\nu}{\mu}\binom{n-\nu}{\lambda}\binom{\nu}{\varkappa}(-1)^\varkappa}{\binom{m+n-\nu+1}{\nu}\binom{m+n-2\nu}{\lambda+\mu}} (\overline{rs})^\nu_{\lambda+\mu}$$

wo die Summe rechts über alle Werthe $\varkappa$, λ, μ, ν auszudehnen ist, welche den Gleichungen genügen:

$$p = \varkappa + \lambda \qquad q = \mu + \nu - \varkappa.$$

Trägt man hieraus die Werthe von λ und μ in unsere Relation ein, dann erhält man die Formel:

$$(XI)\quad c_{p,q} = \Sigma_{\varkappa,\nu} \frac{\binom{m}{\nu}\binom{n}{\nu}\binom{m-\nu}{q-\nu+\varkappa}\binom{n-\nu}{p-\varkappa}\binom{\nu}{\varkappa}(-1)^{\varkappa}}{\binom{m+n-\nu+1}{\nu}\binom{m+n-2\nu}{p+q-\nu}} (\overline{rs})^{\nu}_{p+q-\nu},$$

welche mit den Formeln (III) und (IV) § 12. übereinstimmen muss. In dem Werthe von $c_{p,q}$ kommen nur Coefficienten vor, welche von der Summe der Indices abhängen, so dass alle Coefficienten $c_{p,q}$ bei denen diese Summe constant ist, von denselben Coefficienten $(\overline{rs})^{\nu}_{\varrho}$ abhängen. Diese letzteren Coefficienten sind völlig von einander unabhängig.

Die Formel (X) ist mehrerer Anwendungen fähig, von denen ich jedoch nur die wichtigsten beiden hier erwähnen will.

Ist P irgend ein symbolisches Product, in welchem (unter Anderem) die Variabeln x und y vorkommen, die ersteren im n^{ten} Grade, die letzteren im m^{ten} Grade. Man kann dann $P = r_x^n s_y^m$ setzen und erhält für die Elementar-Covarianten $(\overline{rs})^{\varkappa}$ symbolische Produkte, welche eine Reihe Variabeln weniger enthalten als P. Somit ist P ein Aggregat von Polaren solcher Covarianten.

Eine zweite Anwendung von Formel (X) betrifft die Zurückführung symbolischer Producte auf Uebereinanderschiebungen. Ersetzt man in ihr die Variabele y durch die Symbole Θ (y_1 durch Θ_2, y_2 durch $-\Theta_1$) einer Form $\Theta = \Theta_x^p$ und multiplicirt man dann mit Θ_x^{p-m}, dann gelangt man zu der Formel:

$$(XII)\qquad \Theta_x^{p-m} r_x^n (s\Theta)^m = \Sigma_{\nu} \frac{\binom{m}{\nu}\binom{n}{\nu}(-1)^{\nu}}{\binom{m+n-\nu+1}{\nu}} \left((\overline{rs})^{\nu}, \vartheta\right)^{m-\nu}.$$

Die Formel (X) und somit auch die Formel (XII) lässt sich durch eine allgemeinere ersetzen. Differentiirt man nämlich Formel (X) λ Male hintereinander nach den Variabeln x und ersetzt die Incremente durch die y, dann entsteht die Formel:

$$(XIII)\qquad r_x^{n-\lambda} r_y^{\lambda} s_y^m = \Sigma_{\nu} \frac{\binom{m}{\nu}\binom{n-\lambda}{\nu}}{\binom{m+n-\nu+1}{\nu}} (\overline{rs})^{\nu}_{y^{m-\nu+\lambda}} (xy)^{\nu}$$

und wenn man wieder die y durch die Symbole Θ ersetzt:

$$(XIV)\quad (r\Theta)^{\lambda}(s\Theta)^m r_x^{n-\lambda}\Theta_x^{r-m-\lambda} = \Sigma_{\nu} \frac{\binom{m}{\nu}\binom{n-\lambda}{\nu}(-1)^{\nu}}{\binom{m+n-\nu+1}{\nu}} \left((\overline{rs})^{\nu}, \Theta\right)^{m-\nu}_{\lambda}.$$

Diese Formel dient ursprünglich dazu, symbolische Produkte als Aggregate von Uebereinanderschiebungen darzustellen; man kann sie

indess dazu benutzen, zwischen den letzteren lineare Relationen herzustellen, indem man dasselbe symbolische Product nach verschiedenen Arten in Reihen von Uebereinanderschiebungen entwickelt.

§ 3.

Symmetrische Formen mit 2 Reihen Veränderlicher.

Von besonderer Wichtigkeit sind diejenigen Formen:

(I) $$F = r_x^n s_y^n = \Sigma c_{ix} x_1^i y_1^x x_2^{n-x} y_2^{n-x}$$

welche sich nicht ändern, wenn man die Variabeln x und y mit einander vertauscht. Ist F eine solche symmetrische Form, dann bestehen zwischen ihren $(n+1)^2$ Coefficienten die $\frac{n \cdot n+1}{2}$ Relationen:

(II) $$c_{ix} = c_{xi},$$

so dass nur $\frac{n+1 \cdot n+2}{2}$ unter ihnen unabhängig von einander sind.

Da für diese Formen F

$$r_x^n s_y^m = r_y^n s_x^n,$$

so darf man in jedem symbolischen Producte, in welchem ein Symbolenpaar rs vorkommt, welches F darstellt, diese Symbole mit einander vertauschen. Diejenigen Elementar-Covarianten

$$(\overline{rs})^\nu = r_x^{n-\nu} s_x^{n-\nu} (rs)^\nu,$$

für welche die Zahl ν ungerade ist, ändern bei dieser Vertauschung ihr Vorzeichen und sind daher identisch 0.

In den Reihen (X) und (XIII) des § 2. darf man daher die ungeraden Glieder weglassen und sie in der Form schreiben:

(III) $$r_x^n s_y^n = \Sigma_\nu \frac{\binom{n}{2\nu}\binom{n}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu+1}{2\nu}} (\overline{rs})^{2\nu}_{y^{n-2\nu}} (xy)^{2\nu}.$$

(IV) $$r_x^{n-\lambda} r_y^\lambda s_y^n = \Sigma_\nu \frac{\binom{n-\lambda}{2\nu}\binom{n}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu+1}{2\nu}} (\overline{rs})^{2\nu}_{y^{n+\lambda-2\nu}} (xy)^{2\nu}.$$

Die Elementar-Covarianten $(\overline{rs})^0, (\overline{rs})^2 \ldots (\overline{rs})^{2n}$ besitzen zusammen $\frac{n+1 \cdot n+2}{2}$ Coefficienten, sie hängen mit diesen durch die Relationen zusammen:

V) $$(\overline{rs})^{2x}_\varrho = \Sigma_\sigma \frac{c_{\sigma,\, 2x+\varrho-\sigma}}{\binom{n}{\sigma}\binom{n}{2x+\varrho-\sigma}} \Sigma_\mu (-1)^{\sigma-\mu} \binom{2x}{\sigma-\mu}\binom{n-2x}{\mu}\binom{n-2x}{\varrho-\mu}$$

VI) $$(\overline{rs})^0_\varrho = \Sigma_\sigma c_{\sigma,\, \varrho-\sigma}$$

} vgl. § 2. Formel III u. IV.

und: (vgl. Formel XI)

$$\text{(VII)}\quad c_{pq} = \Sigma_\nu \frac{\binom{n}{2\nu}\binom{n}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu+1}{2\nu}} (\overline{rs})^{2\nu}_{p+q-2\nu} \Sigma_\varkappa \binom{n-2\nu}{q-2\nu-\varkappa}\binom{n-2\nu}{p-\varkappa}\binom{2\nu}{\varkappa}(-1)^\varkappa,$$

welche sich auf einander zurückführen lassen.

Die symmetrischen Formen F besitzen eine Anzahl Covarianten, welche sich ebenso wie F selbst nach Polaren von Elementar-Covarianten mit einfach ausdrückbaren Coefficienten entwickeln lassen; nämlich die Polaren:

$$P = (rs)^{2\varkappa} r_x^{p-\varkappa} s_x^{p-\varkappa} r_y^{q-\varkappa} s_y^{q-\varkappa} \qquad \text{(wo } p+q=n \text{ ist)}$$

und:

$$Q = r_{x_1} r_{x_2} \ldots r_{x_n} s_{x_1} s_{x_2} \ldots s_{x_n}.$$

Die Reihe, in welche die Covariante P entwickelbar ist, hat die Form:

$$\text{(VIII)}\quad (rs)^{2\varkappa} r_x^{p-\varkappa} s_x^{p-\varkappa} r_y^{q-\varkappa} s_y^{q-\varkappa} = \Sigma_\nu F(\varkappa, \nu) (\overline{rs})^{2\varkappa+2\nu}_{y^{2q-2\varkappa-2\nu}} (xy)^{2\nu}.$$

In derselben bedeuten die Grössen $F(\varkappa, \nu)$ numerische Coefficienten, welche ich in derselben Weise, wie bei der obigen Aufgabe berechnen will. Für $x = y$ wird:

$$(rs)^{2\varkappa} r_x^{n-2\varkappa} s_x^{n-2\varkappa} = F(\varkappa, 0) (\overline{rs})^{2\varkappa}$$

also

$$\text{(IX)}\qquad F(\varkappa, 0) = 1.$$

Um die übrigen Coefficienten zu berechnen, differentiire man die Formel (VIII) nach den Variabeln x und ersetze die Incremente durch y. Man erhält so die Formel:

$$2(p-\varkappa)(rs)^{2\varkappa} r_x^{p-\varkappa-1} s_x^{p-\varkappa} r_y^{q-\varkappa+1} s_y^{q-\varkappa}$$
$$= \Sigma_\nu 2(p-\varkappa-\nu) F(\varkappa, \nu) (\overline{rs})^{2\nu}_{y^{2q-2\varkappa-2\nu+1}} (xy)^{2\nu}$$

welche, wenn man nach den Variabeln y differentiirt und die Incremente durch x ersetzt, in die folgende Gleichung übergeht:

$$2(p-\varkappa)(q-\varkappa+1)(rs)^{2\varkappa} r_x^{p-\varkappa} s_x^{p-\varkappa} r_y^{q-\varkappa} s_y^{q-\varkappa}$$
$$+ 2(p-\varkappa)(q-\varkappa)(rs)^{2\varkappa} r_x^{p-\varkappa-1} s_x^{p-\varkappa+1} r_y^{q-\varkappa+1} s_y^{q-\varkappa+1}$$
$$= \Sigma_\nu 2(p-\varkappa-\nu)(2q-2\varkappa-2\nu+1) F(\varkappa, \nu) (\overline{rs})^{2\nu}_{y^{2q-2\varkappa-2\nu}} (xy)^{2\nu}.$$

Zieht man von derselben die Formel (VIII) ab, nachdem man diese letztere mit der Zahl $2(p-\varkappa)(2q-2\varkappa+1)$ multiplicirt hat, dann erhält man die Reihe:

$$(p-\varkappa)(q-\varkappa)(rs)^{2\varkappa+2} r_x^{p-\varkappa-1} s_x^{p-\varkappa-1} r_y^{q-\varkappa-1} s_y^{q-\varkappa-1} (xy)^2$$
$$= -2\Sigma_\nu \nu(2n-4\varkappa-2\nu+1) F(\varkappa, \nu) (\overline{rs})^{2\varkappa+2\nu}_{y^{2q-2\varkappa-2\nu}} (xy)^{2\nu}.$$

Ersetzt man hingegen in Formel (VIII) die Buchstaben x und ν durch $x+1$ und $\nu-1$, dann wird:

$$(rs)^{2x+2} r_x^{p-x-1} s_x^{p-x-1} r_y^{q-x-1} s_y^{q-x-1}$$
$$= \Sigma_\nu F(x+1,\ \nu-1)\,(\overline{rs})^{2x+2\nu}_{y^{2q-2x-2\nu}}\,(xy)^{2\nu-2}.$$

Vergleicht man in beiden die Coefficienten, dann erhält man die Relation:

$$(p-x)(q-x)\,F(x+1,\nu-1) = -2\nu(2n-4x-2\nu+1)\,F(x,\nu),$$

welche man auch in der Form schreiben kann:

$$F(x,\ \nu) : \frac{\nu!\binom{p-x}{\nu}\binom{q-x}{\nu}(-\frac{1}{2})^\nu}{2n-4x-2\nu+1\cdot 2n-4x-2\nu-1\cdots 2n-4x-4\nu+3}$$

$$= F(x+1,\nu-1) : \frac{(\nu-1)!\binom{p-x-1}{\nu-1}\binom{q-x-1}{\nu-1}(-\frac{1}{2})^{\nu-1}}{2n-4x-2\nu-1\cdot 2n-4x-2\nu-3\cdot\cdot 2n-4x-4\nu+3}.$$

Das Verhältniss des Coefficienten $F(x,\ \nu)$ zu dem Bruche

$$\frac{\nu!\binom{p-x}{\nu}\binom{q-x}{\nu}(-\frac{1}{2})^\nu}{2n-4x-2\nu+1\cdot 2n-4x-2\nu-1\cdots 2n-4x-4\nu+3}$$

ändert sich also nicht, wenn man ν um 1 vermindert und gleichzeitig x um 1 vermehrt; es ändert sich daher auch nicht, wenn man x um eine beliebige Zahl (also auch ν) vermehrt und ν um dieselbe vermindert. So erhält man die Proportion:

$$F(x,\nu) : \frac{\nu!\binom{p-x}{\nu}\binom{q-x}{\nu}(-\frac{1}{2})^\nu}{2n-4x-2\nu+1\cdots\cdots 2n-4x-4\nu+3} = F(x+\nu,0) : \frac{\binom{p-x-\nu}{0}\binom{q-x-\nu}{0}}{1} = 1:1$$

und man hat daher:

$$F(x,\ \nu) = \frac{\nu!\binom{p-x}{\nu}\binom{q-x}{\nu}(-\frac{1}{2})^\nu}{2n-4x-2\nu+1\cdot 2n-4x-2\nu-1\cdots 2n-4x-4\nu+3}$$

und, wenn man diesen Werth in Formel (VIII) einträgt:

$$(rs)^{2x} r_x^{p-x} s_x^{p-x} r_y^{q-x} s_y^{q-x} = \Sigma_\nu \frac{(-\frac{1}{2})^\nu\,\nu!\binom{p-x}{\nu}\binom{q-x}{\nu}(\overline{rs})^{2x+2\nu}_{y^{2q-2x-2\nu}}(xy)^{2\nu}}{2n-4x-2\nu+1\cdot 2n-4x-2\nu-1\cdots 2n-4x-4\nu+3}.$$

Für $x=0$ erhält man die Reihe:

$$(1)\quad r_x^p s_x^p r_y^q s_y^q = \Sigma_\nu \frac{(-\frac{1}{2})^\nu\,\nu!\binom{p}{\nu}\binom{q}{\nu}(\overline{rs})^{2\nu}_{y^{2q-2\nu}}(xy)^{2\nu}}{2n-2\nu+1\cdot 2n-2\nu-1\cdot 2n-2\nu-3\cdots 2n-4\nu+3}.$$

Schreibt man sie in der Form:

$$r_x^p s_x^p r_y^q s_y^q = \Sigma_\nu (-1)^\nu c_\nu (\overline{rs})^{2\nu}_{y^{2q+2\nu}}(xy)^{2\nu}$$

dann ist:

$$\ldots = 1 \quad c_1 = \tfrac{1}{2}\frac{p\cdot q}{2n-1} \quad c_2 = \tfrac{1}{2}\frac{\binom{p}{2}\binom{q}{2}}{2n-3\cdot 2n-5} \quad c_3 = \tfrac{3}{4}\frac{\binom{p}{3}\binom{q}{3}}{2n-5\cdot 2n-7\cdot 2n-9}\cdots\cdots$$

Beispiele.

$$r_x s_x r_y s_y = (\overline{rs})^0_{y^2} - \tfrac{1}{6}\ (rs)^2 (xy)^2$$
$$r_x^2 s_x^2 r_y s_y = (\overline{rs})^0_{y^2} - \tfrac{1}{5}\ (\overline{rs})^2 (xy)^2$$
$$r_x^2 s_x^2 r_y^2 s_y^2 = (\overline{rs})^0_{y^4} - \tfrac{2}{7}\ (\overline{rs})^2_{y^2} (xy)^2 + \tfrac{1}{30} (rs)^4 (xy)^4$$
$$r_x^3 s_x^3 r_y s_y = (\overline{rs})^0_{y^2} - \tfrac{3}{14} (\overline{rs})^2 (xy)^2.$$

Ersetzt man in Formel (X) die Variabeln y, wie diess im vorigen § geschehen ist, durch die Symbole ϑ einer Form $\vartheta = \vartheta_x^\mu$, dann erhält man die Formel:

(XI) $$r_x^p s_x^p \vartheta_x^{\mu - 2q} (r\vartheta)^q (s\vartheta)^q = \Sigma_\nu (-1)^\nu c_\nu \left[(rs)^{2\nu}, \vartheta\right]^{2q - 2\nu}$$

mittelst deren sich symbolische Producte durch Uebereinanderschiebungen ausdrücken lassen.

Beispiele.

$$\vartheta_x^{\mu-2} r_x s_x (r\vartheta)\ (s\vartheta) = \left[(\overline{rs})^0, \vartheta\right]^2 - \tfrac{1}{6}\ \vartheta \,.\, (rs)^2$$
$$\vartheta_x^{\mu-2} r_x^2 s_x^2 (r\vartheta)\ (s\vartheta) = \left[(\overline{rs})^0, \vartheta\right]^2 - \tfrac{1}{5}\ \vartheta \,.\, (\overline{rs})^2$$
$$\vartheta_x^{\mu-4} r_x^2 s_x^2 (r\vartheta)^2 (s\vartheta)^2 = \left[(\overline{rs})^0, \vartheta\right]^4 - \tfrac{2}{7}\ \left[(\overline{rs})^2, \vartheta\right]^2 + \tfrac{1}{30} (rs)^4 \,.\, \vartheta$$
$$\vartheta_x^{\mu-2} r_x^3 s_x^3 (r\vartheta)\ (s\vartheta) = \left[(\overline{rs})^0, \vartheta\right]^2 - \tfrac{3}{14} (\overline{rs})^2 \,.\, \vartheta\,.$$

Um die Covariante:

$$Q = r_{x_1} r_{x_2} r_{x_3} \ldots r_{x_n} s_{x_1} s_{x_2} \ldots s_{x_n}$$

in eine Reihe von Polaren zu entwickeln, gehe man von der Reihe (XII) für $r_x^n s_y^n$ aus und differentiire dieselbe n Male nach den Variabeln x und n Male nach den Variabeln y. Die Incremente ersetze man sowohl das eine wie das andere Mal durch die neuen Variabeln $x_1 x_2 x_3 \ldots x_n$.

Links erhält man dann die Covariante Q und rechts ein Aggregat von Polaren der Form:

$$G_{\nu,i} = (\overline{rs})^{2\nu}_{x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} \cdots x_{i_{2n-4\nu}}} \left(x_{i_{2n-4\nu+1}}, x_{i_{2n-4\nu+2}}\right)\left(x_{i_{2n-4\nu+3}}, x_{i_{2n-4\nu+4}}\right) \ldots \left(x_{i_{2n-1}}, x_{i_{2n}}\right)$$

in welcher die Zahlen

$$i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad \ldots \quad i_{2n}$$

eine Permutation der Zahlen

$$1 \quad 2 \quad 3 \ldots \quad n \quad 1 \quad 2 \quad 3 \ldots \quad n$$

bedeuten.

Da die Covariante Q in Bezug auf die Variabelen x symmetrisch ist, so werden in unsrer Reihe alle diejenigen Glieder, welche durch Vertauschung der Variabeln in einander übergehen, mit demselben Coefficienten behaftet sein. Bezeichnet man daher die Summe der Glieder, welche aus $G_{\nu i}$ durch Vertauschung der x entstehen, durch $H_{\nu i} = \Sigma G_{\nu i}$, dann hat die Reihe für Q die Form:

(XII) $$Q = \Sigma c_{\nu i} H_{\nu i}.$$

In der Summe $H_{\nu i} = \Sigma G_{\nu i}$ verschwinden nun zuvörderst alle diejenigen Glieder, bei denen die in demselben Klammerfactor auftretenden Indices i_ϱ und i_σ denselben Werth haben. Fasst man von den übrigen Gliedern von $H_{\nu i}$ je 2 zusammen, welche den Klammerfactor $(x_\alpha x_\beta)$ gemeinsam haben und in einander übergehn, wenn man die Variabeln x_α und x_β mit einander vertauscht, dann ergeben sich Glieder, welche diesen Factor quadratisch haben. Wendet man dieses Verfahren auf alle Klammerfactoren an, dann erhält man schliesslich in $H_{\nu i}$ nur Glieder, welche nur quadratische Klammerfactoren besitzen, also Glieder der Form:

$$\mathsf{K}_{\nu i} = (\overline{rs})^{2\nu}_{x^2_{\varkappa_1} x^2_{\varkappa_2} \dots x^2_{\varkappa_{n-\nu}}} \left(x_{\varkappa_{n-\nu+1}}, x_{\varkappa_{n-\nu+2}}\right)^2 \left(x_{\varkappa_{n-\nu+3}}, x_{\varkappa_{n-\nu+4}}\right)^2 \cdots \left(x_{\varkappa_{n-1}}, x_{\varkappa_n}\right)^2$$

wo die Zahlen $\varkappa_1 \varkappa_2 \dots \varkappa_n$ eine Permutation der Zahlen $1\,2 \dots n$ bedeuten. Bildet man alle verschiedenen Glieder, welche aus $\mathsf{K}_{\nu i}$ durch Vertauschung der Variabeln entstehen und summirt sie, dann erhält man bis auf einen numerischen Factor $H_{\nu i}$.

Somit kann man die Covariante Q in eine Reihe der Form entwickeln:

(XIII) $$Q = \Sigma_\nu C_\nu \Sigma_i \mathsf{K}_{\nu i}.$$

In derselben ist Alles bis auf die numerischen Coefficienten C_ν bekannt.

Um dieselben zu berechnen, setze man in Formel (XIII) p der Variabeln etwa $x_1 x_2 \dots x_p$ gleich x und die übrigen $n - p = q$ also $x_{p+1} x_{p+2} \dots x_n$ gleich y. Von den Gliedern der Summe $\Sigma_i \mathsf{K}_{\nu i}$ verschwinden dann diejenigen, welche eine Determinante $(x_\varrho x_\sigma)$ als Factor enthalten, bei der beide Indices $\varrho\sigma$ der Zahlenreihe $1\,2 \dots p$ oder beide der Zahlenreihe $p+1, p+2 \dots n$ angehören. Es bleiben also nur diejenigen $\mathsf{K}_{\nu i}$ übrig, bei denen für sämmtliche Klammerfactoren $(x_\varrho x_\sigma)$ der eine Index ϱ der Zahlenreihe $1\,2 \dots p$ und der andere Index σ der Zahlenreihe $p+1, p+2 \dots n$ angehört.

Diese Producte $\mathsf{K}_{\nu i}$ haben den Werth:

$$(\overline{rs})^{2\nu}_{y^{2q-2\nu}} (xy)^{2\nu}$$

und ihre Anzahl ist $\binom{p}{\nu}\binom{q}{\nu} \nu!$ so dass:

$$\Sigma \mathsf{K}_{\nu i} = \binom{p}{\nu}\binom{q}{\nu} \nu! \, (\overline{rs})^{2\nu}_{y^{2q-2\nu}} (xy)^{2\nu}$$

wird. Da Q in den Ausdruck $r_x^p s_x^p r_y^q s_y^q$ übergeht, so erhält man die Gleichung:

$$r_x^p s_x^p r_y^q s_y^q = \Sigma_\nu C_\nu \binom{p}{\nu}\binom{q}{\nu} \nu! \, (rs)^{2\nu}_{y^{2q-2\nu}} (xy)^{2\nu}.$$

Nach F. (X) ist nun aber:

$$r_x^p s_x^p r_y^q s_y^q = \Sigma_\nu \frac{(-\frac{1}{2})^\nu \binom{p}{\nu}\binom{q}{\nu} \nu!\,(rs)_{y^{2q-2\nu}}^{2\nu}(xy)^{2\nu}}{2n-2\nu+1\cdot 2n-2\nu-1\cdot 2n-2\nu-3\cdot\cdots\cdot 2n-4\nu+3},$$

mithin haben die Coefficienten C_ν die Werthe:

$$C_\nu = \frac{(-\frac{1}{2})^\nu}{2n-2\nu+1\cdot 2n-2\nu-1\cdot 2n-2\nu-3\cdot\cdots\cdot 2n-4\nu+3},$$

Trägt man sie in F. (XIII) ein, dann wird:

(XIV)
$$r_{x_1} r_{x_2} r_{x_3} \cdots r_{x_n} s_{x_1} s_{x_2} \cdots s_{x_n}$$
$$= \Sigma_\nu \frac{(-\frac{1}{2})^\nu \Sigma_i (\overline{rs})_{x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \cdots x_{i_{n-2\nu}}^2}^{2\nu} (x_{i_{n-2\nu+1}}, x_{i_{n-2\nu+2}})^2 \cdots (x_{i_{n-1}}, x_{i_n})^2}{2n-2\nu+1\cdot 2n-2\nu-1\cdot\cdots\cdot 2n-4\nu+3},$$

in welcher Gleichung die Summe Σ_i über alle diejenigen Permutationen $i_1, i_2 \ldots i_n$ der Zahlen $1, 2 \ldots n$ auszudehnen ist, welche verschiedene Glieder liefern. Die einzelnen Coefficienten C_ν haben die Werthe:

$$C_0 = 1; \quad C_1 = \frac{-\frac{1}{2}}{2n-1}; \quad C_2 = \frac{\frac{1}{4}}{2n-3\cdot 2n-5}; \quad C_3 = \frac{-\frac{1}{8}}{2n-5\cdot 2n-7\cdot 2n-9} \cdots\cdots$$

Beispiele.

$$r_{x_1} r_{x_2} r_{x_3} s_{x_1} s_{x_2} s_{x_3} = (\overline{rs})_{x_1^2 x_2^2 x_3^2}^0 - \tfrac{1}{10}\left\{(\overline{rs})_{x_1^2}^2 (x_2 x_3)^2 + (\overline{rs})_{x_2^2}^2 (x_3 x_1)^2 + (\overline{rs})_{x_3^2}^2 (x_1 x_2)^2\right\}$$

$$r_{x_1} r_{x_2} r_{x_3} r_{x_4} s_{x_1} s_{x_2} s_{x_3} s_{x_4} = (\overline{rs})_{x_1^2 x_2^2 x_3^2 x_4^2}^0 - \tfrac{1}{14}\left\{\begin{array}{l}(\overline{rs})_{x_1^2 x_2^2}^2 (x_3 x_4)^2 \\ (\overline{rs})_{x_1^2 x_3^2}^2 (x_2 x_4)^2 \\ (\overline{rs})_{x_1^2 x_4^2}^2 (x_2 x_3)^2 \\ (\overline{rs})_{x_2^2 x_3^2}^2 (x_1 x_4)^2 \\ (\overline{rs})_{x_2^2 x_4^2}^2 (x_1 x_3)^2 \\ (\overline{rs})_{x_3^2 x_4^2}^2 (x_1 x_2)^2\end{array}\right\} + \tfrac{1}{60}(\overline{rs})^4 \left\{\begin{array}{l}(x_1 x_2)^2 (x_3 x_4)^2 \\ (x_1 x_3)^2 (x_2 x_4)^2 \\ (x_1 x_4)^2 (x_1 x_3)^2\end{array}\right\}.$$

§ 4.

Die Resultante zweier Formen gleichen Grades.

Bei der Berechnung der Resultante R der Formen n^{ten} Grades:

$$f = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} x_2 + a_{n-2} x_1^{n-2} x_2^2 \ldots$$
$$\varphi = \alpha_n x_1^n + \alpha_{n-1} x_1^{n-1} x_2 + \alpha_{n-2} x_1^{n-2} x_2^2 \ldots$$

gehe ich von den von Herrn Cayley gegebenen (Crelle's J. Bd. 53, pag. 366) und in Herrn Baltzer's Determinantentheorie 3. Aufl., pag. 114 reproducirten Methoden aus, stelle sodann sowohl R als auch seine Variationen δR, $\delta_2 R \ldots$ als symbolische Produkte dar und leite endlich vermittelst dieser Darstellung einige Sätze über die Resultante ab. Herr Cayley betrachtet die in Bezug auf die Variabelnpaare x und y symmetrische Form:

$$\text{(I)} \quad F = \frac{f \cdot \varphi_{y^n} - \varphi \cdot f_{y^n}}{(xy)^n} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{x=0}^{x=n-1} c_{ix}\, x_1^{\,i} x_2^{\,n-1-i} y_1^{\,x} y_2^{\,n-1-x};$$

ich will dieselbe im Folgenden Cayley'sche Form nennen; sie verschwindet, welche Werthe man auch den Variabeln y ertheile, für diejenigen Werthe der x, welche den Gleichungen:

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = 0$$

gleichzeitig genügen; mithin verschwinden für diese Werthe auch die Coefficienten der einzelnen Potenzen der y, nämlich die Ausdrücke:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1} c_{ix}\, x_1^{\,i} x_2^{\,n-i},$$

ihre Determinante:

$$\text{(II)} \qquad R = \Sigma \pm c_{00}\, c_{11} \cdots c_{n-1,\,n-1}$$

ist die Resultante der Formen f und φ. Haben dieselben einen gemeinsamen Factor $x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1 = (x\omega)$, dann verschwindet die Determinante R und die Potenzen des Bruches $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ verhalten sich wie die Unterdeterminanten von R, welche ich mit Herrn Baltzer durch γ_{ix} bezeichnen will. Es besteht also die Proportion:

$$\gamma_{00} : \gamma_{01} : \gamma_{11} \cdots : \gamma_{n-1,\,n-1} = \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^0 : \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^1 : \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^2 \cdots : \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{2n-2};$$

aus ihr folgt, dass diejenigen Unterdeterminanten γ_{ix} einander gleich sind, bei denen die Summe der Indices $i + x$ denselben Werth besitzt. Man kann daher die Grössen γ_{ix} auch durch γ_{i+x} bezeichnen (vgl. Baltzer's Determinantentheorie) und die obige Proportion in der Form schreiben:

$$\gamma_0 : \gamma_1 : \gamma_2 : \cdots \gamma_{2n-2} = \omega_1^{\,0} \omega_2^{\,2n-2} : \omega_1 \omega_2^{\,2n-3} : \omega_1^{\,2} \omega_2^{\,2n-4} : \cdots \omega_1^{\,2n-2} \omega_2^{\,0}$$

oder durch:

$$\text{(III)} \qquad \omega_1^{\,\nu} \omega_2^{\,2n-2-\nu} = g\gamma_\nu,$$

wobei g einen Proportionalitätsfactor bedeutet. — Da ω den Gleichungen genügt:

$$f(\omega) = a_n \omega_1^{\,n} + a_{n-1} \omega_1^{\,n-1} \omega_2 + a_{n-2} \omega_1^{\,n-2} \omega_2^{\,2} \cdots = 0,$$
$$\varphi(\omega) = \alpha_n \omega_1^{\,n} + \alpha_{n-1} \omega_1^{\,n-1} \omega_2 + \alpha_{n-2} \omega_1^{\,n-2} \omega_2^{\,2} \cdots = 0,$$

so bestehen auch die Identitäten:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} a_n \gamma_{n+\nu} + a_{n-1} \gamma_{n+\nu-1} + a_{n-1} \gamma_{n+\nu-2} \cdots = 0 \\ \alpha_n \gamma_{n+\nu} + \alpha_{n-1} \gamma_{n+\nu-1} + \alpha_{n-2} \gamma_{n+\nu-2} \cdots = 0, \end{cases}$$

wenn man darin für ν eine der Zahlen

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \ldots n-2$$

einsetzt. Dieselben gelten, wenn die Resultante R verschwindet; mithin sind die Ausdrücke auf der linken Seite durch R theilbar. Da diese Ausdrücke in den Coefficienten von niederer Ordnung als R

sind, so kann dies nur stattfinden, wenn sie stets verschwinden. Die Formeln (IV) gelten daher auch dann, wenn man die Voraussetzung $R = 0$ fallen lässt.

Die Formeln (III) erhalten (Jacobi, Crelle's J. 15. Bd. pag. 107) eine zweckmässigere Form, wenn man die Covariante:

$$(V) \qquad \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} (-1)^{i+\varkappa} \binom{n-1}{i} \binom{n-1}{\varkappa} \gamma_{i\varkappa} x_1^{2n-2-i-\varkappa} x_2^{i+\varkappa} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2n-2} (-1)^{\lambda} \binom{2n-2}{\lambda} \gamma_{\lambda} x_1^{2n-2-\lambda} x_2^{\lambda} = \Theta$$

durch:

$$\Theta = \Theta_{2n-2} x_1^{2n-2} + \Theta_{2n-3} x_1^{2n-3} x_2 + \Theta_{2n-4} x_1^{2n-4} x_2^2 \ldots .$$

bezeichnet, also:

$$(VI) \qquad (-1)^{\lambda} \binom{2n-2}{\lambda} \gamma_{\lambda} = \Theta_{2n-2-\lambda}$$

setzt; man kann sie dann in die eine zusammenfassen:

$$(VII) \qquad g\Theta = (x_1 \omega_2 - x_2 \omega_1)^{2n-2} = (x\omega)^{2n-2}$$

und die Determinante R mittelst der Formeln:

$$(VIII) \qquad nR = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} c_{i\varkappa} \gamma_{i\varkappa} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2n-2} \gamma_{\lambda} \Sigma_i c_{i,\,\lambda-i} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2n-2} \frac{(-1)^{\lambda}}{\binom{2n-2}{\lambda}} \Theta_{2n-2-\lambda} \Sigma_i c_{i,\,\lambda-i}$$

aus ihren Unterdeterminanten resp. den Coefficienten der Form Θ berechnen.

Haben die Formen f und φ mehr als *einen* Factor gemeinsam, dann verschwinden die Unterdeterminanten γ_{λ} identisch, also auch die Covariante Θ, die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial R}{\partial c_{i\varkappa}}$ und die Variation der Resultante:

$$(IX) \qquad \delta R = \Sigma_{i\varkappa} \frac{\partial R}{\partial c_{i\varkappa}} \delta c_{i\varkappa} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1} \gamma_{i\varkappa} \delta c_{i\varkappa} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2n-2} \gamma_{\lambda} \delta \Sigma_i c_{i,\,\lambda-i} = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=2n-2} \frac{(-1)^{\lambda}}{\binom{2n-2}{\lambda}} \Theta_{2n-2-\lambda} \delta \Sigma_i c_{i,\,\lambda-i}$$

für beliebige Werthe der Incremente $\delta c_{i\varkappa}$. — Haben die Formen f und φ mehr als zwei Factoren gemein, dann verschwindet ausser R und δR die zweite Variation der Resultante:

$$\delta_2 R = \Sigma_{i\varkappa} \Sigma_{i'\varkappa'} \frac{\partial_2 R}{\partial c_{i\varkappa} \cdot \partial c_{i'\varkappa'}} \delta c_{i\varkappa} \delta c_{i'\varkappa'} .$$

Haben sie mehr als 3 Factoren gemein, dann verschwindet ausserdem die 3^{te} Variation u. s. w.; haben sie endlich sämmtliche n Wurzeln

gemein, dann verschwindet die $(n-1)^{te}$ Variation $\delta_{n-1}R$, d. h. es verschwinden alle Elemente c_{ix}.

Um die Resultante durch ein symbolisches Produkt darzustellen, bezeichne ich die Form F symbolisch durch (vgl. § 2):

$$(X)\qquad \begin{cases} F = (r^{(1)}\,x_1 + r^{(2)}\,x_2)^{n-1}\,(s^{(1)}\,y_1 + s^{(2)}\,y_2)^{n-1} \\ \quad = (r_1^{(1)}\,x_1 + r_1^{(2)}\,x_2)^{n-1}\,(s_1^{(1)}\,y_1 + s_1^{(2)}\,y_2)^{n-1} \ldots . \\ \quad = r_x^{n-1}\,s_y^{n-1} = r_{1,x}^{n-1}\,s_{1,y}^{n-1} = r_{2,x}^{n-1}\,s_{2,y}^{n-1} \ldots \ldots \end{cases}$$

Hierdurch erhält man die folgenden symbolischen Ausdrücke für die Coefficienten c_{ix} und die Resultante R [vgl. § 2, F. (II)]:

$$(XI)\qquad c_{ix} = \binom{n-1}{i}\binom{n-1}{x}\, r^{(1)\,i}\, s^{(1)\,x}\, r^{(2)\,n-1-i}\, s^{(2)\,n-1-x}$$

$$R = \Sigma \pm r^{(1)\,n-1}\, s^{(1)\,n-1} \cdot \binom{n-1}{1} r_1^{(1)\,n-2}\, r_1^{(2)} \binom{n-1}{1} s_1^{(1)\,n-2}\, s_1^{(2)} \ldots . r_{n-1}^{(2)\,n-1}\, s_{n-1}^{(2)\,n-1}$$

$$= \left\{\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{2}\ldots\binom{n-1}{n-1}\right\}^2 r^{(1)\,n-1} \cdot r_1^{(1)\,n-2}\, r_1^{(2)} \cdot r_2^{(1)\,n-3}\, r_2^{(2)\,2} \ldots r_{n-1}^{(2)\,n-1}$$

$$\cdot \Sigma \pm s^{(1)\,n-1} \cdot s_1^{(1)\,n-2}\, s_1^{(2)} \ldots s_{n-1}^{(2)\,n-1} .$$

Die in dieser Formel auftretenden n Symbolenpaare:

$$r\,s\,;\quad r_1\,s_1\,;\quad r_2\,s_2\,;\quad \ldots\quad r_{n-1}\,s_{n-1}$$

stellen alle dieselbe Form F dar; vertauscht man sie unter einander, dann entstehen $n!$ Formeln, welche man zu der folgenden combiniren kann:

$$R = \frac{\left\{\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{2}\binom{n-1}{n-1}\right\}}{n!}\, \Sigma \pm r^{(1)\,n-1} \cdot r_1^{(1)\,n-2}\, r_1^{(2)} \ldots r_{n-1}^{(2)\,n-1}$$

$$\cdot \Sigma \pm s^{(1)\,n-1} \cdot s_1^{(1)\,n-2}\, s_1^{(2)} \ldots . s_{n-1}^{(2)\,n-1} .$$

Die Factoren des Ausdrucks auf der rechten Seite:

$$\Sigma \pm r^{(1)\,n-1} \cdot r_1^{(1)\,n-2}\, r_1^{(2)} \ldots . r_{n-1}^{(2)\,n-1}$$

und

$$\Sigma \pm s^{(1)\,n-1} \cdot s_2^{(1)\,n-2}\, s_1^{(2)} \ldots . s_{n-1}^{(2)\,n-1}$$

sind gleich den Produkten aller symbolischen Determinanten der Form:

$$(r_i\,r_x)\qquad (s_i\,s_x),$$

mithin stellt das symbolische Produkt

$$(XII)\qquad R = \Pi_{ix}\,(r_i\,r_x)\,(s_i\,s_x),$$

in welchem für i und x alle Zahlen von 0 bis $n-1$ zu setzen sind, bis auf einen numerischen Factor die Resultante R dar.

Ebenso wie diese selbst, lassen sich auch ihre Variationen δR, $\delta_2 R$, $\delta_3 R$ .... und die Covariante Θ durch symbolische Produkte ausdrücken. Bezeichnet man die Variation der Form:

$$F = r_x^{n-1}\,s_x^{n-1} = \Sigma_{ix}\, c_{ix}\, x_1^{\,i}\, y_1^{\,x}\, x_2^{\,n-1-i}\, y_2^{\,n-1-x},$$

also die Form:

$$\delta F = \Sigma_{i\varkappa}\, \delta c_{i\varkappa}\, x_1^{\,i}\, y_1^{\,\varkappa}\, x_2^{\,n-1-i}\, y_2^{\,n-1-\varkappa}$$

symbolisch durch:

$$\text{(XIII)}\qquad \begin{aligned}\delta F &= \varrho_x^{\,n-1}\,\sigma_y^{\,n-1} = \varrho_{1,x}^{\,n-1}\,\sigma_{1,y}^{\,n-1} = \varrho_{2,x}^{\,n-1}\,\sigma_{2,y}^{\,n-1} \cdots\cdots \\ &= \Sigma_\nu \frac{\binom{n-1}{2\nu}\binom{n-1}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu-1}{2\nu}} (\overline{\varrho\sigma})^{2\nu}_{y^{n-2\nu-1}}\,(xy)^{2\nu},\end{aligned}$$

dann erhält man für die Incremente der Coefficienten $c_{i\varkappa}$ und die Variationen der Elementarcovarianten $(\overline{rs})^{2\nu}$ die symbolischen Ausdrücke:

$$\text{(XIV)}\qquad \begin{aligned}\delta c_{i\varkappa} &= \binom{n-1}{i}\binom{n-1}{\varkappa}\varrho_1^{\,i}\,\varrho_2^{\,n-1-i}\,\sigma_1^{\,\varkappa}\,\sigma_2^{\,n-1-\varkappa} \\ \delta\,(\overline{rs})^{2\nu} &= (\overline{\varrho\sigma})^{2\nu}.\end{aligned}$$

Das die Variation δR bis auf einen numerischen Factor darstellende symbolische Produkt entsteht dadurch, dass man in dem die Resultante R darstellenden symbolischen Produkte

$$\Pi_{i\varkappa}\,(r_i\,r_\varkappa)\,(s_i\,s_\varkappa)$$

eines der F darstellenden Symbolenpaare $r\,s$, etwa $r_{n-1}\,s_{n-1}$, durch das δF darstellende Symbolenpaar $\varrho\,\sigma$ ersetzt; es lautet:

$$\text{(XV)}\qquad \delta R = \Pi_{i\varkappa}\,(r_i\,r_\varkappa)\,(s_i\,s_\varkappa)\,.\,(r_i\,\varrho)\,(s_i\,\sigma)$$

$$= \Sigma_\nu \frac{\binom{n-1}{2\nu}\binom{n-1}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu-1}{2\nu}} \Pi_{i\varkappa}\,(r_i r_\varkappa)\,(s_i s_\varkappa)\,\left((\Pi_i r_{i,x},\ \Pi_i s_{i,x})^{2\nu},\ (\overline{\varrho\sigma})^{2\nu}\right)^{2n-2-2\nu}$$

[vgl. § 2, F. (XII)], wobei für die Buchstaben i und $\varkappa$ alle Zahlen von 0 bis $n-2$ zu setzen sind. Ebenso leitet man das die 2^{te} Variation $\delta_2 R$ der Resultante darstellende symbolische Produkt aus dem Produkte

$$\Pi\,(r_i\,r_\varkappa)\,(s_i\,s_\varkappa)$$

dadurch ab, dass man zwei Symbolenpaare $r\,s$, etwa r_{n-1}, s_{n-1} und r_{n-2}, s_{n-2}, durch $\varrho\,\sigma$ und $\varrho_1\,\sigma_1$ ersetzt; es ist:

$$\delta_2 R = \Pi_{i\varkappa}\,(r_i\,r_\varkappa)\,(s_i\,s_\varkappa)\,(r_i\,\varrho)\,(s_i\,\sigma)\,(r_i\,\varrho_1)\,(s_i\,\sigma_1),$$

wobei i und $\varkappa$ die Zahlen 0 bis $n-3$ durchlaufen. Die symbolischen Produkte, welche die übrigen Variationen der Resultante

$$\delta_3 R \qquad \delta_4 R \ \ldots.$$

darstellen, entstehen aus $\Pi\,(r_i\,r_\varkappa)\,(s_i\,s_\varkappa)$, indem man 3, 4 ... Symbolenpaare $r_i\,s_i$ durch Symbolenpaare $\varrho_i\,\sigma_i$ ersetzt.

Die Covariante Θ endlich [vgl. F. (V)] erhält man (in den Variabeln z), wenn man in der Variation δR die Incremente $\delta c_{i\varkappa}$ durch die Ausdrücke:

$$(-1)^{i+\varkappa}\binom{n-1}{i}\binom{n-1}{\varkappa} z_1^{\,i+\varkappa}\, z_2^{\,2n-2-i-\varkappa}$$

ersetzt. Durch diese Substitution geht die Form:

$$\delta F = \Sigma \delta c_{ix}\, x_1^{\,i}\, y_1^{\,x}\, x_2^{\,n-1-i}\, y_2^{\,n-1-x} = \varrho_x^{\,n-1}\, \sigma_y^{\,n-1}$$

in das Produkt $(xz)^{n-1}\,(yz)^{n-1}$, also die Symbole ϱ und σ in die Variabeln z über. Ersetzt man daher diese Symbole in dem symbolischen Produkte:

$$\delta R = \Pi_{ix}\,(r_i\, r_x)\,(s_i\, s_x)\,(r_i\, \varrho)\,(s_i\, \sigma)$$

durch die Variabeln x, dann gelangt man zu dem die Covariante Θ bis auf einen constanten Factor darstellenden symbolischen Produkte:

$$\Theta = \Pi_{ix}\,(r_i\, r_x)\,(s_i\, s_x)\, r_{i,x}\, s_{i,x}\,. \tag{XVI}$$

Da die Formen R, δR, $\delta_2 R$ . . Θ sich durch symbolische Produkte ausdrücken lassen, in denen die die Form F darstellenden Symbolenpaare $r_i\, s_i$ vorkommen, so sind sie Invarianten und Covarianten der Form F, also auch simultane Invarianten und Covarianten ihrer Elementarcovarianten:

$$(\overline{rs})^0 \qquad (\overline{rs})^2 \qquad (\overline{rs})^4 \cdot \cdot \cdot \cdot ;$$

man kann sie daher (und das soll auch in den folgenden Beispielen geschehen) durch eine Reihe von Uebereinanderschiebungen dieser Formen berechnen.

Die Elementarcovarianten $(rs)^{2\nu}$ selbst will ich dadurch aus den Formen f und φ herleiten, dass ich die einzelnen Glieder der Identität (I):

$$f \cdot \varphi_{y^n} - \varphi \cdot f_{y^n} = r_x^{\,n-1}\, s_y^{\,n-1}\,(xy)$$

durch ihre nach den Formeln § 3, F. (XII) und § 2, F. (X) entwickelten Reihen ersetze. Diese Reihen sind:

$$f \cdot \varphi_{y^n} = \Sigma_\mu \frac{\binom{n}{\mu}\binom{n}{\mu}}{\binom{2n-\mu+1}{\mu}}\,(f\varphi)^\mu_{y^n-\mu}\,(xy)^\mu,$$

$$\varphi \cdot f_{y^n} = \Sigma_\mu \frac{\binom{n}{\mu}\binom{n}{\mu}}{\binom{2n-\mu+1}{\mu}}\,(\varphi f)^\mu_{y^n-\mu}\,(xy)^\mu,$$

$$r_x^{\,n-1}\, s_y^{\,n-1} = \Sigma_\nu \frac{\binom{n-1}{2\nu}\binom{n-1}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu-1}{2\nu}}\,(\overline{rs})^{2\nu}_{y^n-2\nu+1}\,(xy)^{2\nu},$$

man hat mithin die Identität:

$$\Sigma_\mu \frac{\binom{n}{\mu}\binom{n}{\mu}}{\binom{2n-\mu+1}{\mu}}\,[1-(-1)^\mu]\,(f\varphi)^\mu_{y^n-\mu}\,(xy)^\mu = \Sigma_\nu \frac{\binom{n-1}{2\nu}\binom{n-1}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu-1}{2\nu}}\,(\overline{rs})^{2\nu}_{y^n-2\nu+1}\,(xy)^{2\nu+1}.$$

Da diejenigen Glieder der linker Hand stehenden Summe verschwinden, bei denen die Zahl μ ungerade ist, so kann man diese Zahl durch $2\nu + 1$ ersetzen. Man erhält dann die Gleichung:

$$2\,\Sigma_\nu \frac{\binom{n}{2\nu+1}\binom{n}{2\nu+1}}{\binom{2n-2\nu}{2\nu+1}} (f\varphi)^{2\nu+1}_{y^{n-2\nu-1}} (xy)^{2\nu+1}$$

$$= \Sigma_\nu \frac{\binom{n-1}{2\nu}\binom{n-1}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu-1}{2\nu}} (\overline{rs})^{2\nu}_{y^{n-2\nu+1}} (xy)^{2\nu+1}$$

und durch Vergleichung der einzelnen Glieder die Relationen:

$$2 \cdot \frac{\binom{n}{2\nu+1}\binom{n}{2\nu+1}}{\binom{2n-2\nu}{2\nu+1}} (f\varphi)^{2\nu+1} = \frac{\binom{n-1}{2\nu}\binom{n-1}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu-1}{2\nu}} (\overline{rs})^{2\nu},$$

aus welchen sich für die Elementarcovarianten $(\overline{rs})^{2\nu}$ die Werthe ergeben:

$$\text{(XVII)} \qquad (\overline{rs})^{2\nu} = \frac{n^2}{(n-\nu)(2\nu+1)} (f\varphi)^{2\nu+1},$$

z. B.:

$$(\overline{rs})^0 = n(f\varphi); \quad (\overline{rs})^2 = \frac{n^2}{3(n-1)} (f\varphi)^3; \quad (\overline{rs})^4 = \frac{n^2}{5(n-2)} (f\varphi)^5 \ldots\ldots$$

Die Resultante R ist eine simultane Invariante dieser Formen $(rs)^{2\nu}$ und kann daher als ganze Function ihrer Coefficienten $(\overline{rs})^{2\nu}_x$ ausgedrückt werden; stellt man sie in dieser Form dar, dann wird ihre Variation δR ein Aggregat der Incremente $\delta(\overline{rs})^{2\nu}_x$. Um sie als solches auszudrücken, ersetze man in der Identität (IX):

$$\delta R = \Sigma_x \frac{(-1)^x}{\binom{2n-2}{x}} \Theta_{2n-2-x}\, \delta\, \Sigma c_{i,\lambda-i}$$

die Summe $\Sigma c_{i,\lambda-i}$ durch ihren Werth $(\overline{rs})^0_\lambda$ [vgl. § 2., F. (IV)], hierdurch ergiebt sich für die Variation δR der Ausdruck:

$$\text{(XVIII)} \qquad \delta R = \Sigma_x \frac{(-1)^x}{\binom{2n-2}{x}} \Theta_{2n-2-x}\, \delta\, (\overline{rs})^0_x = \left(\Theta, (\overline{\varrho\sigma})^0\right)^{2n-2}.$$

Ersetzt man darin die Incremente δc_{ix} durch c_{ix}, dann geht δR in nR und $(\overline{\varrho\sigma})^0$ in $(\overline{rs})^0$ über und man erhält die Gleichung:

$$\text{(XIX)} \qquad nR = (\Theta, (\overline{rs})^0)^{2n-2},$$

mittelst deren man die Resultante aus den Covarianten Θ und $(\overline{rs})^0 = n(f\varphi)$ herleiten kann.

Da die Gleichung (XVIII) für beliebige Werthe der Incremente $\delta(\overline{rs})^{2\nu}_x$ gilt, so kann man sie durch die Formeln ersetzen:

$$\text{(XX)} \qquad \frac{\partial R}{\partial (\overline{rs})_x^{2\nu}} = \begin{cases} 0 & \text{für } \nu > 0 \\ \gamma_x & \text{„ } \nu = 0 \end{cases},$$

von denen die ersten mit den Formeln $\gamma_{ix} = \gamma_{i+\nu,\, x-\nu}$ identisch sind und wie diese Relationen zwischen den Coefficienten c_{ix} der Form F liefern. Man kann sie auch in symbolischer Form schreiben. Vergleicht man nämlich die beiden für die Variation δR in den Formeln (XV) und (XVIII) gegebenen Ausdrücke, dann erhält man die Identität:

$$\Sigma_\nu \frac{\binom{n-1}{2\nu}\binom{n-1}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu+1}{2\nu}} \left(\Pi_{ix}(r_i r_x)\,(s_i s_x)\,(\Pi_i r_{i,x},\, \Pi_i s_{i,x})^{2\nu},\ (\overline{\varrho\sigma})^{2\nu}\right)^{2n-2\nu-2} = \left(\Theta,\ (\overline{\varrho\sigma})^0\right)^{2n}{}^2.$$

Da das erste Glied der linker Hand stehenden Summe mit dem Ausdrucke rechter Hand übereinstimmt, so verschwindet die Summe der übrigen Glieder. Dies findet unabhängig von den Werthen der Variationen $(\overline{\varrho\sigma})^{2\nu} = \delta\,(\overline{rs})^{2\nu}$ statt, folglich verschwinden die einzelnen Covarianten:

$$\Pi_{ix}\,(r_i r_x)\,(s_i s_x)\,(\Pi_i r_{i,x},\ \Pi_i s_{i,x})^{2\nu},$$

bei denen $\nu > 0$ ist für sich; es ist also:

$$\text{(XXI)} \qquad \begin{cases} \Pi_{ix}\,(r_i r_x)\,(s_i s_x)\,(\Pi_i r_{i,x},\ \Pi_i s_{i,x})^2 = 0 \\ \Pi_{ix}\,(r_i r_x)\,(s_i s_x)\,(\Pi_i r_{i,x},\ \Pi_i s_{i,x})^4 = 0 \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \end{cases}$$

oder, wenn man die durch

$$(\Pi_i r_{i,x},\ \Pi_i s_{i,x})^{2\nu}$$

angedeutete Operation wirklich ausführt:

$$\text{(XXII)} \quad \Pi_{i,x}(r_i r_x)(s_i s_x)\,\Sigma(r s_{i_1})(r_1 s_{i_2}) \ldots (r_{2\nu-1} s_{i_{2\nu}})\, r_{2\nu,x} \ldots r_{n-2,x}\, s_{i_{2\nu+1},x} \ldots s_{i_{n-1},x} = 0,$$

worin für die Indices

$$i_1,\ i_2 \ldots . i_{n-1}$$

alle diejenigen $\frac{(n-1)!}{(n-2\nu-1)!}$ Permutationen der Zahlen:

$$0\ \ 1\ \ 2\ \ .\ .\ n-2$$

zu nehmen sind, bei denen verschiedene symbolische Produkte entstehen.

Die letzte Anwendung, welche von der Formel (XVIII) gemacht werden soll, ist die Bestimmung der partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial R}{\partial a_x}$ und $\frac{\partial R}{\partial \alpha_x}$ als Aggregate der Unterdeterminanten γ_λ. Die Elementarcovariante $(\overline{\varrho\sigma})^0$ hat den Werth:

$$\delta\,(\overline{rs})^0 = n\,\delta\,(f\varphi) = n\,(f,\ \delta\varphi) - n\,(\varphi,\ \delta f).$$

Trägt man denselben in Formel (XVIII) ein, dann wird:

$$\delta R = n\,((\Theta f)^{n-1},\ \delta\varphi)^n - n\,((\Theta\varphi)^{n-1},\ \delta f)^n$$

und nach F. (VI), § 1.:

$$\delta R = n \Sigma_x \frac{(-1)^x}{\binom{n}{x}} \{(\Theta f)_{n-x}^{n-1} \delta a_x - (\Theta \varphi)_{n-x}^{n-1} \delta a_x\},$$

mithin ist:

$$\frac{\partial R}{\partial a_x} = \frac{n}{\binom{n}{x}} (-1)^{n+x} (\varphi \Theta)_{n-x}^{n-1}$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_x} = \frac{-n}{\binom{n}{x}} (-1)^{n+x} (f \Theta)_{n-x}^{n-1}.$$

Nach § 1., F. (V) ist nun:

$$(f\Theta)_{n-x}^{n-1} = \Sigma_\sigma (-1)^\sigma C_\sigma \frac{a_\sigma \Theta_{2n-1-x-\sigma}}{\binom{n}{\sigma}\binom{2n-2}{2n-1-x-\sigma}},$$

wobei:

$$C_\sigma = \Sigma_\lambda (-1)^\lambda \binom{1}{\lambda}\binom{n-1}{x+\lambda-1}\binom{n-1}{\sigma-\lambda}$$

$$= \binom{n-1}{x-1}\binom{n-1}{\sigma} - \binom{n-1}{x}\binom{n-1}{\sigma-1} = -\binom{n}{x}\binom{n}{\sigma}\frac{\sigma-x}{n};$$

ferner ist nach F. (VI):

$$\Theta_{2n-1-x-\sigma} = (-1)^{x+\sigma-1}\binom{2n-2}{2n-1-x-\sigma}\gamma_{x+\sigma-1},$$

mithin:

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha_x} = (-1)^{n+1} \Sigma_\sigma (\sigma - x) a_\sigma \gamma_{x+\sigma-1}$$

und da nach F. (IV):

$$\Sigma_\sigma a_\sigma \gamma_{x+\sigma-1} = 0$$

ist:

(XXIII$_a$) $$\frac{\partial R}{\partial \alpha_x} = (-1)^{n+1} \Sigma_\sigma \sigma a_\sigma \gamma_{x+\sigma-1}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man die Formel:

(XXIII$_b$) $$\frac{\partial R}{\partial a_x} = (-1)^n \Sigma_\sigma \sigma \alpha_\sigma \gamma_{x+\sigma-1}.$$

§ 5.

Die Resultante zweier Formen dritten, vierten und fünften Grades.

Im § 3. ist die Formel (III):

(I) $$F = r_x^n s_y^n = \Sigma_\nu \frac{\binom{n}{2\nu}\binom{n}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu-2}{2\nu}} (\overline{rs})_{y^{n-2\nu}}^{2\nu} (xy)^{2\nu}$$

entwickelt worden; sie zeigt, wie eine symmetrische Form F durch ihre Elementarcovarianten darstellbar ist. Bezeichnet man letztere durch:

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} r_x^n s_x^n = (\overline{rs})^0 = \varrho = \varrho_x^{2n} = \varrho_{1,x}^{2n} \ldots\ldots \\ (rs)^2 r_x^{n-2} s_x^{n-2} = (\overline{rs})^2 = \sigma = \sigma_x^{2n-4} = \sigma_{1,x}^{2n-4} \ldots\ldots \\ (rs)^4 r_x^{n-4} s_x^{n-4} = (\overline{rs})^4 = \tau = \tau_x^{2n-8} = \tau_{1,x}^{2n-8} \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

dann lautet die Formel (I):

$$\text{(III)} \quad F = \varrho_x^n \varrho_y^n + \frac{\binom{n}{2}\binom{n}{2}}{\binom{2n-1}{2}} \sigma_x^{n-2} \sigma_y^{n-2} (xy)^2 + \frac{\binom{n}{4}\binom{n}{4}}{\binom{2n-3}{4}} \tau_x^{n-4} \tau_y^{n-4} (xy)^4 \ldots\ldots$$

Ausser ihr soll noch die Formel (IX), § 2. benutzt werden; ihr zufolge ist:

$$(rs)\, r_x^{n-1} s_y^{n-1} = \frac{\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{1}}{\binom{2n-2}{1}} \sigma_x^{n-2} \sigma_y^{n-2} (xy) + \frac{\binom{n-1}{3}\binom{n-1}{3}}{\binom{2n-4}{3}} \tau_x^{n-4} \tau_y^{n-4} (xy)^3 \ldots$$

$$(rs)^2 r_x^{n-2} s_y^{n-2} = \sigma_x^{n-2} \sigma_y^{n-2} + \frac{\binom{n-2}{2}\binom{n-2}{2}}{\binom{2n-5}{2}} \tau_x^{n-4} \tau_y^{n-4} (xy)^2 \ldots$$

$$(rs)^3 r_x^{n-3} s_y^{n-3} = \frac{\binom{n-3}{1}\binom{n-3}{1}}{\binom{2n-6}{1}} \tau_x^{n-4} \tau_y^{n-4} (xy) \ldots$$

. . . . . .

Differentiirt man diese Gleichungen nach den Variabeln x und y und ersetzt man dann die Incremente durch neue Variabeln, dann erhält man die Polaren der Form F durch die entsprechenden der Elementarcovarianten ϱ, σ, τ ... ausgedrückt.

Wenn man in einer Polare von F eine Anzahl Variabler durch Symbole anderer Formen ersetzt und sodann mit passenden symbolischen Factoren multiplicirt, dann entsteht ein symbolisches Produkt, welches die Symbole r und s enthält. Dasselbe ist somit ein Aggregat anderer solcher Produkte, in denen statt des Symbolenpaares rs die Symbole der Formen ϱ, σ, τ ... auftreten.

Da alle symbolische Produkte, welche die Symbole rs enthalten, in dieser Weise herstellbar sind, so kann man sie durch diese Operation als solche Aggregate ausdrücken. — Symbolische Produkte, welche zwei die Form F darstellende Symbolenpaare rs und $r_1 s_1$ enthalten, muss man zweimal diesem Prozess unterwerfen. Zuerst stelle man sie als Aggregate symbolischer Produkte dar, welche statt des Symbolenpaares $r_1 s_1$ die Symbole ϱ, σ, τ ... enthalten und sodann jedes dieser letzteren symbolischen Produkte wieder durch andere, bei denen dies auch in Bezug auf das zweite Symbolenpaar der Fall ist. Fährt

man in dieser Weise fort, dann kann man schliesslich jedes symbolische Produkt, in welchem die Symbolenpaare $r_i s_i$ in beliebiger Anzahl auftreten, durch symbolische Produkte ersetzen, welche statt derselben die Symbole der Formen ϱ, σ, τ ... enthalten.

Diese Methode soll dazu benutzt werden, um die im vorigen § abgeleiteten symbolischen Produkte [vgl. § 4., F. (XII, XIX, XVI und XXII)]:

$$(IV_a) \qquad R = \Pi (r_i r_x) (s_i s_x) = (\Theta \varrho)^{2n-2}$$

$$(IV_b) \qquad \Theta = \Pi (r_i r_x) (s_i s_x) r_{i,x} s_{i,x},$$

$$(IV_c) \quad 0 = \Sigma \Pi (r_i r_x) (s_i s_x) (r s_{i_1}) (r_1 s_{i_2}) (r_2 s_{i_3}) \dots (r_{2\nu-1}, s_{i_{2\nu}}) r_{2\nu,x} \dots r_{n-2,x} s_{i_{2\nu+1},x} \dots s_{i_{n-1},x}$$

durch symbolische Produkte auszudrücken, welche die Symbole der Elementarcovarianten der Cayley'schen Form enthalten. Hierbei beabsichtige ich, den folgenden Weg einzuschlagen. Zuerst bestimme ich die Elementarcovarianten ϱ, σ, τ ... mittelst der Formeln [vgl. § 4., F. (XVII)]:

$$(V) \qquad \varrho = n (f\varphi); \quad \sigma = \frac{n^2}{3(n-1)} (f\varphi)^3; \quad \tau = \frac{n^2}{5(n-2)} (f\varphi)^5 \dots$$

aus den Formen f und φ; sodann drücke ich die in der anzustellenden Rechnung vorkommenden Polaren von F durch die Polaren von ϱ, σ, τ ... aus und benutze endlich in der obigen Weise die hierdurch entstehenden Ausdrücke dazu, um Relationen zwischen symbolischen Produkten herzustellen. Mittelst der letzteren werden dann die gesuchten Formen berechnet.

Die Resultante der beiden cubischen Formen:

$$f = a_3 x_1^3 + a_2 x_1^2 x_2 + a_1 x_1 x_2^2 + a_0 x_2^3$$
$$\varphi = \alpha_3 x_1^3 + \alpha_2 x_1^2 x_2 + \alpha_1 x_1 x_2^2 + \alpha_0 x_2^3.$$

Die Cayley'sche Form und ihre Elementarcovarianten haben die Werthe [vgl. F. (V)]:

$$F = \frac{f \cdot \varphi_{y^2} - \varphi \cdot f_{y^2}}{(xy)} = r_x^2 s_y^2,$$

$$r_x^2 s_x^2 = (\overline{rs})^0 = \varrho = 3 (f\varphi) \quad ; \quad (rs)^2 = (\overline{rs})^2 = \sigma = \tfrac{3}{2} (f\varphi)^3.$$

Ich bilde folgende Polaren von F:

1. $\quad r_x^2 s_y^2 = \varrho_x^2 \varrho_y^2 + \frac{1}{3} \sigma (xy)^2$
2. $\quad r_x s_x r_z s_y = \varrho_x^2 \varrho_y \varrho_z - \frac{1}{6} \sigma (xy) (xz)$
3. $\quad (rs) r_x s_y = -\frac{1}{2} \sigma \cdot (yx)$

und aus der 2ten Polare die Relationen:

$$r_x s_x r_{1,x} s_{1,x} (r r_1) (s s_1) = r_x s_x \varrho_x^2 (r\varrho) (s\varrho) - \tfrac{1}{6} \sigma \cdot r_x^2 s_x^2$$
$$r_x s_x \varrho_x^2 (r\varrho) (s\varrho) = \varrho_x^2 \varrho_{1,x}^2 (\varrho\varrho_1)^2 - \tfrac{1}{6} \sigma \cdot \varrho.$$

Aus denselben ergiebt sich für die Covariante Θ der Werth:

$$\Theta = r_x s_x r_{1,x} s_{1,x} (rr_1)(ss_1) = (\varrho\varrho)^2 - \tfrac{1}{3}\varrho \cdot \sigma$$

und daher zur Bestimmung der Resultante das Formelsystem:

(VI)
$$\begin{cases} \varrho = 3(f\varphi) & \Theta = (\varrho\varrho)^2 - \frac{1}{3}\varrho \cdot \sigma \\ \sigma = \frac{3}{2}(f\varphi)^3 & R = (\Theta, \varrho)^4, \end{cases}$$

vgl. Clebsch, Crelle's J. Bd. 64, pag. 95.

Zwischen den Coefficienten von F findet folgende Relation statt [vgl. F. (IV_6)]:

$$0 = (rr_1)(ss_1)\{(rs)(r_1s_1) + (rs_1)(r_1s)\} = (rr_1)(ss_1)\{2(rs)(r_1s_1) - (rr_1)(ss_1)\}.$$

Aus den Polaren 1. und 3. folgen die Formeln:

$$(rr_1)^2(ss_1)^2 = (r\varrho)^2(s\varrho)^2 + \tfrac{1}{3}\sigma \cdot (rs)^2 = (\varrho_1\varrho)^4 + \tfrac{1}{3}\sigma^2$$
$$(rs)(rr_1)(ss_1)(r_1s_1) = \tfrac{1}{2}\sigma(rs)^2 = \tfrac{1}{2}\sigma^2,$$

mithin ist:

$$0 = \sigma^2 - \left[(\varrho\varrho)^4 + \frac{\sigma^2}{3}\right] = \tfrac{2}{3}\sigma^2 - (\varrho\varrho)^4.$$

Die Resultante der biquadratischen Formen:

$$f = a_4x_1^4 + a_3x_1^3x_2 + a_2x_1^2x_2^2 + a_1x_1x_2^3 + a_0x_2^4$$
$$\varphi = \alpha_4x_1^4 + \alpha_3x_1^3x_2 + \alpha_2x_1^2x_2^2 + \alpha_1x_1x_2^3 + \alpha_0x_2^4.$$

Zuerst sollen die Cayley'sche Form und ihre Elementarcovarianten bestimmt, die für die spätere Rechnung nöthigen Polaren aufgestellt und die die Covariante Θ und die Resultante R darstellenden symbolischen Produkte transformirt werden. Sodann will ich die zur Bestimmung von R und Θ dienlichen Relationen zwischen symbolischen Produkten bilden. Die Formel (IV_6) will ich hier und im folgenden Beispiele nicht benutzen, weil sie nicht die einfachsten Relationen zwischen den Coefficienten der Cayley'schen Form liefert. Die Formen F, ϱ und σ haben hier die Werthe:

$$F = \frac{f\varphi_{y^4} - \varphi f_{y^4}}{(xy)} = r_x^3 s_y^3,$$

$$r_x^3 s_x^3 = (\overline{rs})^0 = \varrho = 4(f\varphi) \quad ; \quad (rs)^2 r_x s_x = (\overline{rs})^2 = \sigma = \tfrac{1}{9}^6 (f\varphi)^3.$$

Ich bilde die folgenden Polaren:

1. $r_x^3 s_y^3 = \varrho_x^3 \varrho_y^3 + \frac{9}{10}\sigma_x\sigma_y(xy)^2$
2. $r_x^3 s_x^2 s_y = \varrho_x^2 \varrho_y \varrho_z^2 + \frac{3}{10}\sigma_y\sigma_z(xz)^2 + \frac{3}{5}\sigma_x\sigma_z(xz)(yz)$
3. $r_x^2 r_y s_x^2 s_y = \varrho_x^4 \varrho_y^2 - \frac{1}{5}\sigma \cdot (xy)^2$
4. $(rs) r_x r_y s_x^2 = \frac{1}{2}\sigma(yx)$
5. $r_x^3 s_x s_y^2 = \varrho_x^4 \varrho_y^2 + \frac{3}{10}\sigma \cdot (xy)^2.$

Die Resultante R wird durch das symbolische Produkt dargestellt:

$$R = (rr_1)(rr_2)(rr_3)(r_1r_2)(r_1r_3)(r_2r_3)\,\Pi(s_is_x)$$
$$= -(rr_1)(rr_2)(r_1r_3)(r_2r_3)[(rr_1)(r_2r_3) - (rr_2)(r_1r_3)]\,\Pi(s_is_x).$$

Das zweite symbolische Produkt rechter Hand geht, wenn man die Symbolenpaare: rs, $r_1 s_1$, $r_2 s_2$ cyklisch unter einander vertauscht, in das folgende über:

$$(r_1 r_2)\,(r r_1)^2\,(r_2 r_3)^2\,(r r_3)\,\Pi\,(s_i s_x)$$

mithin hat R den Werth:

$$R = -\,(r r_1)^2\,(r_2 r_3)^2\,\{(r r_2)\,(r_1 r_3) - (r r_3)\,(r_1 r_2)\}\,\Pi\,(s_i s_x)$$
$$= -\,(r r_1)^3\,(r_2 r_3)^3\,(s s_1)\,(s_2 s_3)\,(s s_2)\,(s s_3)\,(s_1 s_2)\,(s_1 s_3).$$

In derselben Weise kann man das die Covariante Θ darstellende symbolische Produkt $\Pi\,(r_i r_x)\,(s_i s_x)\,r_{i,x} s_{i,x}$ in das folgende transformiren:

$$\Theta = -\,(r r_1)^3\,(s s_1)\,(s s_2)\,(s_1 s_2)\,r_{2,x}{}^3 s_x s_{1,x} s_{2,x}.$$

Nach § 3. Formel (X) ist nun:

(VII) $$s_x s_y s_{1,x} s_{1,y} = (s_x{}^2\ ,\ s_{1,x}{}^2)^0_{y^2} - \tfrac{1}{6}\,(s s_1)^2\,(xy)^2$$

mithin:

$$(s s_2)\,(s s_3)\,(s_1 s_2)\,(s_1 s_3) = (s_x{}^2 s_{1,x}{}^2\ ,\ s_{2,x}{}^2 s_{3,x}{}^2)^4 - \tfrac{1}{6}\,(s s_1)^2\,(s_2 s_3)^2$$
$$(s s_2)\,(s_1 s_2)\,s_x s_{1,x} s_{2,x} = (s_x{}^2 s_{1,x}{}^2\ ,\ s_{2,x}{}^3)^2 \qquad - \tfrac{1}{6}\,(s s_1)^2\,s_{2,x}{}^3.$$

und:

$$R = -\,(r r_1)^3\,(s s_1)\,(r_2 r_3)^3\,(s_2 s_3)\,\{(s_x{}^2 s_{1,x}{}^2\ ,\ s_{2,x}{}^2 s_{3,x}{}^2)^4 - \tfrac{1}{6}(s s_1)^2\,(s_2 s_3)^2\}$$
$$\Theta = -\,(r r_1)^3\,(s s_1)\,r_{2,x}{}^3 \qquad \{(s_x{}^2 s_{1,x}{}^2\ ,\ s_{2,x}{}^3)^2 \qquad - \tfrac{1}{6}(s s_1)^2\,s_{2,x}{}^3\ \}.$$

Bezeichnet man die symbolischen Produkte:

$$(r r_1)^3\,(s s_1)\,s_x{}^2 s_{1,x}{}^2 = g \quad \text{und} \quad (r r_1)^3\,(s s_1)^3 = i$$

durch g und i, dann wird:

$$R = -\,(g g)^4 + \frac{1}{6}\,i^2$$

$$\Theta = -\,r_x{}^3 s_x g_x{}^2\,(s g)^2 + \frac{i}{6}\cdot r_x{}^3 s_x{}^3.$$

Da nach Polare 5.:

$$r_x{}^3 s_x g_x{}^2\,(s g)^2 = \varrho_x{}^4 g_x{}^2\,(\varrho g)^2 + \tfrac{3}{10}\,\sigma\,.\,g$$

ist, so erhält man für Θ den Werth:

$$\Theta = -\,(\varrho g)^2 - \tfrac{3}{10}\,\sigma\,.\,g + \frac{i}{6}\cdot\varrho.$$

Um die Formen g und i zu berechnen, entwickle man aus den 4 ersten Polaren die Relationen:

$$(r r_1)^3 (s s_1) s_x{}^2 s_{1,x}{}^2 = s_x{}^2 \varrho_x{}^2 (r\varrho)^3 (s\varrho) + \tfrac{3}{10}\,r_x{}^2 s_x{}^2 (r\sigma)(s\sigma) - \tfrac{3}{5}\,r_x s_x{}^2 \sigma_x (rs)(r\sigma)$$

$$s_x{}^2\,\varrho_x{}^2\,(r\varrho)^3\,(s\varrho) = \varrho_x{}^2 \varrho_{1,x}{}^2\,(\varrho\varrho_1)^4 + \tfrac{3}{10}\,\varrho_x{}^4\,(\varrho\sigma)^2$$

$$r_x{}^2\,s_x{}^2\,(r\sigma)\,(s\sigma) = \varrho_x{}^4\,(\varrho\sigma)^2 - \frac{\sigma^2}{5}\ ;\quad r_x s_x{}^2 \sigma_x\,(rs)\,(r\sigma) = \tfrac{1}{2}\sigma^2$$

$$(r r_1)^3\,(s s_1)^3 = (r\varrho)^3\,(s\varrho)^3 + \tfrac{9}{10}\,(rs)^2\,(r\sigma)\,(s\sigma) = (\varrho\varrho)^6 + \tfrac{9}{10}\,(\sigma,\sigma)^2.$$

Aus denselben ergeben sich für die Formen g und i die Werthe:

$$g = (\varrho\varrho)^4 + \tfrac{3}{5}(\varrho\sigma)^2 - \tfrac{9}{25}\sigma^2 \qquad i = (\varrho\varrho)^6 + \tfrac{9}{10}(\sigma\sigma)^2$$

und somit zur Bestimmung der Resultante die Formeln:

(IX) $\begin{cases} \varrho = 4\,(f\varphi)^3 \;;\; g = (\varrho\varrho)^4 + \frac{3}{5}\,(\varrho\sigma)^2 - \frac{9}{25}\,\sigma^2 \\ \sigma = \frac{1}{9}^6\,(f\varphi)^3 \;;\; i = (\varrho\varrho)^6 + \frac{9}{10}\,(\sigma,\,\sigma)^2 \end{cases} \qquad R = \frac{i^2}{6} - (gg)^4.$

Die Resultante der Formen 5ten Grades:

$$f = a_5x_1^5 + a_4x_1^4x_2 + a_3x_1^3x_2^2 + a_2x_1^2x_2^3 + a_1x_1x_2^4 + a_0x_2^5$$
$$\varphi = \alpha_5x_1^5 + \alpha_4x_1^4x_2 + \alpha_3x_1^3x_2^2 + \alpha_2x_1^2x_2^3 + \alpha_1x_1x_2^4 + \alpha_0x_2^5\,.$$

Die Cayley'sche Form und ihre Elementar-Covarianten haben hier die Werthe:

$$F = \frac{f\cdot\varphi_{y^5} - \varphi f_{y^5}}{(xy)} = r_x^4 s_y^4$$

$$r_x^4 s_x^4 = (\overline{rs})^0 = \varrho = 5\,(f\varphi) \quad ; \quad (rs)^2\,r_x^2 s_x^2 = (\overline{rs})^2 = \sigma = \tfrac{2}{1}\tfrac{5}{2}\,(f\varphi)^3$$
$$(rs)^4 = (\overline{rs})^4 = \tau = \tfrac{5}{3}\,(f,\,\varphi)^5.$$

Die Berechnung der Formen Θ und R ist in diesem Falle verwickelter als in den vorigen Fällen; die Anzahl der symbolischen Produkte und Polaren der Cayley'schen Form, welche zur Berechnung nöthig sind, ist bei Weiten grösser. Diese letzteren sollen nun gebildet und so geordnet werden, dass diejenigen Polaren, welche bei der Berechnung eines symbolischen Produktes auftreten, in eine Reihe zu stehen kommen.

1. Reihe.

1. $r_x^4 s_y^4 = \varrho_x^4\varrho_y^4 + \frac{1}{7}^2\,\sigma_x^2\sigma_y^2\,(xy)^2 + \frac{1}{5}\tau\,(xy)^4$
2. $(rs)\,r_x^3 s_y^3 = -\frac{3}{2}\sigma_x^2\sigma_y^2\,(yx) - \frac{1}{4}\tau\,(yx)^3$
3. $(rs)^2\,r_x^2 s_y^2 = \sigma_x^2\sigma_y^2 + \frac{1}{3}\tau\,(xy)^2$
4. $(rs)^3\,r_x s_y = -\frac{1}{2}\tau\,(yx)\,.$

2. Reihe.

1. $r_x r_z^3 s_x^3 s_y = \varrho_x^4\varrho_y\varrho_z^3 + \frac{6}{7}\sigma_x^2\sigma_y\sigma_z(xz)^2 - \frac{9}{14}\sigma_x^2\sigma_z^2(xy)(xz) - \frac{1}{2}\frac{1}{0}\tau\,.(xy)(xz)^3$
2. $r_x r_y^3 s_x^3 s_y = \varrho_x^4\varrho_y^4 + \frac{3}{14}\sigma_x^2\sigma_y^2(xy)^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{0}\tau\,(xy)^4$
3. $r_x^3 r_y s_x^3 s_y = \varrho_x^6\varrho_y^2 - \frac{3}{14}\sigma\,.\,(xy)^2$
4. $r_x^2 r_y^2 s_x^4 = \varrho_x^6\varrho_y^2 + \frac{2}{7}\,\sigma\,.\,(xy)^2.$

3. Reihe.

1. $r_x r_z^3 s_x^3 s_y = \varrho_x^4\varrho_y\varrho_z^3 + \frac{6}{7}\sigma_x^2\sigma_y\sigma_z(xz)^2 - \frac{9}{14}\sigma_x^2\sigma_z(xy)(xz) - \frac{1}{2}\frac{1}{0}\tau\,(xy)(xz)^3$
2. $(rs)\,r_y^3 s_x^2 s_y = -\sigma_x\sigma_y^3\,(xy)$
3. $(rs)\,r_x r_y^2 s_x^3 = -\sigma_x^3\sigma_y\,(xy)\,.$

4. Reihe.

1. $r_x r_z^3 s_x s_y^3 = \varrho_x^2\varrho_y^3\varrho_z^3 + \frac{6}{7}\sigma_x^2\sigma_y\sigma_z(yz)^2 - \frac{3}{14}\sigma_y^2\sigma_z^2(xy)(xz) - \frac{3}{2}\frac{3}{0}\tau\,(zy)^2(xy)(xz)$
2. $r_x r_y^3 s_x s_y^3 = \varrho_x^2\varrho_y^6 - \frac{3}{14}\sigma_y^4\,(xy)^2$
3. $(rs)^2 r_x r_y s_x s_y = \sigma_x^2\sigma_y^2 - \frac{1}{6}\tau\,(xy)^2$
4. $r_x^2 r_y^2 s_x^2 s_y^2 = \varrho_x^4\varrho_y^4 - \frac{2}{7}\sigma_x^2\sigma_y^2\,(xy)^2 + \frac{1}{3}\frac{1}{0}\tau\,(xy)^4.$

5. Reihe.

1. $r_y r_x^3 s_x^3 s_y = \varrho_x^3 \varrho_y^2 \varrho_z^3 + \frac{9}{7}\sigma_x\sigma_y^2\sigma_z(xz)^2 + \frac{3}{14}\sigma_x^2\sigma_z^2(yx)(zy) + \frac{3}{20}\tau(zx)^2(yx)(zy$

2. $(rs)\, r_y^3 s_x s_y^2 = -\frac{1}{2}\sigma_y^4 (yx)$

3. $(rs)\, r_x^2 r_y s_x s_y^2 = -\frac{1}{2}\sigma_x^2\sigma_y^2 (yx) + \frac{1}{12}\tau (yx)^3$

4. $(rs)^2 r_y^2 s_x^2 = \sigma_x^2\sigma_y^2 + \frac{1}{3}\tau (yx)^2.$

Ebenso wie im vorigen Falle eignet sich auch hier nicht das die Covariante Θ darstellende symbolische Produkt $\Pi(r_i r_x)\ (s_i s_x)\ r_{i,x}\, s_{i,x}$ unmittelbar zur Auswerthung dieser Form; es muss vielmehr vorher transformirt werden. Man hat:

$$\Theta = (rr_1)\,(rr_2)\,(rr_3)\,(r_1r_2)\,(r_1r_3)\,(r_2r_3)\,\Pi(s_is_x)\,r_{i,x}s_{i,x}$$
$$= (rr_1)(rr_2)(r_1r_3)(r_2r_3)\left\{-(rr_1)(r_2r_3)+(rr_2)(r_1r_3)\right\}\Pi(s_is_x)\,r_{i,x}s_{i,x}.$$

Vertauscht man in dem zweiten symbolischen Produkte rechter Hand die Symbolenpaare rs, r_1s_1, r_2s_2 cyklisch unter einander, dann geht es in das folgende über:

$$(r_1r_2)\,(rr_1)^2\,(r_2r_3)^2\,(rr_3)\,\Pi(s_is_x)\,r_{i,x}s_{ix},$$

mithin ist

$$\Theta = -(rr_1)^2\,(r_2r_3)^2\left\{(rr_2)\,(r_1r_3) - (rr_3)\,(r_1r_2)\right\}\Theta(s_is_x)\,r_{i,x}s_{i,x}$$
$$= -(rr_1)^3(r_2r_3)^3(ss_1)(s_2s_3)r_x r_{1,x}r_{2,x}r_{3,x}s_x s_{1,x}s_{2,x}s_{3,x}(ss_2)(s_1s_2)(ss_3)(s_1s_3).$$

Nach Formel (VII) ist nun:

$$(ss_2)\,(s_1s_2)\,(ss_3)\,(s_1s_3) = (s_y^2 s_{1,y}^2\ ,\ s_{2,y}^2 s_{3,y}^2)^4 - \frac{1}{6}(ss_1)^2\,(s_2s_3)^2$$

also:

$$\Theta = (rr_1)^3(ss_1).(r_2r_3)^3(s_2s_3)r_x r_{1,x}r_{2,x}r_{3,x}s_x s_{1,x}s_{2,x}s_{3,x}\left\{\frac{1}{6}(ss_1)^2(s_2s_3)^2 - (s_y^2 s_{1,y}\ ,\ s_{2,y}^2 s_{3,y})^4\right\}$$

und, wenn man die symbolischen Produkte:

$(rr_1)^3(ss_1)r_x r_{1,x}s_x s_{1,x}s_y^2 s_{1,y}^2 = \lambda_x^4\mu_y^4$ und $(rr_1)^3(ss_1)^3 r_x r_{1,x}s_x s_{1,x} = t$

durch $\lambda_x^4\mu_y^4$ und t bezeichnet:

$$\Theta = \frac{t^2}{6} - \lambda_x^4\lambda_{1,x}^4\,(\mu\mu_1)^4.$$

Setzt man:

$$\lambda_x^4\mu_y^4 = A_x^4A_y^4 + B_x^3B_y^3(xy) + C_x^2C_y^2(xy)^2 + D_xD_y(xy)^3 + E.(xy)^4$$

dann sind die Formen A, B, C, D, E bis auf numerische Constanten die Elementar-Covarianten der Form $\lambda_x^4\mu_y^4$. Um das symbolische Produkt $\lambda_x^4\lambda_{1,x}^4(\mu\mu_1)^4$ durch dieselben auszudrücken, bilde man die Polaren:

$$\lambda^4\mu_x\mu_y^3 = A_x^5A_y^3 + \tfrac{3}{4}B_x^4B_y^2\,(xy) + \tfrac{1}{2}C_x^3C_y\,(xy)^2 + \tfrac{1}{4}D\,(xy)^3$$
$$\lambda_x^4\mu_x^2\mu_y^2 = A_x^6A_y^2 + \tfrac{1}{2}B_x^5B_y\ (xy) + \tfrac{1}{6}C\,(xy)^2$$
$$\lambda_x^4\mu_x^3\mu_y = A_x^7A_y\ + \tfrac{1}{4}B\,.\,(xy).$$

Aus demselben folgen die Relationen:

$$\Theta = \frac{t^2}{6} - \lambda_x^4 \left\{ A_x^4 (\mu A)^4 + B_x^3 \mu_x (\mu B)^3 + C_x^2 \mu_x^2 (\mu C)^2 + D_x \mu_x^3 (\mu D) + E \,.\, \mu_x^4 \right\}$$

$$\lambda_x^4 A_x^4 (\mu A)^4 = A_x^4 A_{1,x}^4 (A A_1)^4 + A_x^5 B_x^3 (AB)^3 + A_x^6 C_y^2 (AC)^2 + A_x^7 D_x (AD) + A \,.\, E$$

$$\lambda_x^4 B_x^3 \mu_x (\mu B)^3 = A_x^5 B_x^3 (AB)^3 - \tfrac{3}{4} B_x^4 B_{1,x}^4 (B B_1)^2 - \tfrac{1}{2} B_x^5 C_x^3 (BC) - \tfrac{1}{4} B \,.\, D$$

$$\lambda_x^4 \mu_x^2 C_x^2 (\mu C)^2 = A_x^6 C_x^2 (AC)^2 - \tfrac{1}{2} B_x^5 (BC) + \tfrac{1}{3} C^2$$

$$\lambda_x^4 \mu_x^3 D_x (\mu D) = A_x^7 D_x (AD) - \tfrac{1}{4} B \,.\, D,$$

und aus denselben für Θ der Ausdruck:

$$\Theta = \tfrac{1}{6} t^2 - (AA)^4 - 2(AB)^3 - 2(AC)^2 - 2(AD) - 2AE + \tfrac{3}{4}(BB)^2 + (BC) - \tfrac{1}{6} C^2 + \tfrac{1}{2} BD.$$

Diese Formel zeigt, wie man die Form Θ aus t und den Elementar-Covarianten der Form $\lambda_x^4 \mu_y^4$ bestimmen kann. Um diese letzteren zu berechnen, muss man diese Form:

$$\lambda_x^4 \mu_y^4 = (r r_1)^3 (s s_1) r_x r_{1,x} s_x s_{1,x} s_y^2 s_{1,y}^2$$

ein wenig transformiren.

Nach Formel (X) § 3. kann man sie durch den Ausdruck ersetzen:

$$\lambda_x^4 \mu_y^4 = (r r_1)^3 (s s_1) r_x r_{1,x} \left\{ (s_x^3 \,,\, s_{1,x}^3)_{y^4}^0 - \tfrac{1}{5} (s s_1)^2 s_y s_{1,y} (xy)^2 \right\},$$

welcher durch Anwendung der Formeln (X) § 2.:

$$r_x r_{1,x} s_y^3 s_{1,y}^3 = (r_x r_{1,x} \,,\, s_x^3 s_{1,x}^3)_{y^6}^0 + \tfrac{3}{2} (r_x r_{1,x} \,,\, s_x^3 s_{1,x}^3)_{y^5} (xy) + \tfrac{5}{7} (r_x r_{1,x} \,,\, s_x^3 s_{1,x}^3)_{y^4}^2 (xy)^2$$

$$r_x r_{1,x} s_y s_{1,y} = (r_x r_{1,x} \,,\, s_x s_{1,x})_{y^2}^0 + \tfrac{1}{3} (r_x r_{1,x} \,,\, s_x s_{1,x})^2 (xy)^2 .$$

in den folgenden übergeht:

$$\lambda_x^4 \mu_y^4 = (rr)^3 (ss_1) = \begin{cases} (r_x r_{1,x}, s_x^3 s_{1,x}^3)_{y^6}^0 + (r_x r_{1,x}, s_x^3 s_{1,x}^3)_{y^5} (xy) + \tfrac{3}{7} (r_x r_{1,x}, s_x^3 s_{1,x}^3)_{y^4}^2 (xy)^2 \\ - \tfrac{1}{5} (s s_1)^2 (r_x r_{1,x}, s_x s_{1,x})_{y^2}^0 (xy)^2 - \tfrac{1}{15} (s s_1)^2 (r_x r_{1,x}, s_x s_{1,x})^2 (xy)^4. \end{cases}$$

Aus denselben ergeben sich für die Elementarcovarianten A, B, C, D, E die Werthe:

$$A = (r r_1)^3 (s s_1) \left\{ r_x r_{1,x} \,,\, s_x^3 s_{1,x}^3 \right\}^0 = (r r_1)^3 (s s_1) r_x r_{1,x} s_x^3 s_{1,x}^3$$

$$B = (r r_1)^3 (s s_1) \left\{ r_x r_{1,x} \,,\, s_x^3 s_{1,x}^3 \right\} = (r r_1)^3 (s s_1) (r_1 s_1) r_x s_x^3 s_{1,x}^2$$

$$C = \tfrac{3}{7} (r r_1)^3 (s s_1) \left\{ r_x r_{1,x} \,,\, s_x^3 s_{1,x}^3 \right\}^2 - \tfrac{1}{5} (r r_1)^3 (s s_1)^3 \left\{ r_x r_{1,x} \,,\, s_x s_{1,x} \right\}^0$$

$$= \tfrac{3}{7} \left\{ (r r_1)^3 (s s_1) (r s_1) (r_1 s_1) s_x^3 s_{1,x} - t \right\}$$

$$D = 0$$

$$E = - \tfrac{1}{15} (r r_1)^3 (s s_1)^3 \left\{ r_x r_{1,x} \,,\, s_x s_{1,x} \right\}^2 = \tfrac{1}{30} (r r_1)^4 (s s_1)^4 - \tfrac{1}{15} (r r_1)^3 (s s_1)^3 (rs) (r_1 s_1).$$

Diese symbolischen Produkte, sowie das die Covariante t darstellende symbolische Produkt:

$$t = (r r_1)^3 (s s_1)^3 r_x r_{1,x} s_x s_{1,x}$$

müssen noch ausgerechnet werden. Zu dem Ende will ich eine Anzahl Relationen zwischen symbolischen Produkten aus den oben aufgestellten Polaren entwickeln.

Aus den Polaren der 2ten Reihe folgen die Relationen:

$$A = r_x s_x^3 \left\{ \varrho_x^4 (r\varrho)^3 (s\varrho) + \tfrac{6}{7} r_x^2 \sigma_x^2 (r\sigma)(s\sigma) - \tfrac{9}{14} r_x s_x \sigma_x^2 (r\sigma)^2 - \tfrac{1}{20} \tau \cdot r_x^3 s_x \right\}$$

$$r_x s_x^3 \varrho_x^4 (r\varrho)^3 = \varrho_x^4 \varrho_{1,x}^4 (\varrho\varrho_1)^4 + \tfrac{3}{14} \varrho_x^6 \sigma_x^2 (\varrho\sigma)^2 - \tfrac{1}{20} \varrho \cdot \tau$$

$$r_x^3 s_x^3 \sigma_x^2 (r\sigma)(s\sigma) = \varrho_x^6 \sigma_x^2 (\varrho\sigma)^2 - \tfrac{3}{14} \sigma^2 \; ; \; r_x^2 s_x^4 \sigma_x^2 (r\sigma)^2 = \varrho_x^6 \sigma_x^2 (\varrho\sigma)^2 + \tfrac{2}{7} \sigma^2$$

$$A = (\varrho\varrho)^4 + \tfrac{3}{7} (\varrho\sigma)^2 - \tfrac{1}{10} \varrho \cdot \tau - \tfrac{1}{49} \sigma^2 .$$

Aus der 1ten Polare der 3ten Reihe folgt die Relation:

$$B = (rs) s_x^2 \left\{ \varrho_x^4 (r\varrho)^3 (s\varrho) + \tfrac{6}{7} r_x^2 \sigma_x^2 (r\sigma)(s\sigma) - \tfrac{9}{14} r_x s_x \sigma_x^2 (r\sigma)^2 - \tfrac{1}{20} \tau \cdot r_x^3 s_x \right\} .$$

Von den Gliedern rechter Hand verschwinden die 3 letzten, das 2te und 4te, weil sie, wenn man die Symbole r und s mit einander vertauscht, ihr Vorzeichen ändern, das 3te weil es, wie man aus der 3ten Polare der 3ten Reihe ableiten kann, den Werth $\sigma_x^3 \sigma_{1,x}^3 (\sigma\sigma_1)$ besitzt. Es bleibt daher nur das erste Glied rechts übrig, nämlich $(rs) \varrho_x^4 s_x^2 (r\varrho)^3 (s\varrho)$; dasselbe hat nach Polare 2, 3ter Reihe den Werth $-\varrho_x^5 \varrho_x (\varrho\sigma)^3$ und man hat daher die Formel:

$$B = -(\varrho\sigma)^3 .$$

Aus den Polaren der 4ten Reihe folgen die Formeln:

$$t = r_x s_x \left\{ \varrho_x^2 (r\varrho)^3 (s\varrho)^3 + \tfrac{6}{7} \sigma_x^2 (rs)^2 (r\sigma)(s\sigma) - \tfrac{3}{14} r_x s_x (r\sigma)^2 (s\sigma)^2 - \tfrac{3}{20} \tau \cdot r_x s_x (rs)^2 \right\}$$

$$r_x s_x \varrho_x^2 (r\varrho)^3 (s\varrho)^3 = \varrho_x^2 \varrho_{1,x}^2 (\varrho\varrho_1)^6 - \tfrac{3}{14} \varrho_x^4 (\varrho\sigma)^4$$

$$r_x s_x \sigma_x^2 (rs)^2 (r\sigma)(s\sigma) = \sigma_x^2 \sigma_{1,x}^2 (\sigma\sigma_1)^2 - \tfrac{1}{6} \sigma \cdot \tau$$

$$r_x^2 s_x^2 (r\sigma)^2 (s\sigma)^2 = \varrho_x^4 (\varrho\sigma)^4 - \tfrac{2}{7} \sigma_x^2 \sigma_{1,x}^2 (\sigma\sigma_1)^2 + \tfrac{1}{30} \sigma \cdot \tau$$

$$t = (\varrho\varrho)^6 - \tfrac{3}{7} (\varrho\sigma)^4 + \tfrac{45}{49} (\sigma\sigma)^2 - \tfrac{3}{10} \sigma \cdot \tau .$$

Aus den Polaren der 5ten Reihe folgen die Formeln:

$$(rr_1)^3 (ss_1)(rs_1)(r_1 s_1) s_x^3 s_{1,x}$$

$$= (rs) s_x \left\{ -\varrho_x^3 (r\varrho)^3 (s\varrho)^2 - \tfrac{6}{7} r_x^2 \sigma_x (r\sigma)(s\sigma)^2 + \tfrac{3}{14} s_x \sigma_x^2 (rs)(r\sigma)^2 + \tfrac{3}{20} \tau \cdot (rs) r_x^2 s_x \right\}$$

$$s_x \varrho_x^3 (rs)(r\varrho)^3 (s\varrho)^2 = \tfrac{1}{2} \varrho_x^4 (\varrho\sigma)^4$$

$$r_x^2 s_x \sigma_x (rs)(r\sigma)(s\sigma)^2 = -\tfrac{1}{2} \sigma_x^2 \sigma_{1,x}^2 (\sigma\sigma_1)^2 + \tfrac{1}{12} \sigma \cdot \tau$$

$$s_x^2 \sigma_x^2 (rs)^2 (r\sigma)^2 = \sigma_x^2 \sigma_{1,x}^2 (\sigma\sigma_1)^2 + \tfrac{1}{3} \sigma \cdot \tau ,$$

mithin ist:

$$(rr_1)^3 (ss_1)(rs_1)(r_1 s_1) s_x^3 s_{1,x} = -\tfrac{1}{2} (\varrho\sigma)^4 + \tfrac{9}{14} (\sigma, \sigma)^2 + \tfrac{3}{20} \sigma \cdot \tau$$

und:

$$C = -\tfrac{2}{7} (\varrho\varrho)^6 - \tfrac{1}{49} (\varrho\sigma)^4 - \tfrac{27}{343} (\sigma\sigma)^2 + \tfrac{9}{70} \sigma \cdot \tau .$$

Aus den Polaren 1 und 2 der ersten Reihe ergeben sich endlich die Relationen:

$$(rr_1)^4 (ss_1)^4 = (r\varrho)^4 (s\varrho)^4 + \tfrac{1}{7}^2 (rs)^2 (r\sigma)^2 (s\sigma)^2 + \tfrac{1}{5} \tau \cdot (rs)^4 = (\varrho\varrho)^8 + \tfrac{1}{7}^2 (\sigma,\sigma)^4 + \tfrac{1}{5} \tau^2$$

$$(rr_1)^3 (ss_1)^3 (rs)(r_1 s_1) = \tfrac{3}{2} (rs)^2 (r\sigma)^2 (s\sigma)^2 + \tfrac{1}{4} \tau \cdot (rs)^4 = \tfrac{3}{2} (\sigma\sigma)^4 + \tfrac{1}{4} \tau^2$$

$$E = \tfrac{1}{30} (\varrho\varrho)^8 - \tfrac{3}{70} (\sigma\sigma)^4 - \tfrac{1}{100} \tau^2 .$$

Zur Berechnung der Covariante Θ und der Resultante R dient daher das folgende System von Formeln:

X)
$$\begin{cases} & A = (\varrho\varrho)^4 + \frac{3}{7}(\varrho\sigma)^2 - \frac{1}{10}\varrho\tau - \frac{1}{40}\sigma^2 \\ \varrho = (f\varphi) & B = -(\varrho\sigma)^3 \\ \sigma = \frac{2}{12}(f\varphi)^3 & C = -\frac{2}{7}(\varrho\varrho)^6 - \frac{1}{49}(\varrho\sigma)^4 - \frac{27}{343}(\sigma\sigma)^2 + \frac{9}{70}\sigma\,.\,\tau \\ \tau = \frac{5}{3}(f\varphi)^5 & t = (\varrho\varrho)^6 - \frac{3}{7}(\varrho\sigma)^4 + \frac{13}{49}(\sigma\sigma)^2 - \frac{3}{10}\sigma\,.\,\tau \\ & E = \frac{1}{30}(\varrho\varrho)^5 - \frac{3}{70}(\sigma\sigma)^4 - \frac{1}{100}\tau^2 \\ \Theta = \frac{t^2}{6} - \frac{C^2}{6} - (AA)^4 - 2(AB)^3 - 2(AC)^2 - 2A\,.\,E + \frac{3}{4}(BB) + (BC); \\ R = (\Theta, \varrho)^8 \end{cases}$$

§ 6.

Die Resultante der Formen:

$f = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} x_2 \ldots\ldots$ (symbolisch $a_x^n = b_x^n \ldots\ldots$)

$\varphi = \alpha_2 x_1^2 + \alpha_1 x_1 x_2 + \alpha_0 x_2^2$ (symbolisch $\varphi_x^2 = \varphi_{1,x}^2 \ldots$).

Haben die Formen f und φ einen Factor gemein, dann verschwindet die Resultante R, haben sie zwei Factoren gemein, ist also φ Factor von f, dann verschwindet eine simultane Covariante Θ. Die Aufgabe, welche ich mir hier stelle, ist, die Formen R und Θ als Aggregate von Formen darzustellen, welche durch Uebereinanderschiebung von Covarianten der Form f mit Covarianten der Form φ entstehen. Die Lösung derselben beruht grossen Theils auf den von Herrn Clebsch, Crelle's J. Bd. 58, gegebenen Methoden.

Bezeichnet man die beiden Factoren der Form φ durch α_x und β_x und ihre Discriminante durch Δ, dann bestehen die Formeln:

(I)
$$\begin{cases} \varphi = \alpha_x \beta_x \;\; ; \;\; \Delta = (\alpha\beta)^2 = -2(\varphi\varphi)^2 \\ R = f(\alpha) f(\beta) = (a\alpha)^n (b\beta)^n . \end{cases}$$

Nach F. (III), § 3. kann man diesen Ausdruck für R in die Reihe entwickeln:

$$R = \Sigma_\nu \frac{\binom{n}{2\nu}\binom{n}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu+1}{2\nu}} \left((ff)^{2\nu},\ (\alpha\beta)^{2\nu} \alpha_x^{n-2\nu} \beta_x^{n-2\nu}\right)^{2n-4\nu}$$

oder:

(II)
$$R = \Sigma_\nu \frac{\binom{n}{2\nu}\binom{n}{2\nu}\Delta^\nu}{\binom{2n-2\nu+1}{2\nu}} \left((ff)^{2\nu},\ \varphi^{n-2\nu}\right)^{2n-4\nu}.$$

Das erste Glied derselben kann durch einfachere Formen ausgedrückt werden. Setzt man nämlich:

(III) $$n = 2m + r,$$

wo $r = 0$ oder $r = 1$ ist, je nachdem n gerade oder ungerade ist, dann entsteht der Ausdruck:

$$(a\alpha)^m (a\beta)^m (b\alpha)^m (b\beta)^m \left((a\varphi), (b\varphi)\right)^r$$

aus dem Ausdrucke:

$$r_{x_1} r_{x_2} r_{x_3} \ldots r_{x_n} s_{x_1} s_{x_2} \ldots s_{x_n}$$

dadurch, dass man r durch a; s durch b; $x_1, x_2 \ldots x_m$ durch α; $x_{m+1}, x_{m+2} \ldots x_{2m}$ durch β; x_{n+1-r} durch φ ersetzt. Man erhält daher eine Reihenentwickelung für den Ausdruck:

$$(a\alpha)^m (a\beta)^m (b\alpha)^m (b\beta)^m \big((a\varphi)(b\varphi)\big)^r = \big((f, \varphi^m)^{2m} \cdot (f, \varphi^m)^{2m}, \varphi^r\big)^{2r},$$

wenn man auf der rechten Seite der Formel (XIV), § 3.:

$$r_{x_1} \ldots r_{x_n} s_{x_1} \ldots s_{x_n} = \Sigma_\nu \frac{(-\tfrac{1}{2})^\nu \Sigma_i (\overline{rs})^{2\nu}_{x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \ldots x_{i_{n-2\nu}}^2} (x_{i_{n-2\nu+1}}, x_{i_{n-2\nu+2}})^2 \ldots\ldots (x_{i_{n-1}}, x_{i_n})^2}{2n-2\nu+1 \,.\, 2n-2\nu-1 \ldots\ldots 2n-4\nu+3}$$

diese Substitutionen vornimmt.

Durch dieselben verschwindet der Factor $(x_i x_\varkappa)^2$:

1. wenn $\varkappa = n+1-r$ ist, da er einen der Werthe:

$$(\varphi\alpha)^2 \quad \text{oder} \quad (\varphi\beta)^2$$

in diesem Falle annimmt;

2. wenn i und $\varkappa$ gleichzeitig entweder der Zahlenreihe $1, 2, \ldots m$ oder der Zahlenreihe $m+1, m+2 \ldots 2m$ angehören, da er in diesem Falle einen der Werthe:

$$(\alpha, \alpha)^2 \quad \text{oder} \quad (\beta, \beta)^2$$

erhält.

Das Glied:

$$G = (\overline{rs})^{2\nu}_{x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \ldots x_{i_{n-2\nu}}^2} (x_{i_{n-2\nu+1}}, x_{i_{n-2\nu+2}})^2 \ldots\ldots (x_{i_{n-1}}, x_{i_n})^2$$

verschwindet daher nur dann nicht, wenn für jeden ihrer Determinantenfactoren $(x_i x_\varkappa)^2$ die Indices i und $\varkappa$, der eine der Reihe $1, 2 \ldots m$, der andere der Reihe $m+1, m+2 \ldots 2m$ angehört. Ist dies der Fall, dann geht das Glied G in den Ausdruck:

$$\big((ff)^{2\nu}, \varphi^\nu (\alpha\beta)^{2\nu} \alpha_x^{2m-2\nu} \beta_x^{2m-2\nu}\big)^{2n-4\nu} = \Delta^\nu \big((ff)^{2\nu}, \varphi^{n-2\nu}\big)^{2n-4\nu}$$

über. Da die Summe:

$$\Sigma_i (\overline{rs})^{2\nu}_{x_{i_1}^2 x_{i_2}^2 \ldots x_{i_{n-2\nu}}^2} (x_{i_{n-2\nu+1}}, x_{i_{n-2\nu+2}})^2 \ldots\ldots (x_{i_{n-1}}, x_{i_n})^2$$

$\nu! \binom{m}{\nu} \binom{m}{\nu}$ solcher nicht verschwindender Glieder besitzt, so hat sie den Werth:

$$\nu! \binom{m}{\nu} \binom{m}{\nu} \Delta^\nu \big((ff)^{2\nu}, \varphi^{n-2\nu}\big)^{2n-4\nu}.$$

Trägt man denselben in obige Gleichung ein, dann erhält man die Formel:

$$\big((f, \varphi^m)^{2m} \cdot (f, \varphi^m)^{2m}, \varphi^r\big)^{2r} = \Sigma_\nu \frac{(-\tfrac{1}{2})^\nu \nu! \binom{m}{\nu} \binom{m}{\nu} \Delta^\nu \big((ff)^{2\nu}, \varphi^{n-2\nu}\big)^{2n-4\nu}}{2n-2\nu+1 \,.\, 2n-2\nu-1 \ldots\ldots 2n-4\nu+3}$$

und nach F. (II):

$$(\text{IV}_a) \qquad R = \big((f, \varphi^m)^{2m} \cdot (f, \varphi^m)^{2m}, \varphi^r\big)^{2r} + \Sigma_\nu c_\nu \Delta^\nu \big((ff)^{2\nu}, \varphi^{n-2\nu}\big)^{2n-4\nu},$$

wobei:

$$(\mathrm{IV_b}) \qquad c_\nu = \frac{\binom{n}{2\nu}\binom{n}{2\nu}}{\binom{2n-2\nu+1}{2\nu}} = \frac{(-\frac{1}{2})^\nu\,\nu!\binom{m}{\nu}\binom{m}{\nu}}{2n-2\nu+1 \ldots 2n-4\nu+3}.$$

Beispiele.

Die Resultante der quadratischen Form φ und der Form n^{ten} Grades ist:

für $n=2: R=(f\varphi)^2.(f\varphi)^2+\frac{1}{2}\Delta(ff)^2$

„ $n=3: R=\big((f\varphi)^2.(f\varphi)^2,\varphi\big)^2+\Delta\big((ff)^2,\varphi\big)^2$

„ $n=4: R=(f,\varphi^2)^4.(f,\varphi^2)^4+2\Delta\big((ff)^2,\varphi^2\big)^4+\frac{1}{6}\Delta^2.(ff)^4$

„ $n=5: R=\big((f,\varphi^2)^4.(f,\varphi^2)^4,\varphi\big)^2+3\Delta\big((ff)^2,\varphi^3\big)^6+\frac{7}{10}\Delta^2\big((ff)^4,\varphi\big)^2$

„ $n=6: R=(f,\varphi^3)^6.(f,\varphi^3)^6+\frac{9}{2}\Delta\big((ff)^2,\varphi^4\big)^8+\frac{12}{7}\Delta^2\big((ff)^4,\varphi^2\big)^4+\frac{3}{20}\Delta^3.(ff)^6$

. . . . . .

Haben die Formen f und φ zwei Factoren gemein, dann verschwinden die Ausdrücke $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ und somit die Covariante:

$$(\mathrm{V}) \qquad \Theta = \frac{\alpha_x^n(\alpha\beta)^n - \beta_x^n(\alpha\alpha)^n}{(\alpha\beta)}.$$

Dieselbe genügt den Formeln:

$$(\Theta f)^n = 0 \;;\; (\Theta\varphi)^2 = 0 \;;\; \big(\Theta,(f\varphi)\big)^n = R;$$

sie soll als Aggregat von Formen ausgedrückt werden, welche durch Uebereinanderschiebung von f mit Potenzen von φ entstehen. — Man kann Θ in der Form schreiben:

$$\Theta.(\alpha\beta) = \Big\{\frac{\alpha_x(\alpha\beta)+\beta_x(\alpha\alpha)}{2}+\frac{a_x(\alpha\beta)}{2}\Big\}^n - \Big\{\frac{\alpha_x(\alpha\beta)+\beta_x(\alpha\alpha)}{2}-\frac{a_x(\alpha\beta)}{2}\Big\}^n$$

$$= 2\,\Sigma_\nu\binom{n}{2\nu+1}\Big(\frac{\alpha_x(\alpha\beta)+\beta_x(\alpha\alpha)}{2}\Big)^{n-2\nu-1}(\tfrac{1}{2})^{2\nu+1}a_x^{2\nu+1}(\alpha\beta)^{2\nu+1},$$

mithin ist [da nach F. (III) $n=2m+r$]:

$$\Theta = \Sigma_\nu\binom{n}{2\nu+1}\Big(\frac{\alpha_x(\alpha\beta)+\beta_x(\alpha\alpha)}{2}\Big)^{2m-2\nu+r-1}(\tfrac{1}{2})^{2\nu}a_x^{2\nu+1}(\alpha\beta)^{2\nu}.$$

Nun ist:

$$\frac{\alpha_x(\alpha\beta)+\beta_x(\alpha\alpha)}{2} = \varphi_x(\alpha\varphi);\quad \Big(\frac{\alpha_x(\alpha\beta)+\beta_x(\alpha\alpha)}{2}\Big)^2 = \varphi.(\alpha\varphi)^2+\tfrac{1}{4}a_x^2(\alpha\beta)^2,$$

also:

$$\Theta = [\varphi_x(\alpha\varphi)]^{1-r}\,\Sigma_\nu\binom{n}{2\nu+1}(\tfrac{1}{2})^{2\nu}\big[\varphi.(\alpha\varphi)^2+\tfrac{1}{4}a_x^2(\alpha\beta)^2\big]^{m-\nu+r-1}a_x^{2\nu+1}(\alpha\beta)^{2\nu}$$

$$= [\varphi_x(\alpha\varphi)]^{1-r}\,\Sigma_{\nu,\lambda}\binom{m-\nu+r-1}{\lambda}\binom{n}{2\nu+1}(\tfrac{1}{2})^{2m+2r-2-2\lambda}\Delta^{m+r-1-\lambda}\varphi^\lambda a_x^{2m+2r-1-2\lambda}\big[(\alpha\varphi)^2\big]^\lambda$$

$$(\mathrm{VII_a}) \qquad \Theta = \Sigma_\lambda\, c_\lambda\,\Delta^{m-\lambda+r-1}\varphi^\lambda\,(f,\varphi^{\lambda+1-r})^{2\lambda+1-r},$$

wobei:

$$(\mathrm{VII_b}) \qquad c_\lambda = (\tfrac{1}{2})^{n+r-2\lambda-2}\,\Sigma_\nu\binom{m-\nu+r-1}{\lambda}\binom{n}{2\nu+1}.$$

Beispiele.

Die simultane Covariante Θ der quadratischen Form φ und der Form n^{ten} Grades f ist:

für $n = 2$: $\Theta = 2(f, \varphi)$

„ $n = 3$: $\Theta = \Delta f + 3\varphi \,.\, (f, \varphi)^2$

„ $n = 4$: $\Theta = 2\Delta(f, \varphi) + 4\varphi \,.\, (f, \varphi^2)^3$

„ $n = 5$: $\Theta = \Delta^2 f + 5\varphi \,.\, \Delta(f, \varphi)^2 + 5\varphi^2 (f, \varphi^2)^1$

„ $n = 6$: $\Theta = 2\Delta^2(f, \varphi) + 8\varphi \,.\, \Delta(f, \varphi^2)^3 + 6\varphi^2 (f, \varphi^3)^5$.

§ 7.

Die Resultante zweier Formen verschiedenen Grades.

Die Berechnung der Resultante der Formen n^{ten} und m^{ten} Grades:

$$f = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} x_2 + a_{n-2} x_1^{n-2} x_2^2 \ldots\ldots$$
$$\varphi = \alpha_m x_1^m + \alpha_{m-1} x_1^{m-1} x_2 + \alpha_{m-2} x_1^{m-2} x_2^2 \ldots\ldots$$

deren Grade m und n verschieden sind (ich will $n > m$ annehmen), ist bei Weitem schwieriger, als die von Formen gleichen Grades. Von den zu ihrer Bestimmung aufgestellten Determinanten erwähne ich die in Herrn Baltzers Det. 3. Aufl., pag. 111 und 112 gegebenen; ich will die erste mit P, die letztere mit R bezeichnen. Die Determinante P ist zwar symmetrisch, aber mit einem unnöthigen Factor behaftet, während die Determinante R unsymmetrisch ist, was die Rechnung sehr erschwert. Bei beiden findet der Uebelstand statt, dass die für die Gleichungen $f\left(\frac{1}{x}\right)$ und $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ gebildeten Determinanten andere Elemente enthalten, als die für $f(x)$ und $\varphi(x)$ gebildeten. Da dieser Umstand die directe symbolische Rechnung unmöglich macht, so will ich die zweite Determinante R dadurch transformiren, dass ich die $n - m$ obersten Horizontalreihen mit passenden Coefficienten multiplicirt von den m untersten abziehe und sodann diese $n - m$ obersten Horizontalreihen durch Multiplication mit einer Determinante D $(n - m)^{\text{ter}}$ Ordnung, deren Elemente von den Coefficienten a und α unabhängig sind, in eine regelmässigere Form bringe. Die durch diese Operation entstehende Determinante S ist das Produkt der Determinanten R und D; sie sowohl wie auch D sind durch symbolische Produkte darstellbar und daher R als Quotient zweier symbolischer Produkte. Die Ausführung der Division führt im Allgemeinen auf verwickelte Ausdrücke, ist jedoch in jedem speciellen Falle leicht zu bewerkstelligen. — Nachdem die Resultante R symbolisch ausgedrückt ist, schliesst sich der Gang der Rechnung im Wesentlichen dem in § 4. verfolgten Wege an.

Die Variationen der Resultante, die aus der ersten derselben gebildete Covariante und die zwischen den Elementen der Determinante S bestehenden Relationen werden symbolisch ausgedrückt. Hierbei sollen die Variationen von S in dem Sinne aufgefasst werden, dass nur die Elemente der m letzten Horizontalreihen Incremente erhalten. Schliesslich drücke ich die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial R}{\partial a_x}$ als Aggregate der Unterdeterminanten von R aus; die Differentialquotienten $\frac{\partial R}{\partial \alpha_x}$ übergehe ich, weil ihre Ausdrücke verwickelter sind und deshalb ein geringeres Interesse gewähren.

Als Ausgangspunkt für die in diesem § anzustellenden Rechnungen wähle ich die von Herrn Cayley (vgl. Herrn Baltzer's Determinantent. pag. 113) aufgestellte symmetrische Form:

$$(I_a) \quad G = \frac{f \cdot \varphi_{y^m} y_2^{n-m} - \varphi \cdot f_{y^n} x_2^{n-m}}{(xy)} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{x=0}^{x=n-1} C_{ix}\, x_1^i\, x_2^{n-1-i}\, y_1^x\, y_2^{n-1-x}.$$

Da dieselbe für beliebige Werthe der Variabeln y verschwindet, wenn man die Variabeln x durch gemeinsame Wurzeln der Gleichungen

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \varphi = 0$$

ersetzt, so verschwinden für diese Wurzeln auch die einzelnen Coefficienten der Potenzen der y und es ergeben sich die in Bezug auf die n Produkte $x_1^i x_2^{n-i-1}$ linearen homogenen n Gleichungen:

$$(I_b) \qquad \sum_{i=0}^{i=n-1} C_{ix}\, x_1^i\, x_2^{n-i-1} = 0$$

mit der Determinante:

$$(I_c) \qquad P = \Sigma \pm C_{00} \cdot C_{11} \cdot C_{22} \cdot \ldots \cdot C_{n-1,\,n-1}.$$

Haben die Formen f und φ einen Factor $(x\omega)$ gemein, dann verschwindet die Determinante P und ihre Unterdeterminanten, welche mit $\Gamma_{i,x} = \Gamma_{i+x}$ bezeichnet werden mögen (vgl. Baltzer's Det. pag. 114), sind den Potenzen des Bruches $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ proportional. Es findet daher die Formel statt:

$$(I_d) \qquad \omega_1^{\nu}\, \omega_2^{n-\nu-1} = g\Gamma_{\nu},$$

in welcher g einen Proportionalitätsfactor bedeutet.

Ausserdem genügen die Unterdeterminanten Γ_ν den Gleichungen:

$$(I_e) \qquad \begin{cases} a_n \Gamma_{n+\nu} + a_{n-1} \Gamma_{n+\nu-1} + a_{n-2} \Gamma_{n+\nu-2} \cdots = 0 \\ \alpha_m \Gamma_{m+\nu} + \alpha_{m-1} \Gamma_{m+\nu-1} + \alpha_{m-2} \Gamma_{m+\nu-2} \cdots = 0, \end{cases}$$

durch welche sie bis auf einen numerischen Factor bestimmt werden.

Die Determinante P ist nicht die eigentliche Resultante der Formen f und φ, sondern mit einem unnöthigen Factor behaftet. Um die eigentliche Resultante zu erhalten (vgl. Baltzer's Det. pag. 112), muss man in dem Systeme der Gleichungen (I_b) die $n - m$ letzten

(nämlich diejenigen, bei denen $\varkappa > m-1$ ist) durch die Gleichungen:

$$x_1^{n-m-1}\varphi = 0 \quad x_1^{n-m-2}x_2\varphi = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad x_2^{n-m-1}\varphi = 0$$

ersetzen. Man erhält dann das folgende neue System von n Gleichungen:

$$(\mathrm{II_a}) \qquad \begin{cases} \Sigma C_{i,0}\, x_1^i\, x_2^{n-i-1} = 0 \\ \Sigma C_{i,1}\, x_1^i\, x_2^{n-i-1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma C_{i,m-1}\, x_1^i\, x_2^{n-i-1} = 0 \\ \Sigma \alpha_i\, x_1^{n-m+i-1}\, x_2^{m-i} = 0 \\ \Sigma \alpha_i\, x_1^{n-m+i-2}\, x_2^{m-i+1} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Sigma \alpha_i\, x_1^i\, x_2^{n-i-1} = 0; \end{cases}$$

ihre Determinante:

$$(\mathrm{II_b}) \qquad \Sigma \pm C_{00}\, C_{11} \ldots C_{m-1,\,m-1}\, \alpha_0\, \alpha_0\, \alpha_0 \ldots = R$$

will ich durch R und ihre Unterdeterminanten nach den Elementen $C_{i\varkappa}$ durch $\gamma_{i\varkappa}$ bezeichnen. Durch Vergleichung der Determinanten P und R erhält man dann die Relationen:

$$(\mathrm{II_c}) \qquad P = \alpha_0^{n-m} R$$

$$(\mathrm{II_d}) \qquad \Gamma_{i+\varkappa} = \alpha_0^{n-m}\gamma_{i\varkappa},$$

von denen die letzten zeigen, dass diejenigen der Unterdeterminanten $\gamma_{i\varkappa}$, bei welchen die Summe der Indices $i+\varkappa$ denselben Werth hat (vgl. § 4.), einander gleich sind. Ich will daher die Grössen $\gamma_{i\varkappa}$ durch $\gamma_{i+\varkappa}$ bezeichnen und die Gleichung $(\mathrm{II_d})$ durch die Formel ersetzen:

$$(\mathrm{II_e}) \qquad \Gamma_\nu = \gamma_0^{n-m}\gamma_\nu.$$

Trägt man für die Grössen Γ_ν diese Werthe in die Formeln $(\mathrm{I_d})$ und $(\mathrm{I_e})$ ein, dann entstehen die Gleichungen:

$$(\mathrm{II_f}) \qquad \omega_1^{\nu}\,\omega_2^{m+n-2-\nu} = g_1\gamma_\nu,$$

in welchen g_1 einen Proportionalitätsfactor bedeutet und

$$(\mathrm{III}) \qquad \begin{cases} a_n\gamma_{n+\nu} + a_{n-1}\gamma_{n+\nu-1} \ldots\ldots = 0 \\ \alpha_m\gamma_{m+\nu} + \alpha_{m-1}\gamma_{m+\nu-1} \ldots\ldots = 0. \end{cases}$$

Bezeichnet man (wie es im § 4. geschehen ist) die Covariante:

$$\sum_{i=0}^{i=n-1}\sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=n-1}(-1)^{i+\varkappa}\binom{n-1}{i}\binom{m-1}{\varkappa}\gamma_{i\varkappa}\, x_1^{m+n-i-\varkappa-2}\, x_2^{i+\varkappa}$$

$$(\mathrm{IV_a}) \qquad = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m+n-2}(-1)^\lambda\binom{m+n-2}{\lambda}\gamma_\lambda\, x^{m+n-\lambda-2}\, x_2^\lambda = \Theta$$

durch:

$$\Theta = \Theta_{m+n-2}\, x_1^{m+n-2} + \Theta_{m+n-3}\, x_1^{m+n-3} \ldots,$$

setzt man also:

$$(IV_b) \qquad (-1)^\lambda \binom{m+n-2}{\lambda} \gamma_\lambda = \Theta_{m+n-2-\lambda},$$

dann kann man die Formeln (II_f) in die eine zusammenfassen:

$$(IV_c) \qquad (x\omega)^{m+n-2} = y_1 \Theta .$$

Die bisher zur Bestimmung der Resultante aufgestellten Determinanten P und R eignen sich nicht dazu, dieselbe symbolisch auszudrücken. Um diesen Zweck zu erreichen, soll deshalb eine dritte Determinante gebildet werden.

Die Form:

$$(V_a) \qquad F = \frac{f \cdot \varphi_{y^m} - \varphi \cdot f_{y^m}}{(xy)} = \sum_{i=0}^{i=n-1} \sum_{\varkappa=0}^{\varkappa=m-1} c_{i\varkappa}\, x_1^{\,i} x_2^{\,n-1-i}\, y_1^{\,\varkappa} y_2^{\,m-1-\varkappa}$$

will ich die Cayley'sche Form nennen und symbolisch durch

$$(r^{(1)}x_1 + r^{(2)}x_2)^{n-1}(s^{(1)}y_1 + s^{(2)}y_2)^{m-1} = (r_1^{(1)}x_1 + r_1^{(2)}x_2)^{n-1}(s_1^{(1)}y_1 + s_2^{(1)}y_2)^{m-1} \ldots\ldots$$
$$= r_x^{n-1} s_y^{m-1} = r_{1,x}^{n-1} s_{1,y}^{m-1} = r_{2,x}^{n-1} s_{2,y}^{m-1} \ldots\ldots$$

bezeichnen, so dass ihre Coefficienten $c_{i\varkappa}$ die symbolischen Werthe haben:

$$(V_b) \qquad c_{i\varkappa} = \binom{n-1}{i}\binom{m-1}{\varkappa} r^{(1)i} r^{(2)n-i-1} s^{(1)\varkappa} s^{(2)n-1-\varkappa}.$$

Da die Form F für beliebige Werthe der Variabeln verschwindet, wenn man darin die Variabeln x durch eine gemeinsame Wurzel $x = \omega$ der Gleichungen $f = 0$ und $\varphi = 0$ ersetzt, so verschwinden in diesem Falle auch die einzelnen Coefficienten der Potenzen von y und man hat die m Gleichungen:

$$(VI) \qquad \sum_{i=0}^{i=n-1} c_{i\varkappa}\, x_2^{\,n-i-1} x_1^{\,i} = 0.$$

Um weitere, für $x = \omega$ geltende Formeln $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades zu erhalten, führe ich folgende $n-m$ neue Formen $(n-m-1)^{\text{ten}}$ Grades ein:

$$l = l_{n-m-1} x_1^{n-m-1} + l_{n-m-2} x_1^{n-m-2} x_2 \ldots\ldots \text{ (symbolisch } l_x^{n-m-1})$$
$$l_1 = l_{1,n-m-1} x_1^{n-m-1} + l_{1,n-m-2} x_1^{n-m-2} x_2 \ldots\ldots \text{ (symbolisch } l_{1,x}^{n-m-1})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$l_{n-m-1} = l_{n-m-1,n-m-1} x_1^{n-m-1} + l_{n-m-1,n-m-2} x_1^{n-m-2} x_2 \ldots\ldots \text{ (symbolisch } l_{n-m-1,x}^{n-m-1})$$

und bezeichne ihre Determinante:

$$(VII_a) \qquad \Sigma \pm l_{00} \cdot l_{11} \cdot l_{22} \ldots l_{n-m-1,\,n-m-1} = D$$

durch D, sowie ihre Produkte mit der Form φ:

$$(VII_b) \qquad l_i \cdot \varphi_i = p_i$$

durch:

$$(VII_c) \qquad p_i = p_{i,n-1} x_1^{n-1} + p_{i,n-2} x_1^{n-2} x_2 \ldots\ldots \text{ (symbolisch } p_{i,x}^{n-1}).$$

Für die Wurzeln $x = \omega$ besteht somit das System der n folgenden Gleichungen $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades:

$$\Sigma c_{i0} x_1^i x_2^{n-i-1} = 0$$
$$\Sigma c_{i1} x_1^i x_2^{n-i-1} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma c_{i,m-1} x_1^i x_2^{n-i-1} = 0$$
$$\Sigma p_i x_1^i x_2^{n-i-1} = 0$$
$$\Sigma p_{1,i} x_1^i x_2^{n-i-1} = 0 \quad .$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\Sigma p_{n-m-1,i} x_1^i x_2^{n-i-1} = 0.$$

Ihre Determinante

(VIII) $$\Sigma \pm c_{00} c_{11} \cdots c_{m-1,m-1} p_m p_{1,m+1} \cdots p_{n-m-1,n-1} = S$$

will ich durch S und die Unterdeterminanten derselben nach den Elementen $c_{i\varkappa}$ durch $g_{i\varkappa}$ bezeichnen; sie sind mit der Determinante R und deren Unterdeterminanten durch die Relationen verbunden:

(IX_a) $$S = D \,.\, R$$

(IX_b) $$g_{i\varkappa} = D \,.\, \gamma_{i+\varkappa}.$$

Die letzteren zeigen, dass diejenigen Unterdeterminanten $g_{i\varkappa}$ (wie es früher bei den Unterdeterminanten $\gamma_{i\varkappa}$ und $\Gamma_{i\varkappa}$ der Fall war), bei denen die Summe der Indices $i+\varkappa$ denselben Werth hat, einander gleich sind. Man kann sie daher durch $g_{i+\varkappa}$ bezeichnen und die Formel (IX_b) in der Form schreiben:

(IX_c) $$g_\nu = D\gamma_\nu.$$

Trägt man die hieraus bestimmten Werthe der Unterdeterminanten γ_ν in die Formel (IV_a) ein, dann gelangt man zu dem Ausdrucke:

(X) $$D\Theta = \sum_{\lambda=0}^{\lambda=m+n-2} (-1)^\lambda \binom{m+n-2}{\lambda} g_\lambda x_1^{m+n-\lambda-2} x_2^\lambda.$$

Ebenso wie die Determinante S und ihre Unterdeterminanten erster Ordnung, so sind auch ihre Unterdeterminanten höherer Ordnung nach den Elementen $c_{i\varkappa}$ den entsprechenden Unterdeterminanten von R nach den Elementen $C_{i\varkappa}$ proportional und man hat die Relationen:

$$D\frac{\partial R}{\partial C_{i\varkappa}} = \frac{\partial S}{\partial c_{i\varkappa}}$$
$$D\frac{\partial_2 R}{\partial C_{i\varkappa}\partial C_{i'\varkappa'}} = \frac{\partial_2 S}{\partial c_{i\varkappa}\partial c_{i'\varkappa'}}$$
$$D\frac{\partial_3 R}{\partial C_{i\varkappa}\partial C_{i'\varkappa'}\partial C_{i''\varkappa''}} = \frac{\partial_3 S}{\partial c_{i\varkappa}\partial c_{i'\varkappa'}\partial c_{i''\varkappa''}}.$$

Bezeichnet man die Ausdrücke:

$$\Sigma \frac{\partial R}{\partial C_{i\varkappa}} \delta c_{i\varkappa} = \delta R \quad ; \quad \Sigma \frac{\partial_2 R}{\partial C_{i\varkappa}\partial C_{i'\varkappa'}} \delta c_{i\varkappa}\delta c_{i'\varkappa'} = \delta_2 R \ldots.$$
$$\Sigma \frac{\partial S}{\partial c_{i\varkappa}} \delta c_{i\varkappa} = \delta S \quad ; \quad \Sigma \frac{\partial_2 S}{\partial c_{i\varkappa}\partial c_{i'\varkappa'}} \delta c_{i\varkappa}\delta c_{i'\varkappa'} = \delta_2 S \ldots.$$

dann kann man diese Gruppen von Relationen in die Formeln zusammenfassen:

$$\text{(XI)} \qquad \begin{cases} D\,\delta\,R = \delta\,S \\ D\,\delta_2 R = \delta_2 S \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

Haben die Formen f und φ mehr als einen Factor gemein, dann verschwindet die Variation der Resultante:

$$\text{(XII)} \quad \delta R = \Sigma_{i\varkappa} \frac{\partial R}{\partial c_{i\varkappa}} \delta c_{i\varkappa} = \Sigma_\lambda \gamma_\lambda \delta \Sigma_i c_{i,\lambda-i} = \Sigma_\lambda \frac{(-1)^\lambda}{\binom{m+n-2}{\lambda}} \Theta_{m+n-2-\lambda}\, \delta \Sigma_i c_{i,\lambda-i}$$

identisch; haben sie mehr als 2, 3 .. Factoren gemein, dann verschwinden ausserdem die Variationen:

$$\delta_2 R \quad , \quad \delta_3 R \ \ldots .$$

Die Determinanten S und D, die Variationen δS, $\delta_2 S \ldots$ und die Covariante $D \,.\, \Theta$ lassen sich durch symbolische Produkte darstellen, mithin die Formen R, δR, $\delta_2 R$ .. und Θ als Quotienten symbolischer Produkte mit dem gemeinsamen Nenner D.

Trägt man in der Formel (VIII):

$$S = \Sigma \pm c_{00}\, c_{11} \ldots c_{m-1,\,m-1}\, p_m\, p_{1,\,m+1} \ldots p_{n-m-1,\,n-1}$$

statt der Coefficienten $c_{i\varkappa}$ und $p_{\varkappa i}$ ihre symbolischen Werthe ein [vgl. F. (V_b) und (VII_c)]:

$$c_{i\varkappa} = \binom{n-1}{i}\binom{m-1}{\varkappa} r_\lambda^{(1)\,i}\, r_\lambda^{(2)\,n-1-i}\, s_\lambda^{(1)\,\varkappa}\, s_\lambda^{(2)\,m-1-\varkappa}$$

$$p_{\varkappa i} = \binom{n-1}{1} p_{\varkappa,1}^{\,i}\, p_{\varkappa,2}^{\,n-1-i},$$

dann erhält man eine Determinante, in welcher die Elemente der μ^{ten} Horizontalreihe für $\mu \leq m$ den gemeinsamen Factor $\binom{m-1}{\mu-1}$ und die Elemente der ν^{ten} Vertikalreihe den Factor $\binom{n-1}{\nu-1}$ besitzen. Bezeichnet man mithin den numerischen Factor:

$$\binom{m-1}{0}\binom{m-1}{1} \ldots \binom{m-1}{m-1}\binom{n-1}{0}\binom{n-1}{1} \ldots \binom{n-1}{n-1} = c$$

durch c, dann erhält man für die Determinante S den symbolischen Ausdruck:

$$S = c\,\Sigma \pm r^{(2)\,n-1}\, s^{(2)\,m-1} \,.\, r_1^{(1)}\, r_1^{(2)\,n-2}\, s_1^{(1)}\, s_1^{(2)\,n-2} \ldots \ldots$$
$$r_{m-1}^{(1)\,m-1}\, r_{m-1}^{(2)\,n-m}\, s_{m-1}^{(1)\,m-1} \,.\, p^{(1)\,m}\, p^{(2)\,n-m-1} \ldots \ldots p_{n-m-1}^{(1)\,n-1}.$$

Die Elemente der 1^{ten} Horizontalreihe haben den Factor $s^{(2)\,m-1}$, die der 2^{ten} Horizontalreihe den Factor $s_1^{(2)\,m-2} s_1^{(1)}$, die der 3^{ten} Horizontalreihe den Factor $s_2^{(2)\,m-3} s_2^{(1)\,2}$ .., die der m^{ten} den Factor $s_{m-1}^{(1)\,m-1}$.

gemein; schreibt man diese Factoren vor die Determinante, dann erhält man für S den Werth:

$$S = c s^{(2)m-1} \cdot s_1^{(1)} s_1^{(2)m-2} \ldots s_{m-1}^{(1)m-1} \Sigma \pm r^{(2)n-1} \ldots$$
$$r_{m-1}^{(1)m-1} r_{m-1}^{(2)n-m} p^{(1)m} p^{(2)n-m-1} \ldots p_{n-m-1}^{(1)n-1}.$$

Vertauscht man hier die verschiedenen, die Form F darstellenden Symbolenpaare $r_i s_i$ unter einander, dann gelangt man zu $m!$ Formeln, welche sich in die folgende zusammensetzen lassen:

$$S = \frac{c}{m!} \Sigma \pm s^{(2)m-1} \ldots s_{m-1}^{(1)m-1} \Sigma \pm r^{(2)n-1} \ldots\ldots p_{n-m-1}^{(1)n-1}.$$

Die Factoren dieses Ausdruckes, die Determinanten:

$$\Sigma \pm s^{(2)m-1} \ldots s_{m-1}^{(1)m-1} \quad \text{und} \quad \Sigma \pm r^{(2)n-1} \ldots\ldots p_{n-m-1}^{(1)n-1}$$

haben die Werthe:

$$\Pi_{i\varkappa}(s_i s_\varkappa) \quad \text{und} \quad \Pi_{i\varkappa\lambda\mu}(r_i r_\varkappa)(r_i p_\lambda)(p_\lambda p_\mu),$$

mithin wird die Determinante S bis auf einen numerischen Factor durch das symbolische Produkt dargestellt:

(XIII$_a$) $$DR = S = \Pi_{i\varkappa\lambda\mu}(r_i r_\varkappa)(s_i s_\varkappa)(r_i p_\lambda)(p_\lambda p_\mu).$$

Die Determinante D und die Covariante $D \cdot \Theta$ lassen sich durch die symbolischen Produkte ausdrücken:

(XIII$_b$) $$D = \Pi_{i\varkappa}(l_i l_\varkappa)$$

(XIII$_c$) $$D \cdot \Theta = \Pi_{i\varkappa\lambda\mu}(r_i r_\varkappa)(s_i s_\varkappa)(r_i p_\lambda)(p_\lambda p_\mu) r_{i,\varkappa} s_{i,\varkappa}.$$

Bezeichnet man die Variation der Form F symbolisch durch:

$$\delta F = \varrho_x^n \sigma_y^m = \varrho_{1,x}^n \sigma_{1,y}^m \ldots\ldots$$

dann erhält man für die Variationen der Elementarcovarianten $(\overline{rs})^\nu$ und der Determinante S die Ausdrücke:

(XIV$_a$) $$\delta(\overline{rs})^\nu = (\overline{\varrho\sigma})^\nu$$

(XIV$_b$)
$$\delta S \begin{cases} = \Pi_{i\varkappa\lambda\mu}(r_i r_\varkappa)(s_i s_\varkappa)(r_i p_\lambda)(p_\lambda p_\mu)(r_i \varrho)(s_i \sigma) \\ = \Sigma_\nu \frac{\binom{m-1}{\nu}\binom{n-1}{\nu}}{\binom{m+n-\nu-1}{\nu}} \left(\Pi_{i\varkappa\lambda\mu}(r_i r_\varkappa)(s_i s_\varkappa)(r_i p_\lambda)(p_\lambda p_\mu)(\Pi_i r_{i,x}, \Pi s_{i,x})^\nu, (\overline{\varrho\sigma})^\nu\right)^{m+n-\nu-} \end{cases}$$

(XIV$_c$) $$\delta_2 S = \Pi_{i\varkappa\lambda\mu}(r_i r_\varkappa)(s_i s_\varkappa)(r_i p_\lambda)(p_\lambda p_\mu)(r_i \varrho)(r_i \varrho_1)(s_i \sigma)(s_i \sigma_1)$$

. . . . . .

Trägt man in diese symbolischen Produkte für die Symbole p_i ihre Werthe aus der Formel (VII$_b$):

$$p_{i,x}^{n-1} = l_{i,x}^{n-m-1} a_x^m$$

ein, dann erhält man durch $D = \Pi_{i\varkappa}(l_i l_\varkappa)$ theilbare Aggregate symbolischer Produkte, welche man durch Uebereinanderschiebungen der Elementarcovarianten bilden kann. Die hierbei entstehenden Ausdrücke

sind jedoch so complicirt, dass ich ihre allgemeine Entwickelung übergehe und mich darauf beschränke, den Weg an einzelnen Beispielen im folgenden Paragraphen anzudeuten.

Da sich schliesslich Alles aus den Elementarcovarianten $(\bar{rs})^\nu$ der Form F ableiten lässt, so will ich diese Formen durch Uebereinanderschiebungen von f und φ bestimmen. — Trägt man in der Identität (V_a):

$$f \cdot \varphi_{y^m} - \varphi \cdot f_{y^m} = r_x^{n-1} s_y^{m-1} (xy)$$

für die Ausdrücke $f \cdot \varphi_{y^m}$, $\varphi \cdot f_{y^m}$ und $r_x^{n-1} s_y^{m-1}$ ihre Reihen aus den Formeln (X) und (XII) des § 2. ein, nämlich:

$$f \cdot \varphi_{y^m} = \Sigma_\mu \frac{\binom{m}{\mu}\binom{n}{\mu}}{\binom{m+n-\mu+1}{\mu}} (f, \varphi)^\mu_{y^m-\mu} (xy)^\mu$$

$$\varphi \cdot f_{y^m} = \Sigma_\mu \frac{\binom{m}{\mu}\binom{n}{\mu}}{\binom{m+n-\mu+1}{\mu}} (\varphi, f)^\mu_{y^m-\mu} (xy)^\mu$$

$$r_x^{n-1} s_y^{m-1} = \Sigma_\nu \frac{\binom{m-1}{\nu}\binom{n-1}{\nu}}{\binom{m+n-\nu-1}{\nu}} (\bar{rs})^\nu_{y^{m-\nu-1}} (xy)^\nu,$$

dann erhält man die Identität:

$$\Sigma_\mu \frac{\binom{m}{\mu}\left\{\binom{n}{\mu} - (-1)^\mu \binom{m}{\mu}\right\}}{\binom{m+n-\mu+1}{\mu}} (f\varphi)^\mu_{y^m-\mu} (xy)^\mu$$

$$= \Sigma_\nu \frac{\binom{m-1}{\nu}\binom{n-1}{\nu}}{\binom{m+n-\nu-1}{\nu}} (\bar{rs})^\nu_{y^{m-\nu-1}} (xy)^{\nu+1}.$$

Dieselbe geht, wenn man in der Summe linker Hand (in welcher das erste Glied verschwindet) den Summationsbuchstaben μ durch $\nu + 1$ ersetzt, in die folgende über:

$$\Sigma_\nu \frac{\binom{m}{\nu+1}\left\{\binom{n}{\nu+1} + (-1)^\nu \binom{m}{\nu+1}\right\}}{\binom{m+n-\nu}{\nu+1}} (f\varphi)^{\nu+1}_{y^{m-\nu-1}} (xy)^{\nu+1}$$

$$= \Sigma_\nu \frac{\binom{m-1}{\nu}\binom{n-1}{\nu}}{\binom{m+n-\nu-1}{\nu}} (\bar{rs})^\nu_{y^{m-\nu-1}} (xy)^{\nu+1}.$$

Da diese Gleichung nur dann bestehen kann, wenn die einzelnen Glieder auf beiden Seiten übereinstimmen, so hat man die Relationen:

$$\frac{\binom{m}{\nu+1}\left\{\binom{n}{\nu+1}+(-1)^{\nu}\binom{m}{\nu+1}\right\}}{\binom{m+n-\nu}{\nu+1}}(f\varphi)^{\nu+1}=\frac{\binom{m-1}{\nu}\binom{n-1}{\nu}}{\binom{m+n-\nu-1}{\nu}}(\overline{rs})^{\nu},$$

aus denen sich für die Elementarcovarianten $(\overline{rs})^{\nu}$ die Werthe ergeben:

$$\text{(XV)}\qquad (\overline{rs})^{\nu}=\frac{m\,.\,n}{\nu+1\,.\,m+n-\nu}\left\{1+(-1)^{\nu}\frac{m\,.\,m-1\,.\,\ldots\,.\,m-\nu}{n\,.\,n-1\,.\,\ldots\,.\,n-\nu}\right\}(f\varphi)^{\nu+1}.$$

Beispiele.

Für $n=m+1$ ist:

$$(\overline{rs})^{0}=m\,.\,(f\varphi);\quad (rs)=\tfrac{1}{2}(f\varphi)^{2};\quad (rs)^{2}=\frac{m}{3}(f\varphi)^{3};\quad (rs)^{3}=\frac{m}{2\,m-2}(f\varphi)^{4}\ldots.$$

Für $n=m+2$:

$$(\overline{rs})^{0}=m(f\varphi);\quad (rs)=\frac{m}{m+1}(f\varphi)^{2};\quad (\overline{rs})^{2}=\tfrac{1}{3}\cdot\frac{m^{2}+2}{m+1}(f\varphi)^{3}\ldots..$$

Um die Variationen δS und δR als Aggregate der Incremente $\delta(\overline{rs})^{\nu}_{\varkappa}$ der Coefficienten der Elementarcovarianten auszudrücken, ersetze man in der Formel (XII):

$$\frac{1}{D}\delta S=\delta R=\Sigma_{\lambda}\frac{(-1)^{\lambda}}{\binom{m+n-2}{\lambda}}\Theta_{m+n-2-\lambda}\,\delta\,\Sigma_{i}c_{i,\,\lambda-i}$$

die Summe $\Sigma c_{i,\,\lambda-i}$ durch ihren Werth $(rs)^{0}_{\lambda}$ [vgl. § 2., F. (IV)]. Es entsteht dann die Gleichung:

$$\text{(XVI}_{\text{a}})\qquad \frac{1}{D}\delta S=\delta R=\Sigma\frac{(-1)^{\lambda}}{\binom{m+n-2}{\lambda}}\Theta_{m+n-2-\lambda}\,\delta\,(\overline{rs})^{0}_{\lambda}=(\Theta,\,(\overline{\varrho\sigma})^{0})^{m+n-2}$$

aus welcher sich leicht die Formeln ableiten lassen:

$$\text{(XVI}_{\text{b}})\qquad mR=(\Theta,\,(rs)^{0})^{m+n-2}.$$

$$\text{(XVI}_{\text{c}})\qquad \frac{\partial R}{\partial(\overline{rs})^{0}_{\varkappa}}=\gamma_{\varkappa}$$

$$\text{(XVI}_{\text{d}})\qquad \frac{\partial R}{\partial(\overline{rs})^{\nu}_{\varkappa}}=0\quad\text{für}\quad\nu>0.$$

Die Relationen (XVI$_{\text{d}}$) lassen sich in symbolischer Form ausdrücken. Durch Vergleichung der beiden Werthe, welche in den Formeln (XIV$_{\text{b}}$) und (XVI$_{\text{a}}$) zur Bestimmung der Variation δR gegeben sind, erhält man die Identität:

$$\Sigma_{\nu}\frac{\binom{m-1}{\nu}\binom{m-1}{\nu}}{\binom{m+n-\nu-1}{\nu}}\left\{\Pi_{i\varkappa\lambda\mu}(r_{i}r_{\varkappa})(s_{i}s_{\varkappa})(r_{i}p_{\lambda})(p_{\lambda}p_{\mu})(\Pi_{i}r_{i,x},\Pi_{i}s_{i,x})^{\nu},(\varrho\sigma)^{\nu}\right\}^{m+n-\nu-2}=D(\Theta,(\overline{\varrho\sigma})^{0})^{m+n-}$$

aus welcher man die Relationen ableiten kann:

$$\text{(XVII)} \quad \begin{cases} \Pi_{i\varkappa\lambda\mu}\,(r_i r_\varkappa)\,(s_i s_\varkappa)\,(r_i p_\lambda)\,(p_\lambda p_\mu)\,(\Pi r_{i,x}\ ,\ \Pi s_{i,x}) = 0 \\ \Pi_{i,\varkappa,\ \lambda,\mu}\,(r_i r_\varkappa)\,(s_i s_\varkappa)\,(r_i p_\lambda)\,(p_\lambda p_\mu)\,(\Pi r_{i,x}\ ,\ \Pi s_{i,x})^2 = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

welche, wenn man die angedeutete Operation:

$$(\Pi r_{i,x}\ ,\ \Pi s_{i,x})^\nu$$

wirklich ausführt, die Form annehmen:

$$\text{(XVIII)} \quad \begin{aligned} 0 = {} & \Pi_{i\varkappa\lambda\mu}\,(r_i r_\varkappa)\,(s_i s_\varkappa)\,(r_i p_\lambda)\,(p_\lambda p_\mu)\,. \\ & .\ \Sigma (r s_{i_1})(r_1 s_{i_2}) \ldots (r_{\nu-1}\ ,\ s_{i_\nu}) r_{\nu,x} \ldots r_{n-2,x} s_{i_{\nu+1},x} s_{i_{\nu+2},x} \ldots s_{i_{n-2},x} \end{aligned}$$

in welcher für die Zahlen

$$i_1 \quad i_2 \quad \ldots \quad i_{n-2}$$

diejenigen $\frac{(n-1)!}{(n-\nu-1)!}$ Permutationen der Zahlen:

$$0 \quad 1 \quad 2 \quad \ldots \quad n-2$$

zu nehmen sind, bei denen verschiedene symbolische Produkte entstehen.

Setzt man in der Identität (XVI_a):

$$\delta R = \left(\Theta,\ (\overline{\rho\sigma})^0\right)^{m+n-2}$$

für die Covariante $(\rho\sigma)^0$ ihren Werth:

$$\delta (\overline{rs})^0 = m\,(f,\ \delta\varphi) - m\,(\varphi,\ \delta f)$$

dann erhält man für die Variation δR den Ausdruck:

$$\delta R = m\left((\Theta f)^{n-1},\ \delta\varphi\right)^m - m\left((\Theta\varphi)^{m-1},\ \delta f\right)^n$$

$$= m\,\Sigma_\varkappa (-1)^\varkappa \left\{ \frac{1}{\binom{m}{\varkappa}} (\Theta f)^{n-1}_{m-\varkappa}\,\delta a_\varkappa - \frac{1}{\binom{n}{\varkappa}} (\Theta\varphi)^{m-1}_{n-\varkappa}\,\delta a_\varkappa \right\} \text{[vgl. F. (VI) § 1.]}$$

und daher für den partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial R}{\partial a_\varkappa}$ den Werth:

$$\frac{\partial R}{\partial a_\varkappa} = \frac{m}{\binom{n}{\varkappa}} (-1)^{m+\varkappa} (\varphi\Theta)^{n-1}_{n-\varkappa}\,.$$

Nach Formel (V) § 1. ist nun:

$$(\varphi\Theta)^{m-1}_{n-\varkappa} = \Sigma_\sigma (-1)^\sigma\, C_\sigma\, \frac{\alpha_\sigma\, \Theta_{m+n-\varkappa-1-\sigma}}{\binom{m}{\sigma}\binom{m+n-2}{m+n-\varkappa-1-\sigma}}$$

wobei:

$$C_\sigma = \Sigma_\lambda (-1)^\lambda \binom{1}{\lambda}\binom{n-1}{\varkappa+\lambda-1}\binom{m-1}{\sigma-\lambda} = -\binom{n}{\varkappa}\binom{m}{\sigma}\left(\frac{\sigma}{m} - \frac{\varkappa}{n}\right).$$

Ferner ist nach Formel (IV_b)

$$\Theta_{m+n-\varkappa-1-\sigma} = \binom{m+n-2}{m+n-\varkappa-1-\sigma} (-1)^{\varkappa+\sigma-1}\,\gamma_{\varkappa+\sigma-1}$$

mithin:

$$\frac{\partial R}{\partial a_\varkappa} = (-1)^m\, \Sigma_\sigma\, \alpha_\sigma\, \gamma_{\varkappa+\sigma-1} \left\{ \sigma - \frac{\varkappa m}{n} \right\}$$

und da nach Formel (III):

ist: $$\Sigma_\sigma \alpha_\sigma \gamma_{\varkappa+\sigma-1} = 0$$

(XIX) $$\frac{\partial R}{\partial a_\varkappa} = (-1)^m \Sigma_\sigma \sigma \alpha_\sigma \gamma_{\varkappa+\sigma-1} .$$

§ 8.

Ausrechnung einiger Resultanten von Formen ungleichen Grades.

Bezeichnet man die Elementar-Covarianten einer Form:

$$F = r_x^n s_y^m$$

nämlich:

(I)
$$\begin{cases} r_x^n s_x^m = (rs)^0 = \varrho = \varrho_x^{m+n} = \varrho_{1,x}^{m+n} \dots . \\ (rs)\, r_x^{n-1} s_x^{m-1} = (\overline{rs}) = \sigma = \sigma_x^{m+n-2} = \sigma_{1,x}^{m+n-2} \dots . \\ (rs)^2 r_x^{n-2} s_x^{m-2} = (\overline{rs})^2 = \tau = \tau_x^{m+n-4} = \tau_{1,x}^{m+n-4} \dots . \\ (rs)^3 r_x^{n-3} s_x^{m-3} = (\overline{rs})^3 = \omega = \omega_x^{m+n-6} = \omega_{1,x}^{m+n-6} \dots . \end{cases}$$

. . . . . .

durch ϱ, σ, τ, ω ..., dann kann man aus Formel (X) § 2. folgende Identitäten ableiten:

(II)
$$\begin{cases} F = r_x^n s_y^m = \varrho_x^n \varrho_y^m + \dfrac{\binom{m}{1}\binom{n}{1}}{\binom{m+n}{1}} \sigma_x^{n-1} \sigma_y^{m-1} (xy) + \dfrac{\binom{m}{2}\binom{n}{2}}{\binom{m+n-1}{2}} \tau_x^{n-2} \tau_y^{m-2} (x \\ \qquad + \dfrac{\binom{m}{3}\binom{n}{3}}{\binom{m+n-2}{3}} \omega_x^{n-3} \omega_y^{m-3} (xy)^3 \dots . \\ (rs)\, r_x^{n-1} s_y^{m-1} = \sigma_x^{n-1} \sigma_y^{n-1} + \dfrac{\binom{m-1}{1}\binom{n-1}{1}}{\binom{m+n-2}{1}} \tau_x^{n-2} \tau_y^{m-2} (xy) \\ \qquad + \dfrac{\binom{m-1}{2}\binom{n-1}{2}}{\binom{m+n-3}{2}} \omega_x^{n-3} \omega_y^{m-3} (xy)^2 \dots . \\ (rs)^2 r_x^{n-2} s_y^{m-2} = \tau_x^{n-2} \tau_y^{m-2} + \dfrac{\binom{m-2}{1}\binom{n-2}{1}}{\binom{m+n-4}{1}} \omega_x^{n-3} \omega_y^{m-3} (xy) . \\ (rs)^3 r_x^{n-3} s_y^{m-3} = \omega_x^{n-3} \omega_y^{m-3} \dots . \end{cases}$$

Differentiirt man diese Formeln nach den Variabeln x und y und ersetzt man die Incremente durch neue Variabeln, dann erhält man Relationen, um die Polaren der Form F als Aggregate der Polaren

ihrer Elementar-Covarianten auszudrücken. Hieraus folgt, dass jedes symbolische Produkt, in welchem die die Form F darstellenden Symbolenpaare rs, $r_1 s_1$, $r_2 s_2$ ... vorkommen, als Aggregat anderer solcher Produkte darstellbar ist, in denen statt jener Symbolenpaare Symbole auftreten, welche die Elementar-Covarianten ϱ, σ, τ, ω .. darstellen.

Von den im vorigen Paragraphen entwickelten symbolischen Produkten sollen die beiden folgenden Formeln (XIII$_a$ und XIII$_c$)

$$(\mathrm{III})\quad \begin{cases} \Pi(l_i l_x)\, R = \Pi(r_i r_x)\,(s_i s_x)\,(r_i p_\lambda)\,(p_\lambda p_\mu) = \Pi(l_i l_x)\,.\,(\Theta, \varrho)^{m+n-2} \\ \Pi(l_i l_x)\,\Theta = \Pi(r_i r_x)\,(s_i s_x)\,(r_i p_\lambda)\,(p_\lambda p_\mu)\, r_{i,x}\, s_{i,x}\, p_{\lambda,x} \end{cases}$$

nach diesen Methoden in den folgenden Beispielen durch symbolische Produkte ausgedrückt werden, welche statt der Symbole der Cayley'schen Form F die ihrer Elementar-Covarianten enthalten.

Die Formeln (XVIII) will ich übergehn, weil sie nicht die einfachsten Relationen zwischen den Coefficienten der Cayley'schen Form sind.

Die bei der Berechnung der Resultante R und der Covariante Θ nothwendigen Operationen beabsichtige ich in der folgenden Reihenfolge vorzunehmen:

I. Aufstellung der Cayley'schen Form und ihrer Elementar-Covarianten ϱ, σ, τ, ω ... mittelst der Formeln (V_a und XV) des § 7.

$$F = \frac{f \cdot \varphi_{y^m} - \varphi \cdot f_{y^m}}{(xy)} = r_x^{n-1}\, s_y^{m-1}$$

$$= m\,(f\varphi);\quad \sigma = \frac{m\,(n-m)}{2(n-1)}\,(f\varphi)^2;\quad \tau = \frac{mn}{3(m+n-2)}\left(1 + \frac{m\cdot m-1\cdot m-2}{n\cdot n-1\cdot n-2}\right)(f\varphi)^2;$$

$$\omega = \frac{m\cdot n}{4(m+n-3)}\left\{1 - \frac{m\cdot m-1\cdot m-2\cdot m-3}{n\cdot n-1\cdot n-2\cdot n-3}\right\}(f\varphi)^4 \ldots.$$

II. Diejenigen Polaren von F, welche für die folgende Rechnung nöthig sind, werden als Aggregate der Polaren der Formen ϱ, σ, τ, ω .. ausgedrückt und so in Reihen geordnet, dass die für die Berechnung eines symbolischen Produktes erforderlichen Polaren in eine Reihe zu stehen kommen.

III. Aus den [vergl. Formel (III)] R und Θ darstellenden symbolischen Produkten werden die Symbole p mittelst der Formel:

$$p = p_{i,x}^{n-1} = l_{i,x}^{n-m-1}\, \alpha_x^m$$

fortgeschafft. Hierbei werden jene Produkte so transformirt, dass der Factor $\Pi(l_i l_x)$ sich weghebt, und man für R und Θ Aggregate symbolischer Produkte erhält, in denen ausser den Symbolen $r_i s_i$ nur die Symbole der Form φ resp. ihrer Covarianten auftreten.

IV. Diese symbolischen Produkte werden mittelst symbolischer Rechnung aufs Neue transformirt. Hierbei werden neue Covarianten A, B, C... von F eingeführt und durch Uebereinanderschiebungen derselben R und Θ ausgedrückt.

V. Diese neuen Covarianten A, B, C.. werden mittelst der oben aufgestellten Polaren berechnet.

VI. Zusammenstellung der zur Bestimmung der Resultante R erforderlichen Formeln.

Die Resultante R der Formen 4^{ten} und 3^{ten} Grades:

$$f = a_4x_1^4 + a_3x_1^3x_2 + a_2x_1^2x_2^2 + a_1x_1x_2^3 + a_0x_2^4$$
$$\varphi = \alpha_3x_1^3 + \alpha_2x_1^2x_2 + \alpha_1x_1x_2^2 + \alpha_0x_2^3 \qquad (\text{symbolisch} = \alpha_x^3).$$

I. Die Cayley'sche Form und ihre Elementar-Covarianten haben die Werthe:

$$F = \frac{f\cdot\varphi_{y^3} - \varphi\cdot f_{y^3}}{(xy)} = r_x^3s_y^2$$

$$r_x^3s_x^2 = (\overline{rs})^0 = \varrho = 3(f,\varphi);\ (rs)r_x^2s_x = (\overline{rs}) = \sigma = \tfrac{1}{2}(f\varphi)^2;\ (rs)^2r_x = (\overline{rs})^2 = \tau = (f\varphi)$$

II. Die folgenden Polaren von F sind für die kommende Rechnung erforderlich:

1. Reihe.

1. $r_x^3s_y^2 = \varrho_x^3\varrho_y^2 + \frac{6}{5}\sigma_x^2\sigma_y(xy) + \frac{1}{2}\tau\,.\,(xy)^2$
2. $(rs)\,r_x^2s_y = \sigma_x^2\sigma_y - \frac{2}{5}\tau(yx)$
3. $r_y^3s_x^2 = \varrho_x^2\varrho_y^3 + \frac{6}{5}\sigma_x\sigma_y^2(yx) + \frac{1}{2}\tau_y(yx)^2$
4. $r_x^3s_xs_y = \varrho_x^4\varrho_y - \frac{3}{5}\sigma\,.\,(yx).$

2. Reihe.

1. $r_x^3s_xs_y = \varrho_x\varrho_y\varrho_z^3 + \frac{3}{5}\sigma_x\sigma_z^2(zy) - \frac{3}{5}\sigma_y\sigma_z^2(xz) - \frac{1}{2}\tau_z(zy)(xz)$
2. $r_y^3s_xs_y = \varrho_x\varrho_y^4 - \frac{3}{5}\sigma_y^3(xy)$
3. $(rs)\,r_y^2s_x = \sigma_x\sigma_y^2 - \frac{2}{3}\tau_y\,.\,(xy)$
4. $r_xr_y^2s_xs_y = \varrho_x^2\varrho_y^3 + \frac{1}{5}\sigma_x\sigma_y^2(yx) - \frac{1}{6}\tau_y(xy)^2$
5. $(rs)\,r_xr_ys_x = \sigma_x^2\sigma_y + \frac{1}{3}\tau\,.\,(yx).$

III. Die Resultante R und die Covariante Θ haben die Werthe:

$$R = \Pi(r_ir_x)(s_is_x)(r_ip)$$
$$\Theta = \Pi(r_ir_x)(s_is_x)(r_ip)\,p_x\,r_{i,x}\,s_{i,x}.$$

Das in ihnen auftretende Symbol p stellt die Form:

$$p = p_x^3 = \varphi = \alpha_x^3$$

dar und kann daher durch das Symbol α ersetzt werden. Man hat daher:

$$R = (rr_1)(rr_2)(r_1r_2)(r\alpha)(r_1\alpha)(r_2\alpha)(ss_1)(ss_2)(s_1s_2)$$
$$\Theta = (rr_1)(ss_1)(r\alpha)(r_1\alpha)\,r_xr_{1,x}\,s_xs_{1,x}\,\alpha_x.$$

IV. 1. Transformation des symbolischen Produktes R.

Es ist:

$$R = (rr_1)(rr_2)(r_1\alpha)(r_2\alpha)(ss_1)(ss_2)(s_1s_2)\left\{(rr_2)(r_1\alpha) - (rr_1)(r_2\alpha)\right\}.$$

Vertauscht man in dem ersten symbolischen Produkte die Symbolen-

paare rs, $r_1 s_1$, $r_2 s_2$ cyklisch unter einander, dann geht es in das folgende über:

$$(r_1 r_2)\,(r r_1)^2\,(r_2 \alpha)^2\,(r\alpha)\,(s s_1)\,(s s_2)\,(s_1 s_2)$$

mithin ist (bis auf das Vorzeichen):

$$R = (r r_1)^2\,(r_2\alpha)^2\,(s s_1)\,(s s_2)\,(s_1 s_2)\,\{(r r_2)\,(r_1\alpha) - (r_1 r_2)\,(r\alpha)\}$$
$$= (r r_1)^3\,(r_2\alpha)^3\,(s s_1)\,(s s_2)\,(s_1 s_2)$$

und, wenn man die Covarianten:

$$(r r_1)^3\,(s s_1)\,s_x s_{1,x} = A \qquad (r\alpha)^3\,s_x^2 = B.$$

durch A und B bezeichnet:

$$R = (AB)^2.$$

2. Transformation des symbolischen Produktes Θ.

Es ist (bis aufs Vorzeichen):

$$\Theta = (r r_1)\,(s s_1)\,s_x s_{1,x}\,\alpha_x\,\{r_x^2\,(r_1\alpha)^2 + \tfrac{1}{2}\alpha_x^2\,(r r_1)^2\}$$
$$= \tfrac{1}{2}\varphi\,.\,A - (s s_1)\,s_x s_{1,x}\,r_x^2\,\{r_{1,x}\,(r\alpha) - r_x\,(r_1\alpha)\}\,(r_1\alpha)^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\varphi\,.\,A - \tfrac{1}{2}(s s_1)\,s_x s_{1,x} r_x r_{1,x}(r\alpha)(r_1\alpha)\,\{r_x(r_1\alpha) - r_{1,x}(r\alpha)\} + (s s_1)\,s_x s_{1,x} r_x^3 (r_1\alpha)^3$$
$$= \tfrac{1}{2}\varphi\,.\,A + \tfrac{1}{2}(r r_1)\,(s s_1)\,s_x s_{1,x}\,r_x r_{1,x}\,(r\alpha)\,(r_1\alpha)\,\alpha_x + r_x^3\,s_x\,B_x\,(sB)$$
$$= \tfrac{1}{2}\varphi A - \tfrac{1}{2}\Theta + r_x^3\,s_x\,B_x\,(sB)$$
$$= \tfrac{1}{3}\varphi A + \tfrac{2}{3}\,r_x^3\,s_x\,B_x\,(sB)$$

und da noch Polare 4 erste Reihe:

$$r_x^3\,s_x\,B_x\,(sB) = \varrho_x^4\,B_x\,(\varrho B) - \tfrac{3}{5}\,B\,.\,\sigma$$

ist:

$$\Theta = \tfrac{1}{3}\varphi A + \tfrac{2}{3}\,(\varrho,\ B) - \tfrac{2}{5}\,B\,.\,\sigma.$$

V. 1. Berechnung der Covariante: $A = (r r_1)^3\,(s s_1)\,s_x s_{1,x}$.

Aus den Polaren der 2ten Reihe ergeben sich die Relationen:

$$A = s_x \varrho_x\,\{(r\varrho)^3\,(s\varrho) + \tfrac{3}{5}\,\sigma_x\,(rs)\,(r\sigma)^2 - \tfrac{3}{5}\,r_x\,(r\sigma)^2\,(s\sigma) - \tfrac{1}{2}\,r_x\,(rs)\,(r\tau)\}$$
$$\varrho_x s_x\,(r\varrho)^3\,(s\varrho) = \varrho_x \varrho_{1,x}\,(\varrho\varrho_1)^4 - \tfrac{3}{5}\,\varrho_x^2\,(\varrho\sigma)^3$$
$$\sigma_x s_x\,(rs)\,(r\sigma)^2 = \sigma_x \sigma_{1,x}\,(\sigma\sigma_1)^2 - \tfrac{2}{3}\,\sigma_x^2\,(\sigma\tau)$$
$$r_x s_x\,(r\sigma)^2\,(s\sigma) = \varrho_x^2\,(\varrho\sigma)^3 + \tfrac{1}{5}\,\sigma_x \sigma_{1,x}\,(\sigma\sigma_1)^2 + \tfrac{1}{6}\,\sigma_x^2\,(\sigma\tau)$$
$$r_x s_x\,(rs)\,(r\tau) = \sigma_x^2\,(\sigma\tau) + \tfrac{1}{3}\,\tau^2$$
$$A = (\varrho\varrho)^4 - \tfrac{6}{5}\,(\varrho\sigma)^3 + \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{5}\,(\sigma\sigma)^2 - (\sigma\tau) - \tfrac{1}{6}\,\tau^2.$$

2. Berechnung der Covariante $B = (r\alpha)^3\,s_x^2$.

Nach Polare 3 der 1ten Reihe ist:

$$B = \varrho_x^3\,(\varrho\alpha)^3 + \tfrac{6}{5}\,\sigma_x\alpha_x\,(\sigma\alpha)^2 + \tfrac{1}{2}\,\alpha_x^2\,(\tau\alpha) = (\varrho,\ \varphi)^3 + \tfrac{6}{5}\,(\sigma,\ \varphi)^2 + \tfrac{1}{2}\,(\tau,\ \varphi).$$

VI. Formeln zur Bestimmung der Resultante R.

(IV)
$$\begin{cases} \varrho = 3\,(f\varphi) \\ \sigma = \tfrac{1}{2}\,(f\varphi)^2 \\ \tau = (f,\ \varphi)^3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} A = (\varrho\varrho)^4 - \tfrac{6}{5}\,(\varrho\sigma)^3 + \tfrac{1}{2}\tfrac{2}{5}\,(\sigma\sigma)^2 - (\sigma\tau) - \tfrac{1}{6}\,\tau^2 \\ B = (\varrho\varphi)^3 + \tfrac{6}{5}\,(\sigma,\ \varphi)^2 + \tfrac{1}{2}\,(\tau,\ \varphi) \\ R = (A,\ B)^2. \end{array}$$

Die Resultante R der Formen 5^{ten} *und* 3^{ten} *Grades:*

$$f = a_5 x_1^5 + a_4 x_1^4 x_2 + a_3 x_1^3 x_2^2 + a_2 x_1^2 x_2^3 + a_1 x_1 x_2^4 + a_0 x_2^5$$
$$\varphi = \alpha_3 x_1^3 + \alpha_2 x_1^2 x_2 + \alpha_1 x_1 x_2^2 + \alpha_0 x_2^3 .$$

I. Die Cayley'sche Form und ihre Elementar-Covarianten haben die Werthe:

$$F = \frac{f \cdot \varphi_{y^3} - \varphi \cdot f_{y^3}}{(xy)} = r_x^4 s_y^2$$

$$r_x^4 s_x^2 = (\overline{rs})^0 = \varrho = 3\,(f\varphi);\ (rs)\, r_x^3 s_x = (\overline{rs}) = \sigma = \tfrac{3}{4}\,(f\varphi)^2;$$

$$(rs)^2 r_x^2 = (\overline{rs})^2 = \tau = \tfrac{1}{12}\,(f\varphi)^3 .$$

II. Folgende Polaren von F sind für die kommende Rechnung erforderlich:

1. Reihe.

1. $r_x^4 s_y^2 = \varrho_x^4 \varrho_y^2 + \frac{4}{3}\sigma_x^3 \sigma_y\,(xy) + \frac{3}{5}\tau \cdot (xy)^2$
2. $(rs)\, r_x^3 s_y = \sigma_x^3 \sigma_y + \frac{3}{4}\tau \cdot (xy)$
3. $r_x^3 r_y s_x s_y = \varrho_x^4 \varrho_y^2 + \frac{1}{3}\sigma_x^3 \sigma_y\,(xy) - \frac{3}{20}\tau\,(xy)^2 .$

2. Reihe.

1. $r_x r_z^3 s_x s_y = \varrho_x^2 \varrho_y \varrho_z^3 + \sigma_x^2 \sigma_z^2 (zy) - \frac{1}{3}\sigma_x \sigma_z^3 (xy) - \frac{3}{10}\tau_x \tau_z (xz)(zy) - \frac{3}{20}\tau_z^2 (zx)(y$
2. $r_x r_y^3 s_x s_y = \varrho_x^2 \varrho_y^4 - \frac{1}{3}\sigma_x \sigma_y^3\,(xy) - \frac{3}{20}\tau_y^2\,(xy)^2$
3. $(rs)\, r_x r_y^2 s_x = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \frac{1}{2}\tau_x \tau_y\,(xy)$
4. $r_x r_y^3 s_x^2 = \varrho_x^3 \varrho_y^3 + \sigma_x^2 \sigma_y^2\,(yx) + \frac{3}{10}\tau_x \tau_y\,(xy)^2$
5. $(rs)\, r_x^2 r_y s_x = \sigma_x^3 \sigma_y + \frac{1}{4}\tau\,(yx)$
6. $r_x^2 r_y^2 s_x^2 = \varrho_x^4 \varrho_y^2 + \frac{2}{3}\sigma_x^3 \sigma_y\,(yx) + \frac{1}{10}\tau \cdot (xy)^2 .$

3. Reihe.

1. $r_x r_z^3 s_x s_y = \varrho_x^2 \varrho_y \varrho_z^3 + \sigma_x^2 \sigma_z^2 (zy) - \frac{1}{3}\sigma_x \sigma_z^3 (xy) - \frac{3}{10}\tau_x \tau_z (xz)(zy) - \frac{3}{20}\tau_z^2 (zx)(y$
2. $(rs)\, r_y^3 s_x = \sigma_x \sigma_y^3 + \frac{3}{4}\tau_y^2\,(yx)$
3. $(rs)\, r_x r_y^2 s_x = \sigma_x^2 \sigma_y^2 - \frac{1}{2}\tau_x \tau_y\,(xy) .$

4. Reihe.

1. $r_y^4 s_x^2 = \varrho_x^2 \varrho_y^4 + \frac{4}{3}\sigma_x \sigma_y^3\,(yx) + \frac{3}{5}\tau_y^2\,(yx)^2$
2. $r_x^2 r_y^2 s_x^2 = \varrho_x^4 \varrho_y^2 + \frac{2}{3}\sigma_x^3 \sigma_y\,(yx) + \frac{1}{10}\tau \cdot (yx)^2 .$

5. Reihe.

1. $r_y^4 s_x s_y = \varrho_x \varrho_y^5 + \frac{2}{3}\sigma_y^4\,(yx)$
2. $(rs)\, r_x r_y^2 s_x = \sigma_x^2 \sigma_y^2 + \frac{1}{2}\tau_x \tau_y\,(yx) .$

III. Die Resultante R und die Covariante Θ haben die Werthe:

$$(l, l_1)\, R = (p, p_1)\, \Pi (r_i r_x)\, (s_i s_x)\, (r_i p)\, (r_i p_1)$$

$$(l, l_1)\, \Theta = (p, p_1)\, \Pi (r_i r_x)\, (s_i s_x)\, (r_i p)\, (r_i p_1)\, r_{i,x} s_{i,x} p_x p_{1,x} .$$

Die hier auftretenden Symbole p und p_1 stellen die beiden Formen dar:

$$p = p_x^4 = l \cdot \varphi \quad ; \quad p_1 = p_{1,x}^4 = l_1 \cdot \varphi .$$

Um sie aus unsern Formeln zu entfernen, will ich mich einer Hülfsformel bedienen.

Hülfsformel.

Nach § 2. Formel (X) hat man die Identität:

$$\frac{p \cdot p_{1,y^2} - p_1 \cdot p_{y^2}}{(xy)} - \frac{}{} = 4\,(p,\ p_1)_{y^2} + \tfrac{5}{6}\,(p,\ p_1)_{y^3} \cdot (xy)^2 .$$

Die linke Seite derselben erhält, wenn man für die Formen p ihre Werthe einträgt, den Werth $\varphi \cdot \varphi_{y^2} \cdot (l,\ l_1)$, welcher sich nach Formel (III) § 3. durch den Ausdruck ersetzen lässt

$$\left\{(\varphi,\ \varphi)_{y^2}{}^0 + \tfrac{9}{10}\,(\varphi\varphi)_y{}^2\,(xy)^2\right\}(ll_1) .$$

Mithin findet die Identität statt:

$$(ll_1)\left\{(\varphi\varphi)_{y^2}{}^0 + \tfrac{9}{10}\,(\varphi\varphi)_y{}^2\,(xy)^2\right\} = 4\,(p,\ p_1)_{y^2} + \tfrac{3}{5}\,(pp_1)_{y^3} .$$

Aus derselben folgen die Formeln:

$$4\,(p,\ p_1) = (l,\ l_1) \cdot \varphi^2 \quad ; \quad \tfrac{15}{9}\,(pp_1)^3 = (l,\ l_1) \cdot (\varphi,\ \varphi)^2$$

oder, wenn man die Covarianten von φ:

$$\tfrac{1}{4}\,\varphi^2 = u \quad \text{und} \quad \tfrac{9}{16}\,(\varphi\varphi)^2 = v$$

durch u und v bezeichnet:

$$(p,\ p_1) = u \cdot (ll_1) \quad ; \quad (p\,p_1)^3 = v \cdot (l,\ l_1) .$$

Hieraus kann man leicht die Hülfsformel ableiten [vergleiche § 3. Formel (XIV)]:

$$(p,\ p_1)\,p_x\,p_y\,p_z\,p_{1,x}\,p_{1,y}\,p_{1,z} = (l,\ l_1)\left\{u_x{}^2 u_y{}^2 u_z{}^2 - \tfrac{1}{10}\left[v \cdot (yz)^2 + v_y{}^2\,(zx) + v_z{}^2\,(xy)^2\right]\right\}.$$

Mittelst derselben erhält man für die Formen R und Θ die Werthe:

$$R = (rr_1)\,(rr_2)\,(r_1r_2)\,(ss_1)\,(ss_2)\,(s_1s_2)\,(ru)^2\,(r_1u)^2\,(r_2u)^2$$
$$- \tfrac{3}{10}\,(rr_1)^3\,(rr_2)\,(r_1r_2)\,(ss_1)\,(ss_2)\,(s_1s_2)\,(r_2v)^2$$

$$\Theta = (rr_1)\,(ss_1)\,r_x r_{1,x} s_x s_{1,x}\left\{u_x{}^2\,(ru)^2\,(r_1u)^2 - \tfrac{1}{5}\,r_x{}^2\,(r_1r)^2 - \tfrac{1}{10}\,v\,(rr_1)^2\right\}.$$

IV. 1. Transformation des symbolischen Produktes R.

Ich gehe von der Identität aus:

$$(rr_1)\,(rr_2)\,(r_1r_2)\,(ru)\,(r_1u)\,(r_2u)\,\Pi\,(s_is_x)\,(r_iu)$$
$$= (rr_1)\,(rr_2)\,(r_1u)\,(r_2u)\left\{(rr_2)\,(r_1u) - (rr_1)\,(r_2u)\right\}\Pi\,(s_is_x)\,(r_iu) .$$

Vertauscht man in dem ersten symbolischen Produkte rechter Hand die Symbolenpaare rs, r_1s_1, r_2s_2 cyklisch unter einander, dann erhält man den Ausdruck:

$$(r_1r_2)\,(rr_1)^2\,(r_2u)^2\,(ru)\,\Pi\,(s_is_x)\,(r_iu)$$

mithin ist:

$$(rr_1)\,(rr_2)\,(r_1r_2)\,(ru)\,(r_1u)\,(r_2u)\,\Pi\,(s_is_x)\,(r_iu)$$
$$= (rr_1)^2\,(r_2u)^2\left\{(r_1r_2)\,(ru) - (rr_2)\,(r_1u)\right\}\Pi\,(s_is_x)\,(r_iu)$$
$$= -\,(rr_1)^3\,(r_2u)^3\,\Pi\,(s_is_x)\,(r_iu)$$

und (bis auf das Vorzeichen):

$$R = (rr_1)^3\,(ss_1)\,(ss_2)\,(s_1s_2)\left\{(ru)\,(r_1u)\,(r_2u)^4 + \tfrac{3}{10}\,(rr_2)\,(r_1r_2)\,(r_2v)^2\right\}.$$

Bezeichnet man die Covarianten:

$$(rr_1)^3\,(ss_1)\,r_x r_{1,x} s_y s_{1,y} = \lambda_x^2\mu_y^2 \quad \text{und} \quad \left\{(ru)^4\,u_x^2 + \tfrac{3}{10}\,(rv)^2\,r_x^2\right\} s_y^2 = L_x^2\,M_y^2$$

durch $\lambda_x^2\mu_y^2$ und $L_x^2 M_y^2$, dann wird:

$$R = (\lambda L)^2\,(\mu M)^2.$$

Die Elementar-Covarianten der Formen $\lambda_x^2\mu_y^2$ und $L_x^2 M_y^2$ will ich durch:

$$(\overline{\lambda\mu})^0 = A\ ;\ (\overline{\lambda\mu}) = B\ ;\ (\overline{\lambda\mu})^2 = C\ ;\ (\overline{LM})^0 = D\ ;\ (\overline{LM}) = E\ ;\ (\overline{LM})^2 = F$$

A, B, C, D, E, F bezeichnen, es ist dann:

$$\lambda_x^2\ \mu_y^2 = A_x^2 A_y^2 + B_x B_y\,(xy) + \tfrac{1}{3}\,C\,.\,(xy)^2$$

$$L_x^2 M_y^2 = D_x^2 D_y^2 + E_x E_y\,(xy) + \tfrac{1}{3}\,F\,(xy)^2$$

und:

$$R = (AL)^2(AM)^2 + (BL)(BM)(LM) + \tfrac{1}{3}\,C.(LM)^2 = (AD)^4 + (BE)^2 + \tfrac{1}{3}\,C.F.$$

2. Transformation des Ausdrucks:

$$\Theta = (rr_1)\,(ss_1)\,r_x r_{1,x} s_x s_{1,x}\left\{u_x^2\,(ru)^2\,(r_1u)^2 - \tfrac{1}{5}\,r_x^2\,(r_1v)^2 - \tfrac{1}{10}\,v\,(rr_1)^2\right\}.$$

Man hat:

$$(rr_1)(ss_1)r_x r_{1,x} s_x s_{1,x} u_x^2 (ru)^2 (r_1u)^2 = (rr_1)(ss_1)s_x s_{1,x} u_x^2 (ru)(r_1u)\left\{r_x^2 (r_1u)^2 - \tfrac{1}{2}\,u_x^2 (rr_1)^2\right\}$$

$$= (ss_1)\,s_x s_{1,x} u_x (ru)\,(r_1u)^3 r_x^2\left\{r_{1,x}(ru) - r_x(r_1u)\right\} - \tfrac{1}{2}\,(rr_1)^3 (ss_1)\,s_x s_{1,x} u_x^4 (ru)(r_1u)$$

$$= \tfrac{1}{2}\,(ss_1)\,s_x s_{1,x} u_x\,(ru)^2\,(r_1u)^2\,r_x r_{1,x}\left\{r_x\,(r_1u) - r_{1,x}\,(ru)\right\}$$

$$- (ss_1)\,s_x s_{1,x} u_x\,(ru)\,(r_1u)^1\,r_x^3 - \tfrac{1}{2}\,(rr_1)^3\,(ss_1)\,s_x s_{1,x} u_x^4\,(ru)\,(r_1u)$$

$$= -\tfrac{1}{2}\,(rr_1)(ss_1)\,u_x^2 (ru)^2 (r_1u)^2 r_x r_{1,x} s_x s_{1,x} - (ss_1)\,s_x s_{1,x} u_x\,(ru)(r_1u)^1\,r_x^3 - \tfrac{1}{2}\,\mu_x^2 u_x^4 (\lambda u)^2$$

$$= -\tfrac{2}{3}\,(ss_1)\,s_x s_{1,x} r_x^3 u_x\,(ru)\,(r_1u)^4 - \tfrac{1}{3}\,\mu_x^2 u_x^4\,(\lambda u)^2;$$

mithin ist (bis aufs Vorzeichen):

$$\Theta = \tfrac{2}{3}\,(ss_1) s_x s_{1,x} r_x^3 u_x\,(ru)\,(r_1u)^4 + \tfrac{1}{3}\,\mu_x^2 u_x^4\,(\lambda u)^2 + \tfrac{1}{5}\,(rr_1)\,(ss_1)\,r_x^3 r_{1,x} s_x s_{1,x}\,(r_1v)^2$$

$$+ \tfrac{1}{10}\,v\,.\,(rr_1)^3\,(ss_1)\,r_x r_{1,x} s_x s_{1,x}$$

$$= r_x^3 s_x s_{1,x}\,(ss_1)\left\{\tfrac{2}{3}\,u_x\,(ru)\,(r_1u)^4 + \tfrac{1}{5}\,(rr_1)\,r_{1,x}\,(r_1v)^2\right\} + \tfrac{1}{3}\,\mu_x^2 u_x^4\,(\lambda u)^2 + \tfrac{1}{10}\,v\,.\,A$$

$$= \tfrac{2}{3}\,r_x^3 s_x M_x\,(sM)\,L_x\,(rL) + \tfrac{1}{3}\,\mu_x^2 u_x^4\,(\lambda u)^2 + \tfrac{1}{10}\,v\,A.$$

Da nun:

$$\lambda_y^2\mu_x^2 = A_x^2 A_y^2 + B_x B_y\,(yx) + \tfrac{1}{3}\,C\,.\,(yx)^2$$

$$L_x L_y M_x M_z = D_x^2 D_y D_z + \tfrac{1}{2}\,E\,.\,(yz) - \tfrac{1}{6}\,F\,(xy)\,(xz),$$

so wird:

$$\Theta = \tfrac{2}{3}\,r_x^3 s_x\left\{D_x^2\,(rD)\,(sD) + \tfrac{1}{2}\,E\,(rs) - \tfrac{1}{6}\,F\,r_x s_x\right\}$$

$$+ \tfrac{1}{3}\,u_x^4\left\{A_x^2\,(Au)^2 + B_x u_x\,(Bu) + \tfrac{1}{3}\,C u_x^2\right\} + \tfrac{1}{10}\,A\,.\,v$$

oder da nach Polare 3 der 1ten Reihe:

$$r_x s_x D_x^2\,(rD)\,(sD) = \varrho_x^4 D_x^2\,(\varrho D)^2 - \tfrac{1}{3}\,\sigma_x^3 D_x^3\,(\sigma D) - \tfrac{3}{20}\,\tau\,.\,D$$

ist:

$$\Theta = \tfrac{2}{3}(\varrho D)^2 - \tfrac{2}{5}(\sigma D) - \tfrac{1}{10}\tau . D + \tfrac{1}{3}\sigma . E - \tfrac{1}{5}\varrho . F + \tfrac{1}{3}(Au)^2 + \tfrac{1}{3}(Bu) + \tfrac{1}{5}Cu + \tfrac{1}{10}A . v.$$

V. Ausrechnung der Formen:

$$A = (\overline{\lambda\mu})^0 = r_x r_{1,x} s_x s_{1,x} (rr_1)^3 (ss_1)$$

$$B = (\overline{\lambda\mu}) = (r_x r_{1,x} s_x s_{1,x}) (rr_1)^3 (ss_1) = (rr_1)^3 (ss_1) (rs) r_{1,x} s_{1,x}$$

$$C = (\overline{\lambda\mu})^2 = (r_x r_{1,x}, s_x s_{1,x})^2 (rr_1)^3 (ss_1) = (rr_1)^3 (ss_1)(rs)(r_1 s_1) - \tfrac{1}{2}(rr_1)^4 (ss_1)^4$$

$$D = (ru)^4 u_x^2 s_x^2 + \tfrac{3}{10}(rv)^2 r_x^2 s_x^2$$

$$E = -(ru)^4 (su) u_x s_x + \tfrac{3}{10}(rs)(rv)^2 r_x s_x$$

$$F = (ru)^4 (su)^2 + \tfrac{3}{10}(rs)^2 (rv)^2 = (\varrho u)^6 + \tfrac{3}{10}(\tau, v)^2 .$$

1. Berechnung von A.

Aus den Polaren der 2ten Reihe folgen die Formeln:

$$A = r_x s_x \left\{ \varrho_x^2 (r\varrho)^3 (s\varrho) + \sigma_x^2 (rs)(r\sigma)^2 - \tfrac{1}{3} s_x \sigma_x (r\sigma)^3 - \tfrac{3}{10} r_x \tau_x (rs)(r\tau) - \tfrac{3}{20} r_x s_x (r\tau)^2 \right\}$$

$$r_x s_x \varrho_x^2 (r\varrho)^3 (s\varrho) = \varrho_x^2 \varrho_{1,x}^2 (\varrho\varrho_1)^4 - \tfrac{1}{3}\varrho_x^3 \sigma_x (\varrho\sigma)^3 - \tfrac{3}{20}\varrho_x^4 (\varrho\tau)^2$$

$$r_x s_x \sigma_x^2 (rs)(r\sigma)^2 = \sigma_x^2 \sigma_{1,x}^2 (\sigma\sigma_1)^2 - \tfrac{1}{2}\sigma_x^3 \tau_x (\sigma\tau);$$

$$r_x s_x^2 \sigma_x (r\sigma)^3 = \varrho_x^3 \sigma_x (\varrho\sigma)^3 + \sigma_x^2 \sigma_{1,x}^2 (\sigma, \sigma_1)^2 - \tfrac{3}{10}\sigma_x^3 \tau_x (\sigma\tau)$$

$$r_x^2 s_x \tau_x (rs)(r\tau) = \sigma_x^3 \tau_x (\sigma\tau) + \tfrac{1}{4}\tau^2;$$

$$r_x^2 s_x^2 (r\tau)^2 = \varrho_x^4 (\varrho\tau)^2 + \tfrac{2}{3}\sigma_x^3 \tau_x (\sigma\tau) + \tfrac{1}{10}\tau^2$$

$$A = (\varrho\varrho)^4 - \tfrac{2}{3}(\varrho\sigma)^3 - \tfrac{3}{10}(\varrho\tau)^2 + \tfrac{2}{3}(\sigma\sigma)^2 - \tfrac{4}{5}(\sigma\tau) - \tfrac{9}{100}\tau^2 .$$

2. Berechnung von B.

Aus den Polaren der 3ten Reihe folgen die Formeln:

$$B = (rs) \left\{ \varrho_x^2 (r\varrho)^3 (s\varrho) + \sigma_x^2 (rs)(r\sigma)^2 - \tfrac{1}{3} s_x \sigma_x (r\sigma)^3 - \tfrac{3}{10} r_x \tau_x (rs)(r\tau) - \tfrac{3}{20} r_x s_x (r\tau)^2 \right\}$$

$$s_x \sigma_x (rs)(r\sigma)^3 = \sigma_x \sigma_{1,x} (\sigma\sigma_1)^3 + \tfrac{3}{4}\sigma_x^2 (\sigma\tau)^2 = \tfrac{3}{4}(\sigma\tau)^2$$

$$r_x s_x (rs)(r\tau)^2 = \sigma_x^2 (\sigma\tau)^2 - \tfrac{1}{2}\tau_x \tau_{1,x} (\tau\tau_1) = (\sigma\tau)^2 .$$

Ausserdem ist:

$$\varrho_x^2 (rs)(r\varrho)^3 (s\varrho) = (\varrho\sigma)^4 \; ; \; \sigma_x^2 (rs)^2 (r\sigma)^2 = (\sigma\tau)^2 \; ; \; r_x \tau_x (rs)^2 (r\tau) = (\tau\tau_1) = 0$$

mithin: $$B = (\varrho\sigma)^4 + \tfrac{3}{5}(\sigma\tau)^2$$

3. Berechnung von C.

Aus den Polaren der 1ten Reihe folgen die Formeln:

$$(rr_1)^3 (ss_1)(rs)(r_1 s_1) = (rs) \left\{ (r\sigma)^3 (s\sigma) + \tfrac{3}{4}(rs)(r\tau)^2 \right\} = (\sigma, \sigma)^4 + \tfrac{3}{4}(\tau, \tau)^2$$

$$(rr_1)^4 (ss_1)^2 = (r\varrho)^4 (s\varrho)^2 + \tfrac{1}{3}(rs)(r\sigma)^3 (s\sigma) + \tfrac{3}{5}(rs)^2 (r\tau)^2 = (\varrho\varrho)^6 + \tfrac{4}{3}(\sigma, \sigma)^4 + \tfrac{3}{5}(\tau, \tau)^2$$

mithin:

$$C = -\tfrac{1}{2}(\varrho\varrho)^6 + \tfrac{1}{3}(\sigma\sigma)^4 + \tfrac{9}{20}(\tau, \tau)^2 .$$

4. Berechnung von D.

Aus den Polaren der 4ten Reihe folgen die Formeln:

$$u_x^2 s_x^2 (ru)^4 = \varrho_x^2 u_x^2 (\varrho u)^4 + \tfrac{4}{3}\sigma_x u_x^3 (\sigma u)^3 + \tfrac{3}{5}u_x^4 (\tau u)^2$$

$$r_x^2 s_x^2 (rv)^2 = \varrho_x^4 (\varrho v)^2 + \tfrac{2}{3}\sigma_x^3 v_x (\sigma v) + \tfrac{1}{10}\tau . v$$

mithin ist:

$$D = (\varrho u)^4 + \tfrac{4}{3}(\sigma u)^3 + \tfrac{3}{5}(\tau u)^2 + \tfrac{3}{10}(\varrho v)^2 + \tfrac{1}{5}(\sigma v) + \tfrac{3}{100}\tau . v .$$

5. Berechnung von E.

Aus den Polaren der 5ten Reihe folgen die Formeln:

$$(ru)^4\,(su)\,u_x\,s_x = \varrho_x\,u_x\,(\varrho u)^5 + \tfrac{2}{5}\,u_x^2\,(\sigma u)^4,$$
$$r_x\,s_x\,(rs)\,(rv)^2 = \sigma_x^2\,(\sigma v)^2 + \tfrac{1}{2}\,\tau_x\,v_x\,(\tau v),$$

mithin ist:

$$E = -(\varrho u)^5 - \tfrac{2}{3}\,(\sigma u)^4 + \tfrac{3}{10}\,(\sigma v)^2 + \tfrac{3}{20}\,(\tau, v).$$

VI. Formeln zur Bestimmung der Resultante R:

$$\left.\begin{array}{l}
\varrho = 3\,(f\varphi);\ \sigma = \tfrac{3}{4}\,(f\varphi)^2;\ \tau = \tfrac{11}{12}\,(f\varphi)^3;\ u = \tfrac{1}{4}\,\varphi^2;\ v = \tfrac{9}{16}\,(\varphi, \varphi)^2 \\
A = (\varrho\varrho)^4 - \tfrac{2}{3}\,(\varrho\sigma)^3 - \tfrac{3}{10}\,(\varrho\tau)^2 + \tfrac{2}{3}\,(\sigma\sigma)^2 - \tfrac{4}{5}\,(\sigma\tau) - \tfrac{9}{100}\,\tau^2 \\
B = (\varrho\sigma)^4 + \tfrac{3}{5}\,(\sigma\tau)^2;\ C = -\tfrac{1}{2}\,(\varrho\varrho)^6 + \tfrac{1}{3}\,(\sigma\sigma)^4 + \tfrac{9}{20}\,(\tau, \tau)^2 \\
D = (\varrho u)^4 + \tfrac{1}{3}\,(\sigma u)^3 + \tfrac{3}{5}\,(\tau u)^2 + \tfrac{3}{10}\,(\varrho v)^2 + \tfrac{1}{5}\,(\sigma, v) + \tfrac{3}{100}\,\tau\,.\,v \\
E = -(\varrho u)^5 - \tfrac{2}{3}\,(\sigma u)^4 + \tfrac{3}{10}\,(\sigma v)^2 + \tfrac{3}{20}\,(\tau v);\ F = (\varrho u)^6 + \tfrac{3}{10}\,(\tau v)^2 \\
R = (AD)^1 + (BE)^2 + \tfrac{1}{3}\,CF.
\end{array}\right\} \quad (V)$$

Die Resultante R der Formen 5ten und 4ten Grades:

$$f = a_5 x_1^5 + a_4 x_1^4 x_2 + a_3 x_1^3 x_2^2 + a_2 x_1^2 x_2^3 + a_1 x_1 x_2^4 + a_0 x_2^5$$
$$\varphi = \alpha_4 x_1^4 + \alpha_3 x_1^3 x_2 + \alpha_2 x_1^2 x_2^2 + \alpha_1 x_1 x_2^3 + \alpha_0 x_2^4.$$

I. Die Cayley'sche Form und ihre Elementarcovarianten haben die Werthe:

$$F = \frac{f\,.\,\varphi_{y^4} - \varphi\,.\,f_{y^4}}{(xy)} = r_x^4\,s_y^3$$

$$r_x^4\,s_x^3 = (\overline{rs})^0 = \varrho = 4\,(f\varphi) \quad ; \quad (rs)\,r_x^3\,s_x^2 = (\overline{rs}) = \sigma = \tfrac{1}{2}\,(f\varphi)^2$$
$$(rs)^2\,r_x^2\,s_x = (\overline{rs})^2 = \tau = \tfrac{1}{3}\,(f\varphi)^3 \quad ; \quad (rs)^3\,r_x = (\overline{rs})^3 = \omega = \tfrac{2}{3}\,(f\varphi)^4.$$

II. Für die kommende Rechnung sind folgende Polaren von F erforderlich:

1. Reihe.

1. $r_x^4\,s_y^3 = \varrho_x^4\,\varrho_y^3 + \tfrac{12}{7}\,\sigma_x^3\,\sigma_y^2\,(xy) + \tfrac{6}{5}\,\tau_x^2\,\tau_y\,(xy)^2 + \tfrac{2}{5}\,\omega\,(xy)^3$
2. $(rs)\,r_x^3\,s_y^2 = \sigma_x^3\,\sigma_y^2 + \tfrac{6}{5}\,\tau_x^2\,\tau_y\,(xy) + \tfrac{1}{2}\,\omega\,.\,(xy)^2$
3. $(rs)^2\,r_x^2\,s_y = \tau_x^2\,\tau_y + \tfrac{2}{3}\,\omega\,.\,(xy).$

2. Reihe.

1. $r_x\,r_y^3\,s_x^3 = \varrho_x^4\,\varrho_y^3 + \tfrac{9}{7}\,\sigma_x^3\,\sigma_y^2\,(yx) + \tfrac{3}{5}\,\tau_x^2\,\tau_y\,(yx)^2 + \tfrac{1}{10}\,\omega\,(yx)^3\,.$
2. $r_x^3\,r_y\,s_x^3 = \varrho_x^6\,\varrho_y + \tfrac{3}{7}\,\sigma\,.\,(yx).$

3. Reihe.

1. $r_x^3\,r_z\,s_y^3 = \varrho_x^3\,\varrho_y^3\,\varrho_z + \tfrac{9}{7}\,\sigma_x^2\,\sigma_y^2\,\sigma_z\,(xy) + \tfrac{3}{7}\,\sigma_x^3\,\sigma_y^2\,(zy)$
$+ \tfrac{3}{5}\,\tau_x\,\tau_y\,\tau_z\,(xy)^2 + \tfrac{3}{5}\,\tau_x^2\,\tau_y\,(xy)\,(zy) + \tfrac{1}{10}\,\omega_z\,(xy)^3 + \tfrac{1}{10}\,\omega\,(xy)^2\,(zy)$
2. $r_x^3\,r_y\,s_y^3 = \varrho_x^3\,\varrho_y^4 + \tfrac{9}{7}\,\sigma_x^2\,\sigma_y^3\,(xy) + \tfrac{3}{5}\,\tau_x\,\tau_y^2\,(xy)^2 + \tfrac{1}{10}\,\omega_y\,(xy)^3$
3. $r_x^3\,r_y\,s_x\,s_y^2 = \varrho_x^4\,\varrho_y^3 - \tfrac{5}{7}\,\sigma_x^3\,\sigma_y^2\,(yx) + \tfrac{1}{10}\,\omega\,.\,(yx)^3$

4. $(rs)\, r_x^3 s_y^2 = \sigma_x^3 \sigma_y^2 + \frac{6}{5} \tau_x^2 \tau_y (xy) + \frac{1}{2} \omega (xy)^2$
5. $r_x^3 r_y s_x^2 s_y = \varrho_x^5 \varrho_y^2 + \frac{1}{7} \sigma_x^1 \sigma_y (xy) - \frac{1}{5} \tau (xy)^2$
6. $(rs)\, r_x^3 s_x s_y = \sigma_x^4 \sigma_y - \frac{3}{5} \tau \,.\, (yx)$
7. $r_x^3 r_y s_x^3 = \varrho_x^6 \varrho_y + \frac{3}{7} \sigma \,.\, (yx)$.

4. Reihe.

1. $r_x r_z^3 s_y^3 = \varrho_x \varrho_y^3 \varrho_z^3 + \frac{9}{7} \sigma_x \sigma_y^2 \sigma_z^2 (zy) + \frac{3}{7} \sigma_y^2 \sigma_z^3 (xy)$
   $+ \frac{3}{5} \tau_x \tau_y \tau_z (zy)^2 + \frac{3}{5} \tau_y \tau_z^2 (xy)(zy) + \frac{1}{10} \omega (zy)^3 + \frac{3}{10} \omega_z (zy)^2 (xy)$
2. $r_x r_y^3 s_y^3 = \varrho_x \varrho_y^6 + \frac{3}{7} \sigma_y^5 (xy)$
3. $(rs)\, r_x r_y^2 s_y^2 = \sigma_x \sigma_y^4 + \frac{2}{5} \tau_y^3 (xy)$
4. $r_x r_y^3 s_x s_y^2 = \varrho_x^2 \varrho_y^5 + \frac{1}{7} \sigma_x \sigma_y^4 (yx) - \frac{1}{5} \tau_y^3 (xy)^2$
5. $(rs)^2 r_x r_y s_y = \tau_x \tau_y^2 + \frac{2}{3} \omega_y (xy)$
6. $(rs)\, r_x r_y^2 s_x s_y = \sigma_x^2 \sigma_y^3 + \frac{1}{5} \tau_x \tau_y^2 (yx) - \frac{1}{6} \omega_y^1 (yx)^2$
7. $(rs)^2 r_x r_y s_x = \tau_x^2 \tau_y + \frac{1}{3} \omega (yx)$.

III. Die Resultante R und die Covariante Θ werden durch die symbolischen Produkte dargestellt:

$$R = \Pi (r_i r_x)\, (s_i s_x)\, (r_i p)$$
$$\Theta = \Pi (r_i r_x)\, (s_i s_x)\, (r_i p)\, r_{i,x} s_{i,x} p_x$$

Das in denselben auftretende Symbol p stellt die Form:

$$p = p_x^4 = \varphi = \alpha_x^4$$

dar, kann also durch das Symbol α ersetzt werden; es ist daher:

$$R = \Pi (r_i r_x)\, (s_i s_x)\, (r_i \alpha)$$
$$\Theta = \Pi (r_i r_x)\, (s_i s_x)\, (r_i \alpha)\, r_{i,x} s_{i,x} \alpha_x .$$

IV. 1. Transformation des symbolischen Produktes:

$$R = (ss_1)\, (ss_2)\, (ss_3)\, (s_1 s_2)\, (s_1 s_3)\, (s_2 s_3)\, \Pi (r_i r_x)\, (r_i \alpha).$$

Es ist:

$$R = (ss_1)\, (ss_2)\, (s_1 s_3)\, (s_2 s_3) \left\{ (ss_2)\, (s_1 s_3) - (ss_1)\, (s_2 s_3) \right\} \Pi (r_i r_x)\, (r_i \alpha).$$

Vertauscht man in dem ersten symbolischen Produkte rechter Hand die Symbolenpaare rs, $r_1 s_1$, $r_2 s_2$ cyklisch unter einander, dann geht es in das folgende über:

$$(s_1 s_2)\, (ss_1)^2\, (s_2 s_3)^2\, (ss_3)\, \Pi (r_i r_x)\, (r_i \alpha),$$

mithin ist (bis aufs Vorzeichen):

$$R = (ss_1)^2\, (s_2 s_3)^2 \left\{ (ss_2)\, (s_1 s_3) - (ss_3)\, (s_1 s_2) \right\} \Pi (r_i r_x)\, (r_i \alpha)$$
$$= (ss_1)^3\, (s_2 s_3)^3\, (rr_1)\, (rr_2)\, (rr_3)\, (r_1 r_2)\, (r_1 r_3)\, (r_2 r_3)\, (r\alpha)\, (r_1 \alpha)\, (r_2 \alpha)\, (r_3 \alpha).$$

Bezeichnet man die Form:

$$(rr_1)\, (ss_1)^3\, r_x^3\, r_{1,y}^3 = \lambda_x^3 \mu_y^3$$

durch $\lambda_x^3 \mu_y^3$ und ihre Elementarcovarianten:

$(\overline{\lambda\mu})^0 = (rr_1)\, (ss_1)^3\, r_x^3 r_{1,x}^3 = A$ und $(\overline{\lambda\mu})^2 = (rr_1)^3\, (ss_1)^3\, r_x r_{1,x} = B$

durch A und B, dann wird:

$$R = (\lambda\lambda_1)\,(\lambda\mu_1)\,(\lambda\alpha)\,(\mu\lambda_1)\,(\mu\mu_1)\,(\mu\alpha)\,(\lambda_1\alpha)\,(\mu_1\alpha).$$

Zur Bestimmung dieses symbolischen Produktes bediene ich mich der folgenden Polaren der Form $\lambda_x^3\mu_y^3$:

$$\lambda_x\lambda_y\lambda_z\,\mu_x\mu_y\mu_z = A_x^2A_y^2A_z^2 - \tfrac{1}{10}\{B_x^2(yz)^2 + B_y^2(zx)^2 + B_z^2(xy)^2\}$$
$$\lambda_x\lambda_y^2\,\mu_x\mu_y^2 = A_x^2A_y^4 - \tfrac{1}{5}B_y^2(xy)^2$$
$$\lambda_x^3\mu_x\mu_y^2 = A_x^4A_y^2 + \tfrac{3}{10}B_x^2(xy)^2$$
$$\lambda_x\lambda_y^2\mu_x^3 = A_x^4A_y^2 + \tfrac{3}{10}B_x^2(xy)^2.$$

Nach denselben ist:

$$R = (\lambda\alpha)\,(\mu\alpha)\{(\lambda A)^2(\mu A)^2(A\alpha)^2 - \tfrac{1}{10}[(\lambda B)^2(\mu\alpha)^2 + (\lambda\alpha)^2(\mu B)^2 + (\lambda\mu)^2(B\alpha)^2]$$
$$(\lambda\alpha)\,(\mu\alpha)\,(\lambda A)^2(\mu A)^2(A\alpha)^2 = (A\alpha)^2\{(A_1\alpha)^2(AA_1)^4 - \tfrac{1}{5}(A\alpha)^2(AB)^2\}$$
$$(\lambda\alpha)^3\,(\mu\alpha)\,(\mu B)^2 = (\mu\alpha)^3(\lambda\alpha)\,(\lambda B)^2 = (A\alpha)^4(AB)^2 + \tfrac{3}{10}(B\alpha)^2(B_1\alpha)^2;$$

ausserdem ist:

$$(\lambda\mu)^2\,(\lambda\alpha)\,(\mu\alpha)\,(B\alpha)^2 = (B\alpha)^2\,(B_1\alpha)^2,$$

mithin ist:

$$R = (AA_1)^4(A\alpha)^2(A_1\alpha)^2 - \tfrac{2}{5}(A\alpha)^4(AB)^2 - \tfrac{4}{25}(B\alpha)^2\,(B_1\alpha)^2$$

und wenn man die Covariante:

$$(AA)^4 - \tfrac{2}{5}(AB)^2 - \tfrac{4}{25}B^2 = g$$

durch g bezeichnet:

$$R = (g, \varphi)^4.$$

2. Transformation des symbolischen Produktes:

$$\Theta = \Pi\,(r_ir_x)\,(s_is_x)\,(r_i\alpha)\,r_{i,x}s_{i,x}\alpha_x:$$

Dasselbe kann man in derselben Weise, wie R, in das folgende transformiren:

$$\Theta = -(ss_1)^3\,s_{1,x}^3\,r_x\,r_{1,x}\,r_{2,x}\,\alpha_x\,(rr_1)\,(rr_2)\,(rr_3)\,(r_1r_2)\,(r_1r_3)\,(r_2r_3);$$

es hat (bis auf das Vorzeichen) den Werth:

$$\Theta = r_x\,s_x^3\,\lambda_x\mu_x\alpha_x\,(\lambda r)\,(\mu r)\,(\lambda\alpha)\,(\mu\alpha)\,(r\alpha),$$

oder da:

$$\lambda_x\mu_x\,\lambda_y\mu_y\,\lambda_z\mu_z = A_x^2A_y^2A_z^2 - \tfrac{1}{10}\{B_x^2(yz)^2 + B_y^2(zx)^2 + B_z^2(xy)^2\}$$

ist:

$$\Theta = r_xs_x^3\,(r\alpha)\,\alpha_x\{A_x^2(A\alpha)^2(Ar)^2 - \tfrac{1}{10}B(r\alpha)^2 - \tfrac{1}{10}r_x^2(B\alpha)^2 - \tfrac{1}{10}\alpha_x^2(rB)^2\}$$

Nun ist:

$$(A\alpha)^2\,A_x^2\alpha_x\,A_y^2\alpha_y = ((A\alpha)^2A_x^4\alpha_x^2)_{y^2} - \tfrac{1}{5}((A\alpha)^4A_x^2)_y(xy)^2$$
$$B_x^2\alpha_x\alpha_y^3 = (B_x^2\alpha_x^4)_{y^2} + (B_x\alpha_x^3(B\alpha))_y(xy) + \tfrac{3}{10}((B\alpha)^2\alpha_x^2)_y(xy)^2$$
$$B_y^2\alpha_x^3\alpha_y = (B_x^2\alpha_x^4)_{y^2} - (B_x\alpha_x^3(B\alpha))_y(xy) + \tfrac{3}{10}((B\alpha)^2\alpha_x^2)_y(xy)^2,$$

mithin ist:

$$\Theta = s_x^3 \begin{cases} (r_x^4,\ (A,\varphi)^2)^3 - \frac{1}{5}(r_x^4,\ (A\varphi)^4) - \frac{1}{10}(B\alpha)^2 r_x^3 s_x^3 (r\alpha)\,\alpha_x \\ -\frac{1}{10}\{(r_x^4,\ B.\varphi)^3 + (r_x^4,\ (B,\varphi))^2 + \frac{3}{10}(r_x^4,\ (B\varphi)^2)\} \\ -\frac{1}{10}\{(r_x^4,\ B.\varphi)^3 - (r_x^4,\ (B,\varphi))^2 + \frac{3}{10}(r_x^4,\ (B\varphi)^2)\} \end{cases}$$

und, wenn man die Covarianten:

$$(A,\varphi)^2 - \tfrac{1}{5} B.\varphi = C \quad ; \quad -\tfrac{1}{5}(A,\varphi)^4 - \tfrac{1}{25}(B\varphi)^2 = D$$

durch C und D bezeichnet:

$$\Theta = r_x s_x^3 C_x^3 (rC)^3 + r_x^3 s_x^3 D_x (rD).$$

Aus den Polaren der 2ten Reihe folgen die Formeln:

$$r_x s_x^3 C_x^3 (rC)^3 = \varrho_x^4 C_x^3 (\varrho C)^3 + \tfrac{9}{7}\sigma_x^3 C_x^4 (\sigma C)^2 + \tfrac{3}{5}\tau_x^2 C_x^5 (\tau C) + \tfrac{1}{10}\omega . C$$
$$r_x^3 s_x^3 D_x (rD) = \varrho_x^3 D_x (\varrho D) + \tfrac{3}{7}\sigma . D,$$

mithin ist:

$$\Theta = (\varrho C)^3 + \tfrac{9}{7}(\sigma C)^2 + \tfrac{3}{5}(\tau C) + \tfrac{1}{10}\omega . C + (\varrho D) + \tfrac{3}{7}\sigma . D.$$

V. Berechnung der Covarianten:

$$A = (rr_1)(ss_1)^3 r_x^3 r_{1,x}^3 \quad \text{und} \quad B = (rr_1)^3 (ss_1)^3 r_x r_{1,x}.$$

1. Berechnung von A.

Aus den Polaren der 3ten Reihe folgen die Formeln:

$$A = r_x^3 \begin{cases} \varrho_x^3 (r\varrho)(s\varrho)^3 + \tfrac{9}{7} s_x \sigma_x^2 (r\sigma)(s\sigma)^2 + \tfrac{3}{7}\sigma_x^3 (rs)(s\sigma)^2 + \tfrac{3}{5} s_x^2 \tau_x (r\tau)(s\tau) \\ \quad + \tfrac{3}{5}\sigma_x \tau_x^2 (rs)(s\tau) + \tfrac{1}{10} s_x^3 (r\omega) + \tfrac{3}{10}\omega . s_x^2 (rs) \end{cases}$$

$$r_x^3 \varrho_x^3 (r\varrho)(s\varrho)^3 = \varrho_x^3 r_{1,x}^3 (\varrho\varrho_1)^1 + \tfrac{9}{7}\varrho_x^1 \sigma_x^2 (\varrho\sigma)^3 + \tfrac{3}{5}\varrho_x^5 \tau_x (\varrho\tau)^2 + \tfrac{1}{10}\varrho_x^6 (\varrho\omega)$$
$$r_x^3 s_x \sigma_x^2 (r\sigma)(s\sigma)^2 = \varrho_x^4 \sigma_x^2 (\varrho\sigma)^3 - \tfrac{5}{7}\sigma_x^3 \sigma_{1,x}^3 (\sigma\sigma_1)^2 + \tfrac{1}{10}\omega . \sigma$$
$$r_x^3 \sigma_x^3 (rs)(s\sigma)^2 = \sigma_x^3 \sigma_{1,x}^3 (\sigma\sigma_1)^2 + \tfrac{6}{5}\sigma_x^4 \tau_x^2 (\sigma\tau) + \tfrac{1}{2}\omega . \sigma$$
$$r_x^3 s_x^2 \tau_x (r\tau)(s\tau) = \varrho_x^5 \tau_x (\varrho\tau)^2 - \tfrac{1}{7}\sigma_x^1 \tau_x^2 (\sigma\tau) - \tfrac{1}{5}\tau^2$$
$$r_x^3 s_x \tau_x^2 (rs)(s\tau) = \sigma_x^1 \tau_x^2 (\sigma\tau) - \tfrac{3}{5}\tau^2$$
$$r_x^3 s_x^3 (r\omega) = \varrho_x^6 (\varrho\omega) + \tfrac{3}{7}\sigma . \omega$$
$$A = (\varrho\varrho)^1 + \tfrac{1}{7}^8 (\varrho\sigma)^3 + \tfrac{6}{5}(\varrho\tau)^2 + \tfrac{1}{5}(\varrho\omega) - \tfrac{24}{49}(\sigma\sigma)^2 + \tfrac{36}{35}(\sigma\tau) + \tfrac{24}{35}\sigma . \omega - \tfrac{12}{25}\tau^2.$$

2. Berechnung von B.

Aus den Polaren der 4ten Reihe folgen die Formeln:

$$B = r_x \begin{cases} \varrho_x (r\varrho)^3 (s\varrho)^3 + \tfrac{9}{7}\sigma_x (rs)(r\sigma)^2 (s\sigma)^2 + \tfrac{3}{7} s_x (r\sigma)^3 (s\sigma)^2 + \tfrac{3}{5}\tau_x (rs)^2 (r\tau)(s\tau) \\ \quad + \tfrac{3}{5} s_x (rs)(r\tau)^2 (s\tau) + \tfrac{1}{10}\omega (rs)^3 + \tfrac{3}{10} s_x (rs)^2 (r\omega) \end{cases}$$

$$r_x \varrho_x (r\varrho)^3 (r\varrho)^3 = \varrho_x \varrho_{1,x} (\varrho\varrho_1)^6 + \tfrac{3}{7}\varrho_x^2 (\varrho\sigma)^5$$
$$r_x \sigma_x (rs)(r\sigma)^2 (s\sigma)^2 = \sigma_x \sigma_{1,x} (\sigma_1\sigma_1)^4 + \tfrac{2}{5}\sigma_x^2 (\sigma\tau)^2$$
$$r_x s_x (r\sigma)^3 (s\sigma)^2 = \varrho_x^2 (\varrho\sigma)^5 + \tfrac{1}{7}\sigma_x \sigma_{1,x} (\sigma\sigma_1)^1 + \tfrac{1}{5}\sigma_x^2 (\sigma\tau)^3$$
$$r_x \tau_x (rs)^2 (r\tau)(s\tau) = \tau_x \tau_{1,x} (\tau\tau_1)^2 + \tfrac{1}{3}\tau_x^2 (\tau\omega)$$
$$r_x s_x (rs)(r\tau)^2 (s\tau) = \sigma_x^2 (\sigma\tau)^3 + \tfrac{1}{5}\tau_x \tau_{1,x} (\tau\tau_1)^2 + \tfrac{1}{6}\tau_x^2 (\tau\omega)$$
$$r_x s_x (rs)^2 (r\omega) = \tau_x^2 (\tau\omega) + \tfrac{1}{3}\omega^2$$
$$B = (\varrho\varrho)^6 + \tfrac{6}{7}(\varrho\sigma)^5 + \tfrac{66}{49}(\sigma\sigma)^4 + \tfrac{6}{5}(\sigma\tau)^3 + \tfrac{12}{25}(\tau\tau)^2 + \tfrac{3}{5}(\tau\omega) + \tfrac{1}{5}\omega^2.$$

VI. Zusammenstellung der zur Berechnung der Resultante R erforderlichen Formeln:

$$\text{(VI)}\quad \begin{cases} \varrho = 4\,(f\varphi)\,; \quad \sigma = \frac{1}{2}\,(f\varphi)^2\,; \quad \tau = \frac{1}{3}\,(f\varphi)^3\,; \quad \omega = \frac{3}{3}\,(f\varphi)^4 \\ A = (\varrho\varrho)^4 + \frac{1}{7}^8\,(\varrho\sigma)^3 + \frac{6}{5}(\varrho\tau)^2 + \frac{1}{5}\,(\varrho\omega) - \frac{2}{4}\frac{1}{9}\,(\sigma\sigma)^2 + \frac{3}{3}\frac{6}{5}\,(\sigma\tau) + \frac{2}{3}\frac{1}{5}\,\sigma.\omega - \frac{1}{2}\frac{3}{5}\,\tau \\ B = (\varrho\varrho)^6 + \frac{6}{7}\,(\varrho\sigma)^5 + \frac{6}{4}\frac{6}{8}\,(\sigma\sigma)^4 + \frac{6}{5}\,(\sigma\tau)^3 + \frac{1}{2}\frac{8}{5}\,(\tau\tau)^2 + \frac{3}{5}\,(\tau\omega) + \frac{\omega^2}{5} \\ g = (AA)^4 - \frac{2}{5}\,(AB)^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{5}\,B^2 \\ R = (g, \varphi)^1. \end{cases}$$

Ueber diejenigen Raumcurven, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters darstellen.

Von G. Korndörfer in Stuttgart.

1.

Im 64ten Bande des Crelle'schen Journals hat Herr Clebsch eine Reihe von Sätzen über ebene Curven, deren Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters ausdrücken lassen, angegeben und zwar mit Zuziehung des Abel'schen Theorems. Man kann dieselbe Methode auch auf die Raumcurven anwenden, wenigstens für den Fall, dass dieselben den vollständigen Durchschnitt zweier algebraischen Flächen bilden.

Es seien $u = 0$, $v = 0$ die Gleichungen zweier Flächen von den Ordnungen s und t. Der Grad ihrer Schnittcurve ist dann $n = s \cdot t$, dieselbe besitzt $\frac{s \cdot t\,(s-1)\,(t-1)}{2}$ scheinbare Doppelpunkte und die Classenzahl p der Abel'schen Functionen, welche mit ihr zusammenhängt, ist $p = \frac{s \cdot t\,(s+t-4)}{2} + 1$. Jeder einfache Berührungspunkt der beiden Flächen bedingt einen Doppelpunkt der Raumcurve, jede stationäre Berührung einen Rückkehrpunkt. Jeder derselben vermindert die Zahl p um 1, wenn daher beide Flächen in p Punkten einfache oder stationäre Berührung besitzen, ist $p = 0$ und die Schnittcurve besitzt dann $\frac{st\,(s-1)\,(t-1)}{2}$ scheinbare und auch $\frac{s.t(s+t-4)}{2} + 1$ wirkliche Doppelpunkte resp. Rückkehrpunkte. Beide Flächen können daher auch keine grössere Zahl von Berührungspunkten miteinander gemein haben, wenn die Schnittcurve nicht zerfallen soll.

Dieselbe Betrachtung, welche Herr Clebsch anstellt, um nachzuweisen, dass sich die Coordinaten eines Curvenpunktes als rationale Functionen eines Parameters ausdrücken lassen, vorausgesetzt die ebene Curve besitzt die Maximalzahl von Doppelpunkten resp. Rückkehrpunkten, lässt sich auch auf vorliegenden Fall ausdehnen. Verbindet man sämmtliche Punkte der Raumcurve mit einem beliebigen Punkte des Raumes, so liegen diese Geraden auf einem Kegel n^{ter} Ordnung,

welcher offenbar $\frac{st(s-1)(t-1)}{2} + \frac{st(s+t-4)}{2} + 1 = \frac{(st-1)(st-2)}{2}$ Doppelkanten resp. Rückkehrkanten besitzt. Legt man durch dieselben und $2(st-1)$ weitere Kanten einen Kegel von der Ordnung $st-1$, so ist derselbe völlig bestimmt und bildet zugleich mit der gegebenen Raumcurve ein vollständiges System von Durchschnittspunkten. Ein System von Kegeln durch die Doppelkanten und $2st-3$ weitere Kanten gelegt, trifft daher die Raumcurve n^{ter} Ordnung noch in einem beweglichen Punkte. Man muss daher die Coordinaten dieses Punktes auf rationale Weise durch λ ausdrücken können. Dasselbe gilt von einem System Kegel von der Ordnung $st-2$, welches durch die Doppelkanten und $st-3$ andere Kanten gelegt wird.

Bezeichnen daher x, y, z die Coordinaten eines veränderlichen Punktes der Raumcurve, sowie $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, $f_3(\lambda)$ Functionen n^{ten} Grades in λ mit gemeinschaftlichem Nenner, so sind die Gleichungen einer solchen Raumcurve

$$x = f_1(\lambda)$$
$$y = f_2(\lambda).$$
$$z = f_3(\lambda)$$

Sind u, v, w Ebenencoordinaten, so kann dieselbe in die Form $ux + vy + wz + 1 = uf_1(\lambda) + vf_2(\lambda) + wf_3(\lambda) + 1 = 0$ gebracht werden. Ordnet man nach den Potenzen von λ und bezeichnet $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $\ldots u_n = 0$ Punktgleichungen, so ist noch die Form möglich:

$$u_0 + \lambda u_1 + \lambda^2 u_2 + \ldots \lambda^n u_n = 0.$$

In derselben sind $4(n+1)$ Constanten enthalten. Durch die Substitution

$$\lambda = \frac{\alpha + \beta u}{\gamma + \delta u},$$

wo u eine neue veränderliche, können durch passende Wahl von α, β, γ, δ immer 4 Coefficienten numerische Werthe erhalten. Die übrig bleibenden $4n$ Constanten sind aber noch nicht unabhängig von einander, sondern zwischen denselben müssen Bedingungen bestehen, da die Existenz eines wirklichen Doppelpunktes die Richtigkeit der Gleichungen

$$f_1(\lambda) = f_1(\lambda')$$
$$f_2(\lambda) = f_2(\lambda')$$
$$f_3(\lambda) = f_3(\lambda')$$

verlangt.

2.

Ich werde jetzt die Integrale dritter Gattung aufstellen, mit welchen unsere Raumcurve n^{ter} Ordnung zusammenhängt und zwar in ähnlicher Weise, wie Clebsch die Integrale erster Gattung für den vollständigen Durchschnitt zweier Flächen angiebt (a. a. O. § 221).

Aus den Gleichungen der beiden Flächen ergiebt sich $\Sigma u_i x_i = 0$, $\Sigma v_i x_i = 0$, $\Sigma u_i dx_i = 0$, $\Sigma v_i dx_i = 0$, wo u_i, v_i die Differentialquotienten von u, v nach den Variablen x_i. Hieraus folgen dann die Relationen:

$$\begin{aligned}
x_1 dx_2 - x_2 dx_1 &= (u_3 v_4 - u_4 v_3)\, du \\
x_1 dx_3 - x_3 dx_1 &= (u_1 v_2 - u_2 v_1)\, du \\
x_1 dx_4 - x_4 dx_1 &= (u_2 v_3 - u_3 v_2)\, du \\
x_2 dx_3 - x_3 dx_2 &= (u_1 v_4 - u_4 v_1)\, du \\
x_3 dx_4 - x_4 dx_3 &= (u_1 v_2 - u_2 v_1)\, du \\
x_4 dx_2 - x_2 dx_4 &= (u_1 v_3 - u_3 v_1)\, du .
\end{aligned}$$

Bezeichnen a_1, a_2, a_3, a_4; b_1, b_2, b_3, b_4 beliebige Grössen, so ist der Differentialausdruck

$$du = \frac{\Sigma \pm a_1 b_2 x_3 dx_4}{\begin{vmatrix} \Sigma a_i u_i\ , & \Sigma b_i u_i \\ \Sigma a_i v_i\ , & \Sigma b_i v_i \end{vmatrix}}$$

von denselben unabhängig und multiplicirt man denselben mit der Function $\frac{\Theta}{\Sigma \pm x_1 \xi_2 \eta_3 \zeta_4}$, wo Θ eine Function der $s + t - 3$ Ordnung und ξ, η, ζ beliebige Punkte darstellen. Das Integral

$$\int \frac{\Theta \Sigma \pm a_1 b_2 x_3 dx_4}{\Sigma \pm x_1 \xi_2 \eta_3 \zeta_4 \begin{vmatrix} \Sigma a_i u_i\ , & \Sigma b_i u_i \\ \Sigma a_i v_i\ , & \Sigma b_i v_i \end{vmatrix}}$$

ist dann nur von den Verhältnissen der x_i abhängig und lässt sich mit Hülfe der beiden Flächengleichungen $u = 0$, $v = 0$ als Integral einer einzigen Veränderlichen darstellen. Sobald $u_i = v_i$, für welche Werthe von x dann eine Berührung der Flächen stattfindet, wird der Nenner des Integrals Null. Bestimmt man daher die Coefficienten von Θ so, dass die Fläche $\Theta = 0$ durch diese Berührungspunkte geht, so bleibt das Integral endlich. Ebenso verschwindet der Nenner für alle Schnittpunkte der Ebene $\Sigma \pm x_1 \xi_2 \eta_3 \zeta_4 = 0$ mit der Raumcurve. Wenn man daher die Fläche $\Theta = 0$ zwingt, durch diese Schnittpunkte zu gehen, so wird das Integral überall endlich bleiben. Nun lassen sich zunächst in der Function Θ mit Benutzung der Flächengleichungen $u = 0$, $v = 0$, welche man mit Functionen U, V resp. von den Ordnungen $s - 3$, $t - 3$ multiplicirt, alle Coefficienten zerstören bis auf:

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{6}\{s + t \cdot s + t - 1 \cdot s + t - 2 - s \cdot s - 1 \cdot s - 2 - t \cdot t - 1 \cdot t - 2\} \\
&\qquad = \frac{s \cdot t\,(s + t - 4)}{2} + 1 + st - 1 .
\end{aligned}$$

Man kann also die Fläche $\Theta = 0$ wirklich zwingen, durch die

$p = \frac{st \cdot s + t - 4}{2} + 1$ Berührungspunkte und $s \cdot t - 2$ Schnittpunkte der Raumcurve mit der Ebene $\Sigma \pm x_1 \xi_2 \eta_3 \zeta_4$ zu gehen. Man hat daher ein nur in 2 Punkten unstetiges oder ein Integral dritter Gattung vor sich.

Wendet man den Abel'schen Satz auf den Durchschnitt dieser Raumcurve mit einer Fläche $w = 0$ von der Ordnung k an, so ist die Summe von Integralen dritter Gattung gleich logarithmischen und Kreisfunctionen der Coefficienten von w, wenn diese Summe ausgedehnt wird über sämmtliche Schnittpunkte.

3.

Diese Integralsummen kann man durch andere ersetzen, wie Herr Clebsch in der citirten Abhandlung gezeigt hat. Denke ich mir die Raumcurve durch die Gleichungen $x_i = f_i(\lambda)$ gegeben, so müssen für die $p = \frac{st(s+t-4)}{2} + 1$ Doppel- resp. Rückkehrpunkte zweien verschiedenen Werthen von λ dieselben x_i entsprechen. Sind daher $a_1 b_1$, $a_2 b_2 \ldots . a_p$, b_p die Parameter der Doppelpunkte, so können sich die x nur um Factoren geändert haben. Die Durchschnittspunkte mit einer Fläche $w = 0$ k^{ter} Ordnung werden gefunden, indem man für die x_i ihre Werthe in $w(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ einsetzt. Man erhält eine Gleichung in λ vom Grad $s \,.\, t \,.\, k$:

$$\Omega(\lambda) \equiv c(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots . (\lambda - \lambda_{stk}) \equiv w(x_1 x_2 x_3 x_4) = 0.$$

Setzt man λ einmal a_i und einmal b_i, so bleiben die x_i bis auf einen Factor c_i ungeändert, also auch w bis auf den Factor c_i^k und es ist $w(a_i) = c_i^k w(b_i)$, also

$$c_i^k = \frac{(a_i - \lambda_1)(a_i - \lambda_2) \cdots (a_i - \lambda_{stk})}{(b_i - \lambda_1)(b_i - \lambda_2) \cdots (b_i - \lambda_{stk})}.$$

Die Zahl dieser Gleichungen ist $p = \frac{st(s+t-4)}{2} + 1$. Geht der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt über, so erfährt diese Gleichung eine Modification; es ist dann nämlich immer $b_i = a_i + \varepsilon$, wo ε eine verschwindend kleine Grösse. Dadurch verwandelt sich $\frac{a_i - \lambda}{b_i - \lambda}$ in $1 - \frac{\varepsilon}{a_i - \lambda}$ und setzt man noch $c_i = 1 - u_i \varepsilon$, so geht obige Gleichung über in

$$\frac{1}{a_i - \lambda_1} + \frac{1}{a_i - \lambda_2} + \cdots \frac{1}{a_i - \lambda_{stk}} = k u_i.$$

Die Integralsummen, welche gleich 0 gesetzt, die Stelle dieser Gleichungen vertreten, sind:

$$\int_{\varrho_i}^{\lambda_1} \frac{a_i - b_i}{a_i - \lambda \cdot b_i - \lambda} \cdot d\lambda + \int_{\varrho_i}^{\lambda_2} \frac{a_i - b_i}{a_i - \lambda \cdot b_i - \lambda} d\lambda + \cdots \int_{\varrho_i}^{\lambda_{stk}} \frac{a_i - b_i}{a_i - \lambda \cdot b_i - \lambda} d\lambda = 0,$$

$$(2) \qquad \int_{\sigma_i}^{\lambda_1} \frac{d\lambda}{(a_i - \lambda)^2} + \int_{\sigma_i}^{\lambda_2} \frac{d\lambda}{(a_i - \lambda)^2} + \cdots \int_{\sigma_i}^{\lambda_{stk}} \frac{d\lambda}{(a_i - \lambda)^2} = 0:$$

Die unteren Grenzen sind dann bestimmt durch

$$\frac{a_i - \varrho_i}{b_i - \varrho_i} = c_i^{\frac{1}{st}}, \quad \frac{1}{a_i - \sigma_i} = \frac{u_i}{st}.$$

Erstere sind in 2 Punkten unstetige Integrale, also Integrale 3ter Gattung, letztere in 2 zusammenfallenden Punkten unstetig, also Integrale 2ter Gattung; sie entstehen durch Differentiation der ersteren nach a_i.

Nach Jacobi bestimmen sich nun von den stk Schnittpunkten einer Curve, welche den Durchschnitt zweier Flächen $u = 0$, $v = 0$ bildet, mit einer Fläche $w = 0$ von der Ordnung k, immer eine gewisse Zahl durch die übrigen; und zwar, wenn $k \geqq s + t - 3$, $k \geqq s$, $k \geqq t$ ist diese Zahl genau gleich $\frac{s \cdot t \cdot s + t - 4}{2} + 1$. Ist $k < s + t - 3$, so wird diese Zahl gleich

$$\frac{st \cdot s + t - 4}{2} + 1 - \frac{s + t - k - 1 \cdot s + t - k - 2 \cdot s + t - k - 3}{6},$$

so lange $k > s$, $> t$. Sie ist gleich

$$stk - \frac{k + 1 \cdot k + 2 \cdot k + 3}{6} + \frac{k - t + 1 \cdot k - t + 2 \cdot k - t + 3}{6} + 1,$$

wenn $s > k \geqq t - 3$ und gleich $s \,.\, t \,.\, k - \frac{k + 1 \cdot k + 2 \cdot k + 3}{6} + 1$, wenn k kleiner als beide Zahlen. Hieraus geht hervor, dass für $k \geqq s + t - 3$ die Zahl obiger Gleichungen genau übereinstimmt mit der Zahl der Bedingungen, dass die $s \,.\, t \,.\, k$ Schnittpunkte auf einer Fläche k^{ter} Ordnung liegen; und dass für $k \leqq s + t - 3$ die Zahl dieser Gleichungen grösser ist. Bei $k = s + t - 4$ um 1 grösser, ohne dass diese aufhören, nebeneinander zu bestehen.

Die rechte Seite der obigen Gleichung 1 lässt sich noch um ein Vielfaches von $2i\pi$ vermehren, die der 2ten Gleichung nicht.

4.

Zunächst liessen sich folgende Aufgaben behandeln. Es sind von den $s \,.\, t \,.\, k$ Schnittpunkten $stk - pr$ gegeben; man soll durch sie eine Fläche k^{ter} Ordnung legen, welche die Raumcurve in p Punkten r punktig

berührt. Die Zahl der Bedingungen ist $s \,.\, t \,.\, k - pr + p\,(r-1)$. Hierzu kommen noch p weitere Bedingungen dem vollständigen Schnittpunktsysteme entsprechend; die Aufgabe ist dann völlig bestimmt und lösbar. Vorausgesetzt ist dann $k \geqq s + t - 3$. Ist dabei $k \geqq s$, so ist die Fläche k^{ter} Ordnung nicht völlig bestimmt, es kann statt derselben jede andere Fläche k^{ter} Ordnung genommen werden, welche durch deren Schnitt mit der Fläche s geht. In diesem Fall kann man statt von der Fläche k^{ter} Ordnung, von der Raumcurve ks^{ter} Ordnung sprechen, welche bei dieser Aenderung constant bleibt, und dieser die Eigenschaften der Fläche k^{ter} Ordnung beilegen. Ist ausserdem $k \geqq t$, so besitzt jede Fläche die verlangten Eigenschaften, welche durch die Schnittpunkte von k, s, t geht, man hat es dann nur noch mit einem Punktsystem zu thun.

Werden die Parameter der p zu suchenden Punkte mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ bezeichnet, so dienen zu deren Bestimmung die Gleichungen.

$$\frac{a_i - \lambda_1 \,.\, a_i - \lambda_2 \ldots a_i - \lambda_p}{b_i - \lambda_1 \,.\, b_i - \lambda_2 \ldots b_i - \lambda_p} = e^{\frac{2hi\pi}{2}} \cdot \sqrt[2]{c_i^m \frac{b_i - l_1 \,.\, b_i - l_2 \,..\, b_i - l_{st\,.\,k-pr}}{a_i - l_1 \,.\, a_i - l_2 \,..\, a_i - l_{s.t.k-pr}}}$$

$$\frac{1}{a_i - \lambda_1} + \frac{1}{a_i - \lambda_2} \cdots + \frac{1}{a_i - \lambda_p} = \tfrac{1}{2}\left\{k u_i - \frac{1}{a_i - l_1} - \frac{1}{a_i - l_2} \cdots - \frac{1}{a_i - l_{stk-pr}}\right\}.$$

Hierin sind $l_1, l_2, \ldots l_{s.t.k-pr}$ die Parameter der gegebenen Punkte. Es lassen sich aus diesen Systemen von Gleichungen symmetrische Functionen der λ berechnen und eine Gleichung p^{ten} Grades für dieselben ansetzen.

Das zugehörige Umkehrproblem ist in den Gleichungen enthalten

$$\sum_{h=1}^{h=p} \int_{\varrho_i}^{\lambda_h} \frac{a_i - b_i}{a_i - \lambda \,.\, b_i - \lambda} \cdot d\lambda = \mu_i \quad \text{oder} \quad \sum_{h=1}^{h=p} \int \frac{d_\lambda}{(a_i - \lambda)^2} = \nu_i \,.$$

Die Auflösung des Umkehrproblems liegt in den Gleichungen

$$\frac{a_i - \lambda_1 \,.\, a_i - \lambda_2 \,.\, a_i - \lambda_3 \ldots a_i - \lambda_p}{b_i - \lambda_1 \,.\, b_i - \lambda_2 \,.\, b_i - \lambda_3 \ldots b_i - \lambda_p} = e^{u_i} \cdot \left(\frac{a_i - \varrho_i}{b_i - \varrho_i}\right)^p = e^{u_i} \cdot (c^i)^{\frac{p}{s}\cdots}$$

respective

$$\frac{1}{a_i - \lambda_1} + \frac{1}{a_i - \lambda_2} + \frac{1}{a_i - \lambda_3} + \cdots \frac{1}{a_i - \lambda_p} = v_i + \frac{p_i}{u_i - b_i} = v_i + \frac{p \,.\, k_i}{s \,.\, t} \,.$$

Aus den obigen Gleichungen ergiebt sich noch, dass die Zahl der Lösungen r^{p-x} ist, wenn x Rückkehrpunkte vorhanden sind, denn die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_p$ werden durch Ausziehung einer r^{ten} Wurzel gefunden, welche Operation $p - x$mal vorkommt. Denkt man sich obige Gleichungen für r verschiedene Systeme von Lösungen hingeschrieben, und die aus der ersten Gleichung entstehenden multiplicirt, die aus der letzten entstehenden addirt, so erfährt man, dass die 2 Systeme von Berührungspunkten mit den gegebenen Punkten auf einer Fläche k^{ter} Ordnung liegen.

Lässt man von den $s \,.\, t \,.\, k - pr$ Punkten nur noch

$$s \,.\, t \,.\, k - (p + u)\, r$$

gegeben sein, und legt den ur nur die Bedingung auf, dass u mal r zusammenfallen, so wird das Problem unbestimmt und man erhält Systeme von Flächen k^{ter} Ordnung, welche durch $s \,.\, t \,.\, k - (p + u)\, r$ Punkte gehen und die Raumcurven in $(u + p)$ Punkten r punktig berühren. Die Anzahl der Systeme ist r^{p-x}.

Lässt man $s \,.\, t \,.\, k = (p + u)\, r$ werden, so kann sich die Zahl der Systeme reduciren, wenn $k = k's$ und $r = r's$, auf $r^{p-x} - r'^{p-x}$ und nur wenn k und r relative Primzahlen sind, ist die Zahl der Systeme r^{p-x}.

5.

Analog den Sätzen, welche Herr Clebsch, a. a. O. aufgestellt hat, erhält man nun hier folgende.

1. Ich betrachte die Raumcurven 4^{ter} Ordnung, welche sich als vollständiger Schnitt zweier Flächen 2^{ter} Ordnung, die sich noch in einem Punkte berühren, darstellt. Die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte ist 2, der wirklichen 1.

Für den Schnitt der Curven mit einer Ebene hat man $k = 1$. Lässt man 3 der λ einander gleich werden, so erhält man den Satz: *Durch einen Punkt der Curven kann man 3 Schmiegungsebenen an dieselben ziehen; die 3 Berührungspunkte liegen mit dem gegebenen in einer Ebene.* Werden 2 der λ einander gleich: *Durch eine Sehne der Curve kann man 2 Tangentenebenen an dieselbe ziehen.* Werden 2 mal 2 λ einander gleich: *Es giebt 2 Systeme von Ebenen, welche die Curve in 2 verschiedenen Punkten berühren und durch jede Tangente geht eine Ebene jedes Systems. Legt man durch die beiden Berührungspunkte einer solchen Ebene eine weitere Ebene, so schneidet diese in den Berührungspunkten einer andern Tangentenebene desselben Systems. Durch jeden Punkt im Raum gehen 4 doppelt berührende Ebenen, die 8 Berührungspunkte liegen auf einem Kegel 2^{ter} Ordnung, dessen Spitze jener Punkt ist.*

Geht der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt über: *Durch einen Punkt der Curve kann man nur eine Schmiegungsebene an die Curve ziehen. Es giebt nur ein System von Doppeltangentenebenen und durch eine Sehne lässt sich nur eine Tangentenebene an die Curve legen.*

Werden die 4 λ einander gleich, so erhält man eine Wendungsberührebene. *Die Curve besitzt 4 Wendungsberührebenen, deren Berührungspunkte liegen in einer Ebene. Geht der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt über, so existirt nur noch eine Wendungsberührebene.*

Zu einem Satze über die Tangenten in den 4 Berührungspunkten gelangt man durch folgende Betrachtung. Jede Wendungsberührebene

schneidet die abwickelbare Fläche der Curve 4^{ter} Ordnung im 3fach zu rechnenden Erzeugenden und einer Curve 3^{ter} Ordnung. Die 4 Wendungsberührebenen bilden ein Tetraeder, dessen 6 Kanten die 6 Wendetangenten der in ihrer Ebene liegenden Curve 3^{ter} Ordnung. Je 2 dieser Curven besitzen eine gemeinsame. Die Berührungspunkte der Wendetangenten einer dieser Curven sind die Schnittpunkte der zu den 3 andern Wendungsberührebenen gehörenden Tangenten mit ihrer Ebene. Da nun die 3 Wendepunkte in einer Geraden liegen, so folgt der Satz: *Jede Wendungsberührebene wird von den Tangenten der* 3 *andern in* 3 *Punkten geschnitten, die auf einer Geraden liegen.* Legt man dieses Tetraeder als ein Coordinatentetraeder zu Grunde, so drückt sich die Gleichung der Raumcurve einfach aus:

$$x_1 = (\lambda - a)^4$$
$$x_2 = (\lambda - b)^4$$
$$x_3 = (\lambda - c)^4$$
$$x_4 = (\lambda - d)^4$$

wenn a, b, c, d die Parameter der Berührungspunkte der Wendungsberührebenen.

2. Ich untersuche jetzt die Raumcurve 6^{ter} Ordnung, welche der vollständige Durchschnitt einer Fläche 2^{ter} Ordnung mit einer Fläche 3^{ter} Ordnung ist, welche sich ausserdem in 4 verschiedenen Punkten berühren. Dieselbe besitzt 6 scheinbare und 4 wirkliche Doppelpunkte.

Für den Schnitt mit einer Ebene haben die Parameter der 6 Schnittpunkte 4 Gleichungen zu genügen. Die Zahl der Schnittpunkte, welche durch die gegebenen bestimmt ist, beträgt $s.t.k - \frac{k+1.k+2.k+3}{1.2.3} = 3$. Damit diese Ebene die Curve in 3 verschiedenen Punkten zweipunktig berühre, sind $\frac{s.t.k.(r-1)}{r} = 3$ Bedingungen zu erfüllen. Die 4 Gleichungen mit 3 Unbekannten können aber doch neben einander bestehen (a. a. O. p. 59). Die Zahl der Lösungen ist r^{n-1-x}. Daraus folgt: *Eine solche Curve besitzt* 8 *dreifach berührende Ebenen; geht ein Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt über, so existiren noch* 4, *bei zwei Rückkehrpunkten noch* 2, *bei drei keine mehr.*

Für den Schnitt mit einer Fläche 2^{ter} Ordnung:

Es giebt 15 *Schaaren von Flächen* 2^{ter} *Ordnung, welche die Curve in* 6 *verschiedenen Punkten zweipunktig berühren. Die Berührungspunkte je zweier Flächen derselben Schaar liegen auf einer Fläche* 2^{ter} *Ordnung. Bei einem Rückkehrpunkt giebt es noch* 7, *bei zwei noch* 3, *bei drei noch* 1 *und bei vier Rückkehrpunkten existirt keine Schaar mehr.*

Lässt man von den 12 λ 4mal 3 einander gleich werden, so erhält man den Satz: *Es giebt* 81 *Flächenschaaren* 2^{ter} *Ordnung, d. i. Raum-*

curven 4ter *Ordnung, welche die Curve* 6ter *Ordnung in* 4 *verschiedenen Punkten* 3*punktig berühren; die Berührungspunkte je dreier solcher liegen auf einer Fläche* 2ter *Ordnung. Bei einem Rückkehrpunkt giebt es noch* 27, *bei zwei* 9, *bei drei* 3 *und bei vier Rückkehrpunkten existirt noch eine.*

Ich betrachte noch den Schnitt mit einer Fläche 3ter Ordnung.

Es giebt 16 *Flächenschaaren* 3ter *Ordnung, welche die Curve* 6ter *Ordnung in* 9 *verschiedenen Punkten berühren und die Berührungspunkte zweier Flächen einer Schaar liegen auf einer Fläche* 3ter *Ordnung. Bei einem Rückkehrpunkt giebt es noch* 8, *bei zwei noch* 4, *bei drei noch* 2 *Schaaren und bei vier existirt keine mehr. Es giebt* 80 *Flächenschaaren* 3ter *Ordnung, welche die Raumcurve* 6ter *Ordnung in* 6 *verschiedenen Punkten dreipunktig berühren und die Berührungspunkte je dreier liegen auf einer Fläche* 3ter *Ordnung. Bei einem Rückkehrpunkt giebt es noch* 26, *bei zwei noch* 8, *bei drei noch* 2 *Schaaren und bei vier existirt keine mehr.*

Durch je 2 *Punkte der Curve kann man* 256 *Flächenschaaren* 3ter *Ordnung legen, welche die Raumcurve in* 4 *verschiedenen Punkten vierpunktig berühren.*

3. Der vollständige Durchschnitt zweier Flächen 3ter Ordnung ist eine Raumcurve 9ter Ordnung. Die beiden Flächen mögen sich in 10 Punkten berühren; die Curve besitzt dann 10 wirkliche und 18 scheinbare Doppelpunkte. Die Zahl der Schnittpunkte, die sich aus den gegebenen bestimmen, beträgt für den Schnitt mit einer Fläche 2ter Ordnung $s \cdot t \cdot k + 1 - \frac{k+1 \cdot k+2 \cdot k+3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 9$. Die Zahl der Bedingungen, dass diese Fläche in allen Schnittpunkten tangire, ist $\frac{s \cdot t \cdot k}{2} = 9$. Die Zahl der Gleichungen ist 10, welche aber für die 9 Unbekannten noch bestehen; die Zahl der Lösungen ist $2^9 - 1$.

Es giebt daher 511 *Flächen zweiter Ordnung, welche die Raumcurve* 9ter *Ordnung in* 9 *Punkten tangiren; die Berührungspunkte je zweier liegen auf einer Fläche* 2ter *Ordnung. Bei einem Rückkehrpunkt existiren noch* 255, *bei zwei noch* 127, *bei drei noch* 63, *bei vier noch* 31, *bei fünf noch* 15, *bei sechs noch* 7, *bei sieben noch* 3, *bei acht noch* 1 *Schaar.*

Durch je 7 *Punkte kann man* 1024 *Flächenschaaren* 3ter *Ordnung legen, welche die Curve in* 10 *Punkten berühren. Gehen alle Doppelpunkte in Rückkehrpunkte über, so existirt noch eine. Es giebt* 59048 *Flächenschaaren* 3ter *Ordnung, welche in* 9 *verschiedenen Punkten dreipunktig berühren. Die Berührungspunkte je dreier Flächen einer Schaar liegen auf einer weiteren Fläche* 3ter *Ordnung. Gehen alle Doppelpunkte in Rückkehrpunkte über, so existirt keine Schaar mehr.*

Stuttgart, im April 1870.

Revision einiger allgemeiner Sätze aus der Theorie des Newton'schen Potentiales.

Von Carl Neumann in Leipzig.

Die vorliegenden Untersuchungen gehen zum grossen Theil vollständig parallel mit denjenigen, welche von mir angestellt worden sind in einer früheren Arbeit über das Logarithmische Potential (Seite 325 dieses Bandes); demgemäss mögen jene parallel laufenden Theile nur in Kürze angedeutet, ausführlicher aber diejenigen Theile dargestellt werden, in denen ein wesentlicher Unterschied zu Tage tritt.

Unter $\mathfrak{T}$ mag im Folgenden ein von beliebig vielen Flächen begrenzter Raum verstanden werden, einerlei ob derselbe endlich oder unendlich ist; nur soll beständig vorausgesetzt werden, dass *sämmtliche Oberflächenpunkte* dieses Raumes im *Endlichen* liegen. Aehnlich wie bei den früheren Betrachtungen in der Ebene werden auch hier die *in Erstreckung* des Raumes $\mathfrak{T}$ befindlichen Punkte zu sondern sein in zwei Kategorien, die eine bestehend aus den Punkten *innerhalb* $\mathfrak{T}$, die andere bestehend aus den Punkten an der *Oberfläche* von $\mathfrak{T}$. Sämmtliche Punkte des *ganzen unendlichen Raumes* zerfallen daher, mit Bezug auf $\mathfrak{T}$, in drei Kategorien, nämlich in diejenigen beiden, welche soeben genannt wurden, und in eine dritte Kategorie, welche besteht aus den *ausserhalb* $\mathfrak{T}$ gelegenen Punkten.

§ 1.

Die charakteristischen Bedingungen (Π).

Es sollen hier Functionen Φ der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z in Untersuchung gezogen werden, welche gegeben sind für irgend einen Raum $\mathfrak{T}$, und mit Bezug auf diesen Raum charakterisirt sind durch folgende Bedingungen:

(Π, 1) .... *Es wird verlangt, die Function Φ solle in Erstreckung des Raumes $\mathfrak{T}$ eindeutig und gleichmässig stetig sein. Ueberdiess wird, falls $\mathfrak{T}$ unendlich ist, gleichzeitig noch verlangt, der Werth von Φ solle für sämmtliche Punkte, die ins Un-*

endliche sich entfernen, convergiren gegen irgend eine endliche (jedoch nicht vorgeschriebene) Constante Γ.

(Π, 2) .... *Es wird verlangt, dass die Ableitungen von* Φ *eindeutig und gleichmässig stetig sind in Erstreckung eines jeden Gebietes, das vollständig innerhalb* $\mathfrak{T}$ *liegt, und dass ferner* $\Delta\Phi$ *in Erstreckung eines jeden solchen Gebietes gleich Null ist.*

Hierbei sind unter den Ableitungen von Φ die Ausdrücke

$$\frac{\partial^{p+q+r}\Phi}{\partial x^p \partial y^q \partial z^r}, \quad (p+q+r = 1, 2),$$

und unter $\Delta\Phi$ der Ausdruck

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

zu verstehen.

Ist der Raum $\mathfrak{T}$ *unendlich*, so wird also für die diesen Bedingungen (Π) entsprechende Function Φ eine gewisse *Convergenzconstante* Γ, ausserdem aber gleichzeitig noch eine gewisse *zweite der Function eigenthümliche Constante* existiren, auf welche hier sogleich aufmerksam gemacht werden mag. Denkt man sich nämlich um irgend einen Punkt m eine Kugelfläche σ construirt, von solcher Ferne, dass der durch dieselbe bestimmte Kugelergänzungsraum vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegt, so wird, welche Grösse diese Fläche im Uebrigen auch haben mag, und wo ihr Mittelpunkt m auch liegen mag, das über diese Fläche ausgedehnte Integral

$$\mathsf{K} = -\frac{1}{4\pi}\int\int \frac{\partial\Phi}{\partial\nu}\, d\sigma$$

beständig *ein und denselben* Werth besitzen; wie solches aus der Erfüllung der Bedingungen (Π) mit voller Strenge sich ergiebt. Dabei mag unter ν diejenige Normale der Fläche σ verstanden werden, welche errichtet ist auf der *convexen* Seite derselben. Allgemeiner lässt sich darthun, dass jenes Integral auch dann beständig *ein und denselben* Werth behält, wenn die Kugelfläche durch stetige Umformung in irgend welche andere geschlossene Fläche umgewandelt wird, so lange nur diese neue Fläche vollständig *innerhalb* des gegebenen Raumes $\mathfrak{T}$ verharrt. Der Werth K dieses Integrales kann demnach bezeichnet werden als eine zweite der Function Φ eigenthümlich zugehörige Constante; er mag genannt werden die *Integralconstante* derselben.

Denkt man sich *ausserhalb* irgend eines endlichen oder unendlichen Raumes $\mathfrak{T}$ eine gegebene Massenvertheilung M, und bezeichnet man mit Φ das Newton'sche Potential von M in Bezug auf irgend einen Punkt (x, y, z), so wird dieses Potential Φ eine Function von x, y, z sein, welche mit Bezug auf den Raum $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π) vollständig erfüllt. Ob auch das Umgekehrte der Fall ist, ob nämlich jede Function, die auf $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π) erfüllt, als das Poten-

tial irgend einer ausserhalb $\mathfrak{T}$ befindlichen Massenvertheilung angesehen werden könne, — diese Frage mag vorläufig dahingestellt bleiben.

§ 2.

Die Sätze des arithmetischen Mittels.

Mit Bezug auf die bereits definirte *Integralconstante* ist zunächst folgender sich leicht ergebender Satz zu notiren:

I. Satz. Es sei Φ *eine Function, welche auf dem gegebenen Raume* $\mathfrak{T}$ *die Bedingungen* (Π) *erfüllt.* Ferner sei

$$-\frac{1}{4\pi}\int\int_{(r)}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial r}\,d\sigma$$

ein über die Elemente $d\sigma$ *einer beliebigen Kugelfläche* (r) *ausgedehntes Integral, wo* Φ_σ *den Werth von* Φ *im Elemente* $d\sigma$ *vorstellen soll.*

Dieses Integral wird alsdann gleich Null sein, sobald der durch die Fläche (r) *bestimmte Kugelraum vollständig innerhalb* $\mathfrak{T}$ *liegt; hingegen wird dasselbe identisch sein mit der der Function* Φ *zugehörigen Integralconstanten* K, *sobald der durch jene Fläche sich bestimmende Kugelergänzungsraum vollständig innerhalb* $\mathfrak{T}$ *liegt.*

Wir halten fest an der über Φ gemachten Voraussetzung, und construiren einen von zwei concentrischen Kugelflächen (r) und (r') begrenzten schalenförmigen Raum, der vollständig *innerhalb* $\mathfrak{T}$ liegt, bezeichnen mit m das gemeinschaftliche Centrum jener beiden Flächen, ferner mit T_m die reciproke Entfernung zwischen m und dem beweglichen Punkt (x, y, z), und erhalten alsdann sofort die Formel:

$$\int\int_{(r)}\left(\Phi_\sigma\frac{\partial T_{m\sigma}}{\partial r}-T_{m\sigma}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial r}\right)d\sigma=\int\int_{(r')}\left(\Phi_\sigma\frac{\partial T_{m\sigma}}{\partial r'}-T_{m\sigma}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial r'}\right)d\sigma,$$

wo das eine Integral über alle Elemente $d\sigma$ der Fläche (r), das andere über die Elemente $d\sigma$ der Fläche (r') hinerstreckt ist, und wo Φ_σ, $T_{m\sigma}$ die Werthe der Functionen Φ, T_m im Elemente $d\sigma$ vorstellen sollen. Dividirt man diese Gleichung durch 4π, und beachtet man, dass $T_{m\sigma}$ im Integrale links $=\frac{1}{r}$, im Integrale rechts $=\frac{1}{r'}$ ist, so ergiebt sich:

$$-\mathsf{M}-\frac{1}{4\pi r}\int\int_{(r)}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial r}\,d\sigma=-\mathsf{M}'-\frac{1}{4\pi r'}\int\int_{(r')}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial r'}\,d\sigma,$$

wo M das arithmetische Mittel aller auf der Fläche (r) vorhandenen Werthe von Φ vorstellt, und M' die analoge Bedeutung hat mit Bezug auf die Fläche (r'). Setzt man also zur augenblicklichen Abkürzung:

$$(1)\qquad -\frac{1}{4\pi}\int\int_{(r)}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial r}\,d\sigma=-\frac{1}{4\pi}\int\int_{(r')}\frac{\partial\Phi_\sigma}{\partial r'}\,d\sigma=[\Phi],$$

so erhält man die Formel:

$$-\mathsf{M}+\tfrac{1}{r}[\Phi]=-\mathsf{M}'+\tfrac{1}{r'}[\Phi],$$

d. i.:

$$\mathsf{M}-\mathsf{M}'=\left(\tfrac{1}{r}-\tfrac{1}{r'}\right)[\Phi]. \tag{2}$$

Die Formeln (1), (2) sind gültig für jeden beliebigen von zwei concentrischen Kugelflächen (r), (r') begrenzten schalenförmigen Raum, falls nur sämmtliche Punkte dieses Raumes *innerhalb* $\mathfrak{T}$ liegen; und sie werden also ihre Gültigkeit behalten, sobald man, ohne jene Bedingung zu verletzen, den schalenförmigen Raum durch eine Aenderung der Radien r, r' beliebig anwachsen oder abnehmen lässt.

Eine solche Operation mag nun wirklich vorgenommen werden. Dabei mögen die beiden durch (r), (r') bestimmten Kugelräume mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, und die beiden durch (r), (r') indicirten Kugelergänzungsräume mit $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ bezeichnet, und der Reihe nach folgende Fälle in Betracht gezogen werden.

Erster Fall. Es sei $r'<r$, und es werde vorausgesetzt, dass die Kugelräume $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegen. Alsdann ist das in (1) mit $[\Phi]$ bezeichnete Integral gleich *Null* (I. Satz); somit ergiebt sich aus (2):

$$\mathsf{M}-\mathsf{M}'=0,$$

und, falls man r' zu Null abnehmen lässt:

$$\mathsf{M}-\Phi_m=0, \tag{3}$$

wo unter Φ_m derjenige specielle Werth zu verstehen ist, welchen Φ im Centrum m der Flächen (r), (r') besitzt.

Zweiter Fall. Es sei $r'>r$, und es werde vorausgesetzt, dass die Kugelergänzungsräume $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegen. Alsdann wird das Integral $[\Phi]$ identisch sein mit der *Integralconstanten* K, (I. Satz); sodass die Formel (2) also übergeht in

$$\mathsf{M}-\mathsf{M}'=\frac{\mathsf{K}}{r}-\frac{\mathsf{K}}{r'}.$$

Hieraus folgt, wenn man r' ins Unendliche anwachsen lässt, sofort:

$$\mathsf{M}-\Gamma=\frac{\mathsf{K}}{r}, \tag{4}$$

wo Γ die *Convergenzconstante* der Function Φ repräsentirt.

Die Formeln (3) und (4) führen zu folgendem Ergebniss:

II. und III. Satz. Es sei irgend ein endlicher oder unendlicher Raum $\mathfrak{T}$ gegeben, und es repräsentire Φ eine Function, welche auf $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π) *erfüllt.*

Construirt man irgend einen vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ gelegenen Kugelraum $\mathfrak{A}$, so wird das arithmetische Mittel der an der Oberfläche von $\mathfrak{A}$ vorhandenen Werthe Φ jedesmal identisch sein mit dem-

jenigen speciellen Werthe Φ_m, welchen die Function Φ besitzt im Centrum m des Raumes $\mathfrak{A}$. Existirt also an der Oberfläche von $\mathfrak{A}$ ein Werth Φ, welcher grösser ist als Φ_m, so wird an jener Oberfläche jederzeit auch ein gewisser anderer Werth Φ sich vorfinden, der kleiner ist als Φ_m; und umgekehrt.

Construirt man ferner [*was allerdings nicht immer möglich ist*] *einen vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ befindlichen Kugelergänzungsraum $\mathfrak{B}$, so wird das arithmetische Mittel der an der Oberfläche von $\mathfrak{B}$ vorhandenen Werthe Φ jedesmal identisch sein mit $\Gamma + \frac{K}{r}$, wo r den Radius der genannten Oberfläche bezeichnet, und Γ, K die der Function Φ eigenthümlichen Constanten* [*die Convergenzconstante und die Integralconstante*] *repräsentiren sollen. Existirt also an der Oberfläche von $\mathfrak{B}$ irgend ein Werth Φ, der grösser ist als $\Gamma + \frac{K}{r}$, so wird an dieser Oberfläche jederzeit auch ein gewisser anderer Werth Φ sich vorfinden, der kleiner ist als $\Gamma + \frac{K}{r}$; und umgekehrt.*

§ 3.

Darstellung einer Function vom Charakter (Π) innerhalb eines Kugelraumes.

Es werde ein Kugelraum $\mathfrak{A}$ construirt, der sich befindet vollständig innerhalb des gegebenen Raumes $\mathfrak{T}$. Ferner sei m der Mittelpunkt von $\mathfrak{A}$, i ein beliebiger Punkt innerhalb $\mathfrak{A}$, und k der zu i *conjugirte* Punkt ausserhalb $\mathfrak{A}$; es sollen nämlich m, i, k in gerader Linie liegen, und gleichzeitig sollen die beiden Entfernungen $mi = \varrho$ und $mk = \varrho'$ zu ihren mittleren Proportionalen den Radius r des Kugelraumes $\mathfrak{A}$ besitzen.

Versteht man unter Φ irgend eine auf $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π) erfüllende Function, ferner unter T_i, T_k die reciproken Entfernungen des beweglichen Punktes (x, y, z) von i und von k aus, so ergeben sich die Formeln:

$$(1)\qquad \begin{aligned} -4\pi\Phi_i &= \int\int_{\mathfrak{A}}\left(\Phi_\sigma \frac{\partial T_{i\sigma}}{\partial r} - T_{i\sigma}\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial r}\right) d\sigma, \\ 0 &= \int\int_{\mathfrak{A}}\left(\Phi_\sigma \frac{\partial T_{k\sigma}}{\partial r} - T_{k\sigma}\frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial r}\right) d\sigma, \end{aligned}$$

wo die Integrationen ausgedehnt sind über alle Elemente $d\sigma$ der Oberfläche von $\mathfrak{A}$, und wo Φ_σ, $T_{i\sigma}$, $T_{k\sigma}$ diejenigen Werthe bezeichnen, welche die Functionen Φ, T_i, T_k besitzen im Elemente $d\sigma$. Multiplicirt man diese Formeln mit 1 und mit $-\frac{r}{\varrho}$, und addirt, so erhält man:

$$-4\pi\Phi_i = \int\int_{\mathfrak{A}} \Phi_\sigma \left(\frac{\partial T_{i\sigma}}{\partial r} - \frac{r}{\varrho}\frac{\partial T_{k\sigma}}{\partial r}\right) d\sigma - \int\int_{\mathfrak{A}} \left(T_{i\sigma} - \frac{r}{\varrho} T_{k\sigma}\right) \frac{\partial \Phi_\sigma}{\partial r}\, d\sigma .$$

Bezeichnet man die Entfernungen *selber* zwischen i, $d\sigma$ und k, $d\sigma$, respective mit $R_{i\sigma}$ und $R_{k\sigma}$, so ist bekanntlich, weil i, k *conjugirte* Punkte sind:

$$\frac{R_{i\sigma}}{\varrho} = \frac{R_{k\sigma}}{r}, \tag{3}$$

mithin:

$$\varrho\, T_{i\sigma} = r\, T_{k\sigma}. \tag{4}$$

Somit reducirt sich die Formel (2) auf

$$4\pi\Phi_i = -\int\int_{\mathfrak{A}} \Phi_\sigma \left(\frac{\partial T_{i\sigma}}{\partial r} - \frac{r}{\varrho}\frac{\partial T_{k\sigma}}{\partial r}\right) d\sigma. \tag{5}$$

Bezeichnet man mit ϑ den Winkel, unter welchem die Linie mik und die Linie $md\sigma$ (d. i. die von m nach dem Element $d\sigma$ gezogene Linie) gegen einander geneigt sind, so ist

$$T_{i\sigma} = \frac{1}{R_{i\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos\vartheta}},$$

$$T_{k\sigma} = \frac{1}{R_{k\sigma}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + \varrho'^2 - 2r\varrho'\cos\vartheta}}.$$

Hieraus folgt durch Differentiation und mit Benutzung der Relation (3):

$$\frac{\partial T_{i\sigma}}{\partial r} = \frac{-r + \varrho\cos\vartheta}{(R_{i\sigma})^3},$$

$$\frac{\partial T_{k\sigma}}{\partial r} = \frac{-r + \varrho'\cos\vartheta}{(R_{k\sigma})^3} = \left(\frac{\varrho}{r}\right)^3 \frac{-r + \varrho'\cos\vartheta}{(R_{i\sigma})^3}.$$

Diese Formeln können, weil $\varrho\varrho' = r^2$ ist, auch so dargestellt werden:

$$\frac{\partial T_{i\sigma}}{\partial r} = \frac{-r^2 + r\varrho\cos\vartheta}{r(R_{i\sigma})^3},$$

$$\frac{r}{\varrho}\frac{\partial T_{k\sigma}}{\partial r} = \frac{-\varrho^2 + r\varrho\cos\vartheta}{r(R_{i\sigma})^3}.$$

Hieraus endlich folgt durch Addition und Subtraction:

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial T_{i\sigma}}{\partial r} + \frac{r}{\varrho}\frac{\partial T_{k\sigma}}{\partial r} = -\frac{1}{rR_{i\sigma}} = -\frac{T_{i\sigma}}{r},$$

$$(\beta) \qquad \frac{\partial T_{i\sigma}}{\partial r} - \frac{r}{\varrho}\frac{\partial T_{k\sigma}}{\partial r} = -\frac{r^2 - \varrho^2}{r(R_{i\sigma})^3} = -\frac{(r^2 - \varrho^2)(T_{i\sigma})^3}{r}.$$

Benutzt man der Reihe nach einmal die Relation (α), das andere Mal die Relation (β), um $T_{k\sigma}$ in (5) zu eliminiren, so erhält man:

$$4\pi\Phi_i = -\int\int_{\mathfrak{A}} \Phi_\sigma \left(2\frac{\partial T_{i\sigma}}{\partial r} + \frac{T_{i\sigma}}{r}\right) d\sigma, \tag{6}$$

$$4\pi\Phi_i = +\int\int_{\mathfrak{A}} \Phi_\sigma \frac{(r^2 - \varrho^2)(T_{i\sigma})^3}{r}\, d\sigma. \tag{7}$$

Die Formel (7) ist bereits früher von mir aufgestellt worden, in meiner kleinen Schrift über den stationären Temperaturzustand einer homogenen Kugel (erschienen in Halle 1861, im Verlage von Schmidt, Seite 7). Gegenwärtig mag die Formel (6) in den Vordergrund gestellt werden; in derselben ist folgender Satz enthalten:

IV. Satz. Eine Function Φ *erfülle auf dem gegebenen Raume* $\mathfrak{T}$ *die Bedingungen* (Π)*; ferner sei* $\mathfrak{A}$ *irgend ein vollständig innerhalb* $\mathfrak{T}$ *liegender Kugelraum,* r *der Radius von* $\mathfrak{A}$*, und* $d\sigma$ *das Oberflächenelement von* $\mathfrak{A}$*.*

Sämmtliche Werthe, welche Φ *innerhalb* $\mathfrak{A}$ *besitzt, werden sich alsdann darstellen lassen durch folgendes über die Oberfläche von* $\mathfrak{A}$ *ausgedehnte Integral:*

$$\Phi_i = -\frac{1}{4\pi}\int\int_{\mathfrak{A}} \Phi_\sigma \left(2\frac{\partial T_{i\sigma}}{\partial r} + \frac{T_{i\sigma}}{r}\right) d\sigma .$$

Hier bezeichnet i *jeden beliebigen Punkt innerhalb* $\mathfrak{A}$*; ferner repräsentiren* Φ_i*,* Φ_σ *die Werthe der Function* Φ *in* i *und* $d\sigma$*, und* $T_{i\sigma}$ *die reciproke Entfernung des Elementes* $d\sigma$ *vom Punkte* i*.*

Hieraus ergeben sich sofort folgende weitere Sätze.

V. Satz. Genügt eine Function Φ *auf dem Raume* $\mathfrak{T}$ *den Bedingungen* (Π)*, und versteht man unter* $\mathfrak{A}$ *irgend einen vollständig innerhalb* $\mathfrak{T}$ *liegenden Kugelraum, so werden sich die Werthe, welche* Φ *innerhalb* $\mathfrak{A}$ *besitzt, jederzeit darstellen lassen durch eine convergente Reihenentwickelung.*

Ist i *irgend ein Punkt innerhalb* $\mathfrak{A}$*, und sind* $\varrho, \vartheta, \omega$ *die Polarcoordinaten von* i *in Bezug auf den Mittelpunkt von* $\mathfrak{A}$*, so ist diese Entwickelung von folgender Form:*

$$\Phi_i = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varrho^n Y^{(n)}(\vartheta, \omega),$$

wo unter $Y^{(n)}(\vartheta, \omega)$ *eine Kugelfunction* n^{ter} *Ordnung zu verstehen ist.*

VI. Satz. Ist von einer Function Φ *bekannt, dass sie auf einem gegebenem Raume* $\mathfrak{T}$ *die Bedingungen* (Π) *erfüllt, und ferner bekannt, dass sie auf irgend einem Raumtheile von* $\mathfrak{T}$ *constant ist, so wird sie constant sein in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{T}$*.*

§ 4.

Relationen zwischen den Werthen im Innern und an der Oberfläche eines gegebenen Raumes bei einer Function vom Charakter (Π).

Die Sätze des arithmetischen Mittels, nämlich der II. und III. Satz, können, falls man das arithmetische Mittel mit M bezeichnet, kurzweg angedeutet werden durch die Formel:

$$M = \Phi_m,$$

und durch die Formel:

$$M = \Gamma + \frac{K}{r}.$$

Es werden demnach diese Sätze vollkommen analog sein mit den *der Ebene* entsprechenden *Sätzen*, sobald nur K gleich *Null* ist. Andererseits ist zu bemerken, dass der über die Constanz einer Function handelnde VI. Satz bereits von Hause aus in vollständiger Analogie steht mit dem entsprechenden *Satz der Ebene*.

Unsere Untersuchungen in der *Ebene* über die Relationen zwischen den Werthen im Innern und am Rande einer Fläche stützten sich lediglich auf die eben genannten drei Sätze II, III, VI. Die hier anzustellenden entsprechenden Untersuchungen im *Raume* werden folglich in vollständig analoger Weise bewerkstelligt werden können, und in völlig analogen Resultaten ihren Abschluss finden, sobald nur vorausgesetzt wird, dass K gleich *Null* ist. — Beachtet man, dass jene Integralconstante K, ebenso wie die Convergenzconstante Γ, immer nur dann in Betracht kommen, wenn der gegebene Raum $\mathfrak{T}$ *unendlich* ist, so führt die eben angestellte Ueberlegung zu folgenden Ergebnissen.

VII. Satz. Erfüllt eine Function Φ auf einem endlichen Raume $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π), *oder erfüllt sie auf einem endlichen Raume $\mathfrak{T}$ die Bedingungen* (Π), ($K = 0$), *und bezeichnet man den grössten und den kleinsten Werth, welchen Φ an der Oberfläche von $\mathfrak{T}$ besitzt, mit G und K, so sind nur zwei Fälle möglich. Entweder ist Φ eine Constante, mithin überall $= G = K$. Oder es finden die Formeln statt:*

$$K < \Phi_i < G, \qquad K \leq \Phi_s \leq G,$$

erstere gültig für alle Punkte i, die innerhalb $\mathfrak{T}$, letztere gültig für alle Punkte s, die an der Oberfläche von $\mathfrak{T}$ sich befinden.

VIII. Satz. Erfüllt eine Function Φ auf einem endlichen Raume $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π), *oder erfüllt sie auf einem unendlichen Raume $\mathfrak{T}$ die Bedingungen* (Π), ($K = 0$), *und ist sie an der Oberfläche von $\mathfrak{T}$ constant, $= C$, so wird sie den Werth C besitzen in ganzer Erstreckung von $\mathfrak{T}$.*

In diesen beiden Sätzen findet sich, mit Bezug auf den Fall eines *unendlichen* Raumes $\mathfrak{T}$, die Voraussetzung vor, dass der Werth der *Integralconstanten* K bekannt und zwar $= 0$ ist. Es mag nun andererseits untersucht werden, zu welchem Resultat man gelangt, wenn jene Integralconstante als unbekannt, als bekannt hingegen die *Convergenzconstante* Γ angesehen wird.

Wir nehmen also an, eine Function Φ erfülle auf einem *unendlichen* Raume $\mathfrak{T}$ die Bedingungen (Π), und es wären bekannt einer-

seits der grösste und kleinste Werth, G und K, welche Φ an der Oberfläche von $\mathfrak{T}$ besitzt, andererseits die der Function Φ zugehörige Convergenzconstante Γ. Die Beziehung zwischen diesen Constanten G, K, Γ kann sehr verschieden sein, nämlich ausgedrückt sein entweder durch:

$$K \leqq \Gamma \leqq G,$$

oder durch:

$$\Gamma < K \leqq G,$$

oder durch:

$$K \leqq G < \Gamma.$$

In jedem Falle mag das durch diese drei Constanten markirte Intervall bezeichnet werden mit

$$(1) \qquad Q \ldots\ldots P,$$

sodass im ersten Fall $Q = K$, $P = G$, im zweiten $Q = \Gamma$, $P = G$, im dritten $Q = K$, $P = \Gamma$ ist.

Bei den anzustellenden Betrachtungen mag nun der grösseren Bequemlichkeit willen der Fall ausgeschlossen werden, dass die Function Φ eine Constante ist. Alsdann wird sich nachweisen lassen, dass der Werth von Φ in jedem beliebigen Punkte i, der *innerhalb* $\mathfrak{T}$ liegt, nothwendig grösser als Q und kleiner als P ist.

Um den betrachteten Punkt i, *der also innerhalb* $\mathfrak{T}$ *völlig beliebig gewählt sein soll*, werde ein vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegender Kugelraum beschrieben. Da der Fall $\Phi = \text{Const.}$ excludirt ist, so kann Φ an der Oberfläche dieses Kugelraumes nicht überall constant sein; denn sonst würde Φ constant sein in Erstreckung des Kugelraumes (VIII. Satz), mithin auch constant sein in Erstreckung des ganzen gegebenen Raumes $\mathfrak{T}$ (VI. Satz). Bezeichnen also Φ_x und Φ_y den grössten und kleinsten Werth, welchen die Function Φ an der Oberfläche des Kugelraumes besitzt, nämlich x und y diejenigen Punkte, in denen diese Werthe sich vorfinden, so wird (zufolge des VII. Satzes) nothwendig die Relation stattfinden:

$$(2) \qquad \Phi_y < \Phi_i < \Phi_x,$$

falls man nämlich unter Φ_i denjenigen Werth versteht, welchen Φ besitzt im Punkte i, d. i. im Centrum des Kugelraumes.

Wie klein nun die durch (2) constatirten Differenzen zwischen Φ_y, Φ_i, Φ_x auch sein mögen, nothwendig muss eine *positive Zahl* δ von solcher Kleinheit angebbar sein, dass neben der Formel (2) gleichzeitig auch noch folgende stattfindet:

$$(3) \qquad \Phi_y + \delta < \Phi_i < \Phi_x - \delta.$$

Es werde nun um i mit sehr grossem Radius ein vollständig innerhalb $\mathfrak{T}$ liegender Kugelergänzungsraum $\mathfrak{B}$ construirt von solcher Ferne, dass sämmtliche in Erstreckung dieses Raumes vorhandenen

Werthe von Φ *um weniger als* $\frac{\delta}{2}$ von der Convergenzconstanten Γ abweichen. Ist σ' die den Raum $\mathfrak{B}$ begrenzende Kugelfläche, und bezeichnen G' und K' den grössten und kleinsten Werth, welchen Φ auf der Fläche σ' besitzt, so wird alsdann die Relation stattfinden:

$$\Gamma - \tfrac{\delta}{2} < K' \leqq G' < \Gamma + \tfrac{\delta}{2}. \tag{4}$$

Oder mit anderen Worten: das Intervall

$$K' \ldots\ldots G' \tag{5}$$

wird alsdann nothwendiger Weise sich befinden *innerhalb* des Intervalles:

$$\Gamma - \tfrac{\delta}{2} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \Gamma + \tfrac{\delta}{2}. \tag{6}$$

Dieses letztere Intervall befindet sich aber nothwendig *in Erstreckung* des Intervalles:

$$Q - \tfrac{\delta}{2} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot P + \tfrac{\delta}{2}, \tag{7}$$

wie aus der zuvor [nämlich bei (1)] für $Q \ldots\ldots P$ gegebenen Definition augenblicklich folgt. Hieraus aber ergiebt sich, dass das Intervall (5) *innerhalb* des Intervalles (7) liegt.

Innerhalb des Intervalles (7) befinden sich, wie aus der Definition von $Q \ldots\ldots P$ folgt, die Grössen G, K; und *innerhalb* desselben Intervalles befinden sich, wie wir gegenwärtig sehen, also auch die Grössen G', K'. Mit Bezug auf den Raum $(\mathfrak{T} - \mathfrak{B})$ wird daher zu bemerken sein, dass der grösste und der kleinste von denjenigen Werthen, welche Φ an der Oberfläche des Raumes $(\mathfrak{T} - \mathfrak{B})$ besitzt, nothwendig *innerhalb* des Intervalles (7) liegen. Gleiches gilt daher (VII. Satz) auch von demjenigen Werthe, welchen Φ in irgend einem *innerhalb* des Raumes $(\mathfrak{T} - \mathfrak{B})$ gelegenen Punkte, z. B. in x oder y besitzt. Denn stillschweigend ist vorausgesetzt worden, der Kugelergänzungsraum $\mathfrak{B}$ sei von solcher Ferne, dass x und y *ausserhalb* desselben, mithin *innerhalb* des Raumes $(\mathfrak{T} - \mathfrak{B})$ sich befinden. Somit ergiebt sich:

$$Q - \tfrac{\delta}{2} < \Phi_y < \Phi_x < P + \tfrac{\delta}{2}. \tag{8}$$

Zufolge dieser Formel kann in (3) $Q - \frac{\delta}{2}$ statt Φ_y, und $P + \frac{\delta}{2}$ statt Φ_x substituirt werden. Hierdurch aber ergiebt sich:

$$\left(Q - \tfrac{\delta}{2}\right) + \delta < \Phi_i < \left(P + \tfrac{\delta}{2}\right) - \delta,$$

d. i.:

$$Q + \tfrac{\delta}{2} < \Phi_i < P - \tfrac{\delta}{2}; \tag{9}$$

und hieraus endlich folgt sofort:

$$Q < \Phi_i < P, \tag{10}$$

w. z. b. w. — Nehmen wir nun nachträglich noch Rücksicht auf den bisher excludirten Fall $\Phi = \text{Const.}$, so gelangen wir zu folgendem Ergebniss, welches bezeichnet werden kann als eine

Ergänzung des VII. Satzes. Es sei Φ *irgend eine Function, welche auf einem gegebenen unendlichen Raume* $\mathfrak{T}$ *die Bedingungen* (Π) *erfüllt; ihre Convergenzconstante heisse* Γ*; ferner mögen* G *und* K *den grössten und kleinsten Werth bezeichnen, welche* Φ *an der Oberfläche von* $\mathfrak{T}$ *besitzt; von den drei Zahlen* G, K, Γ *werde endlich die grösste mit* P, *die kleinste mit* Q *benannt. Alsdann sind immer nur zwei Fälle möglich. Entweder ist* Φ *eine Constante, mithin überall* $= G = K = \Gamma = P = Q$. *Oder es finden die Relationen statt:*

$$Q < \Phi_i < P, \qquad Q \leqq \Phi_s \leqq P,$$

erstere gültig für alle Punkte i, *die innerhalb* $\mathfrak{T}$, *letztere gültig für alle Punkte* s, *die an der Oberfläche von* $\mathfrak{T}$ *sich befinden.*

Der *zweite* von diesen Fällen kann offenbar, wie aus der Formel

$$Q < \Phi_i < P$$

folgt, nur dann eintreten, wenn $Q < P$ ist, also nur dann, wenn die Zahlen G, K, Γ *nicht* alle drei zusammenfallen zu einer einzigen Zahl. Denkt man sich also eine Function Φ, bei welcher $G = K = \Gamma$ ist, so muss bei derselben nothwendig der *erste* Fall eintreten. Somit ergiebt sich folgende

Ergänzung des VIII. Satzes. Erfüllt eine Function Φ *auf einem gegebenen unendlichen Raume* $\mathfrak{T}$ *die Bedingungen* (Π), *und sind ihre Werthe an der Oberfläche von* $\mathfrak{T}$ *constant, und zwar identisch mit der der Function zugehörigen Convergenzconstanten* Γ, *so wird die Function constant sein in ganzer Erstreckung von* $\mathfrak{T}$.

Mit Hülfe des VIII. Satzes selber und mit Hülfe des eben gefundenen Ergänzungssatzes gelangt man nunmehr leicht zu folgendem Resultat von hervorragender Wichtigkeit:

IX. Satz. Eine Function Φ, *welche auf einem gegebenen Raum* $\mathfrak{T}$ *die Bedingungen* (Π) *erfüllen soll, wird, falls* $\mathfrak{T}$ *endlich ist, vollständig bestimmt sein durch Angabe ihrer Werthe an der Oberfläche von* $\mathfrak{T}$. *Ist hingegen* $\mathfrak{T}$ *unendlich, so wird sie erst dann vollständig bestimmt sein, wenn ausser jenen Oberflächen-Werthen gleichzeitig auch noch eine ihrer beiden Constanten, die Convergenzconstante oder die Integralconstante, gegeben ist.*

Leipzig, 24. Novbr. 1870.

Ueber die Jacobi-Hamilton'sche Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Von A. Mayer in Leipzig.

Nachdem Pfaff gezeigt hatte, dass man die Lösung einer jeden partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zurückführen kann auf die Integration mehrerer Systeme gewöhnlicher Differentialgleichungen, erhielt diese Theorie den nächsten wesentlichen Fortschritt durch die Arbeiten von Cauchy*) und Jacobi**), welche beide auf sehr verschiedenen Wegen zu der nämlichen Vereinfachung der Pfaff'schen Resultate gelangten und zeigten, dass die vollständige Integration des ersten Pfaff'schen Systems allein schon hinreicht, um eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung zu erhalten.

Jacobi, der diesen Satz durch Verallgemeinerung der Hamilton'schen mechanischen Entdeckungen fand, wesshalb er selbst sein Verfahren die Hamilton'sche Methode nennt, hat denselben in etwas veränderter Form und Beweisführung wiedergegeben in den Vorlesungen über Dynamik***) und hier besonders ist die Art der Ableitung weit einfacher und kürzer, als bei dem von Cauchy eingeschlagenen Wege. Die Jacobi'sche Methode hat überdies vor der Cauchy'schen das voraus, dass sie nicht nur zu einer vollständigen Lösung der partiellen Differentialgleichung führt, sondern zu gleicher Zeit auch lehrt, wie man aus dieser Lösung durch blosse partielle Differentiation die sämmtlichen Integralgleichungen des entsprechenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erhalten kann. Allein, während sich der Cauchy'schen Methode, wenn dieselbe nur in richtiger Weise zur Auffindung einer vollständigen Lösung benutzt wird, ohne Ausnahme alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung fügen, entdeckt man bei genauerer Betrachtung der Jacobi'schen Regel, zumal in ihrer späteren Fassung, sehr bald Klassen von solchen Gleichungen, die sich der Integration durch dieselbe vollständig entziehen.

*) Exercices d'Analyse et de Physique mathématique, t. II.

**) Crelle, J. 17.

***) 19. Vorlesung, sowie namentlich p. 364.

Nun hat zwar später Jacobi durch seine grossartige „neue Methode" (Crelle J. 60) alle früheren Integrationsmethoden der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung sehr bedeutend in den Schatten gestellt. Nichts destoweniger bleibt jene ältere Jacobi'sche Methode immerhin noch höchst interessant, einmal weil sie in der Ableitung die kürzeste ist, dann aber hauptsächlich desshalb, weil sie den natürlichsten Ausgangspunkt für die ganze Jacobi-Hamilton'sche Theorie bildet.

Aus diesem Grunde schien es mir wünschenswerth zu versuchen, ob man die genannte Methode nicht so modificiren könnte, dass sich ihr alle partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung unterordnen lassen, und diese Modification fand sich durch directe Anwendung der Vorschrift, welche Cauchy zur Ableitung der *allgemeinen* Lösung gegeben hat, auf die einfachere Aufgabe, eine *vollständige* Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x, x_1, \cdots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0$$

zu finden.

Es ist nur nöthig, Gleichungen von dieser Form zu betrachten; denn man kann jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche die unbekannte Function selbst enthält, zurückführen auf eine solche, in welcher die unbekannte Function nicht mehr explicite auftritt.

Ist nämlich:

$$F\left(x_1, \cdots x_n, x, \frac{\partial x}{\partial x_1}, \cdots \frac{\partial x}{\partial x_n}\right) = 0$$

die vorgelegte partielle Differentialgleichung, so braucht man zu diesem Ende nur, anstatt direct auf die Bestimmung von x auszugehen, zunächst indirect nach einer Gleichung zu fragen, aus der sich die gesuchte Lösung x algebraisch bestimmt.

In der That, wenn man sich diese Lösung durch eine Gleichung von der Form

$$V(x_1, \ldots x_n, x) = \text{Const.}$$

definirt denkt, so muss die Function V identisch der Gleichung genügen:

$$F\left(x_1, \ldots x_n, x, -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_1}}{\frac{\partial V}{\partial x}}, \cdots, -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_n}}{\frac{\partial V}{\partial x}}\right) = 0;$$

und wenn man umgekehrt irgend eine Lösung V dieser letzteren Gleichung gefunden hat, so ist der aus der Substitution

$$V = \text{Const.}$$

sich ergebende Werth von x eine Lösung der gegebenen Gleichung. Denn für denselben ist:

$$\frac{\partial x}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial V}{\partial x_i}}{\frac{\partial V}{\partial x}}. \quad *)$$

Angewandt nun auf partielle Differentialgleichungen erster Ordnung, welche die unbekannte Function selbst nicht enthalten, hat Jacobi in den Vorlesungen über Dynamik p. 364 seiner Hamilton'schen Methode die folgende Fassung gegeben:

Wenn die Aufgabe vorliegt, eine vollständige Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x, x_1 \cdots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0 \tag{1}$$

zu finden, so stelle man zunächst, indem man resp.

$$p_1 \cdots p_n \quad \text{für} \quad \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}$$

schreibt, das folgende System von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung auf

$$\frac{dx_k}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_k} \tag{2}$$

und integrire dasselbe vollständig. Man führe hierauf die Werthe

$$a_1 \ldots a_n, \; b_1 \ldots b_n$$

der Grössen

$$x_1 \ldots x_n, \; p_1 \ldots p_n$$

für den beliebig gewählten Anfangswerth a von x statt der willkürlichen Constanten in die Integralgleichungen dieses Systems ein und drücke endlich vermittelst dieser Gleichungen das Integral

$$V = \int_a^x dx \left[\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H\right] \tag{3}$$

durch die Grössen $x, x_1 \ldots x_n, a, a_1 \ldots a_n$ aus. Man hat dann die $2n$ Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = p_k, \quad \frac{\partial V}{\partial a_k} = -b_k, \tag{4}$$

welche man als die vollständigen Integralgleichungen des Systems (2) betrachten kann, und zugleich ist der angegebene Ausdruck von V, wenn man ihm noch eine willkürliche additive Constante hinzufügt, eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (1).

---

*) Jacobi hat merkwürdiger Weise diese von ihm selbst (Crelle J. 23., p. 18) angegebene Zurückführungsart später wieder verlassen und dieselbe in seiner grossen Abhdlg. (Crelle J. 60., p. 1) durch eine andere ersetzt, die zwar für gewisse Transformationen sehr nützlich sein kann, aber als directe Reductionsmethode illusorisch ist. Vgl. hierüber Imschenetsky (Grunert's Archiv T 50. p. 315).

Man sieht unmittelbar ein, dass dieser Satz Ausnahmen unterworfen ist. So oft z. B. H in Bezug auf $p_1 \dots p_n$ eine homogene Function erster Ordnung ist — und dieser Fall tritt immer dann ein, wenn man die Gleichung (1) auf die oben angegebene Weise aus einer partiellen Differentialgleichung erhalten hat, in der die unbekannte Function selbst vorkam —, liefert derselbe an Stelle der gesuchten Lösung nur den ganz unbrauchbaren Werth $V = 0$, der unmöglich auf die vollständigen Integralgleichungen des Systems (2) führen kann.

Ich will zunächst den wahren Grund dieser Ausnahmen aufzudecken suchen und zu diesem Ende in § 1. die Jacobi'sche Schlussweise einer näheren Prüfung unterwerfen. Daran wird sich in § 2. die Auseinandersetzung der neuen, durch keinerlei Ausnahmen mehr beschränkten, Jacobi-Hamilton'schen Integrationsmethode reihen. Ich bemerke ausdrücklich, dass diese nur ein specieller Fall, und zwar der einfachste, der allgemeineren Cauchy'schen Methode ist. Auch Cauchy selbst hat unter allen den vollständigen Lösungen, auf die man durch sein Verfahren kommen kann, eine besonders hervorgehoben als die einfachste, aber eine andere: die Hamilton'sche Lösung. Dies ist nicht genau. Die Ableitung der allgemeinen Cauchy'schen Methode durch die Jacobi'schen Principien in § 3. wird zeigen, dass die consequente Anwendung dieser Methode niemals zu der Hamilton'schen Lösung führen kann. Einige Sätze über die Bestimmung der Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung durch eine Grenzbedingung werden schliesslich andeuten, wie man auch direct von der Methode des § 2. zu der allgemeineren von Cauchy gelangen kann.

§ 1.

Der Jacobi'sche Beweis des angeführten Satzes beruht im Wesentlichen auf Folgendem:

Indem man die Anfangswerthe $a_1 \dots a_n\ b_1 \dots b_n$ variirt und die hieraus entspringenden Variationen durch die Charakteristik δ bezeichnet, gelangt man direct aus der Definitionsgleichung (3) durch eine leichte Rechnung, die ich hier übergehe, weil sie sich ganz ähnlich im folgenden § wiederfindet, zu der Formel:

$$\delta V = \sum_{k=1}^{k=n} (p_k \delta x_k - b_k \delta a_k).$$

Indirect aber erhält man, wenn man V zunächst als Function der Grössen $x_1 \dots x_n\ a_1 \dots a_n$ betrachtet:

$$\delta V = \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial V}{\partial x_k} \delta x_k + \frac{\partial V}{\partial a_k} \delta a_k \right).$$

Man hat folglich für alle beliebigen Werthe der Variationen

$$\delta a_1 \dots \delta a_n \; \delta b_1 \dots \delta b_n$$

die Identität:

$$\sum_{k=1}^{k=n} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x_k} - p_k \right) \delta x_k + \left(\frac{\partial V}{\partial a_k} + b_k \right) \delta a_k \right] = 0.$$

Aus dieser Formel folgert nun Jacobi ohne Weiteres die Gleichungen (4). Allein dieser Schluss ist nur dann richtig, wenn die Variationen

$$\delta x_1 \dots \delta x_n, \quad \delta a_1 \dots \delta a_n$$

ebenso unabhängig von einander sind, wie die ursprünglichen

$$\delta a_1 \dots \delta a_n, \quad \delta b_1 \dots \delta b_n,$$

und da, wenn man sämmtliche $\delta a = 0$ setzt:

$$\delta x_k = \frac{\partial x_k}{\partial b_1} \delta b_1 + \dots \frac{\partial x_k}{\partial b_n} \delta b_n$$

wird, so besteht diese Unabhängigkeit nur dann, wenn die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial x_1}{\partial b_1} \frac{\partial x_2}{\partial b_2} \dots \frac{\partial x_n}{\partial b_n}$$

nicht Null ist, d. h. wenn sich die n Constanten $b_1 \dots b_n$ aus den n Lösungen $x_1 \dots x_n$ sämmtlich bestimmen lassen, oder m. a. W., wenn sich die $2n$ willkürlichen Constanten der vollständigen Integralgleichungen des Systems (2) ausdrücken lassen durch die Anfangs- und Endwerthe der Variabeln $x\, x_1 \dots x_n$ allein.

Dies findet nun zwar immer statt, wenn die Function H die Eigenschaft besitzt, dass die Determinante

$$\Sigma \pm \frac{\partial^2 H}{\partial p_1 \partial p_1} \frac{\partial^2 H}{\partial p_2 \partial p_2} \dots \frac{\partial^2 H}{\partial p_n \partial p_n}$$

nicht Null ist. Denn dann bestimmen die n Gleichungen:

$$\frac{\partial H}{\partial p_k} = \frac{dx_k}{dx}$$

die sämmtlichen n Grössen $p_1 \dots p_n$ als Functionen von

$$x, \; x_1 \dots x_n, \; \frac{dx_1}{dx} \dots \frac{dx_n}{dx}$$

und daher lässt sich in diesem Falle das System von $2n$ Differentialgleichungen erster Ordnung (2) stets zurückführen auf ein System von n Differentialgleichungen zweiter Ordnung zwischen $x_1 \dots x_n$ und x allein, dessen vollständige Integration nothwendig $2n$ willkürliche Constanten mit sich bringen muss.

Wenn dagegen jene Determinante Null ist, so lassen sich aus den obigen n Gleichungen die Grössen $p_1 \dots p_n$ vollständig eliminiren und es besteht also zwischen den Variabeln $x_1 \dots x_n$ und ihren ersten Differentialquotienten eine von willkürlichen Constanten freie Relation,

daher im Allgemeinen die vollständigen Lösungen $x_1 \dots x_n$ gar nicht mehr $2n$ willkürliche Constanten enthalten werden. Wenn z. B. H linear ist in Bezug auf $p_1 \dots p_n$, so kommen in diesen Lösungen nur n willkürliche Constanten vor.

Sobald man aber kein Recht mehr hat, die Gleichungen:

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = p_k$$

anzusetzen, so fällt damit auch die Berechtigung zu der Folgerung

$$\frac{\partial V}{\partial x} + H = 0$$

weg. Denn diese Gleichung ergiebt sich aus der doppelten Ausdrucksweise des Differentialquotienten der Function V:

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{dx_k}{dx} - H \quad \text{und}$$

$$\frac{dV}{dx} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{\partial V}{\partial x_k} \frac{dx_k}{dx} + \frac{\partial V}{\partial x}$$

eben nur in Folge jener Gleichungen.

Man sieht also, die Jacobi'sche Beweisführung implicirt stillschweigend eine Voraussetzung, die nicht für jede beliebige Function H erfüllt ist, und daher ist es von vornherein klar, dass die Jacobi'sche Regel nicht eine allgemein gültige Integrationsmethode für die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung liefern kann.

§ 2.

Nachdem somit die Unzulänglichkeit der Jacobi-Hamilton'schen Methode und der Grund ihrer Mängel dargelegt worden ist, will ich jetzt zeigen, wie man durch eine sehr geringe Abänderung der Jacobi'schen Schlussweise zu einer ganz allgemeinen Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung gelangen kann. Der Deutlichkeit halber werde ich hierbei etwas ausführlicher zu Werke gehen als vorhin.

Es sei:

$$H = H(x, x_1 \dots x_n, p_1 \dots p_n)$$

eine beliebig gegebene Function der $2n + 1$ Variabeln $x\ x_1 \dots x_n$ $p_1 \dots p_n$ und zwischen diesen Variabeln die folgenden $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben:

$$(1) \qquad \frac{dx_k}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}.$$

Man habe diese Gleichungen vollständig integrirt und, nachdem man die $2n$ Integrationsconstanten ausgedrückt durch die Werthe

$$a_1 \dots a_n \quad b_1 \dots b_n,$$

welche die Variabeln

$$x_1 \dots x_n \quad p_1 \dots p_n$$

für den beliebig gewählten Anfangswerth a von x annehmen, gefunden:

$$x_k = [x_k] \quad , \quad p_k = [p_k], \tag{2}$$

wo also die $[x_k]$ und $[p_k]$ bestimmte Functionen von $x\ a\ a_1 \dots a_n\ b_1 \dots b_n$ sind, die sich für $x = a$ resp. auf a_k und b_k reduciren.

Des bessern Verständnisses wegen werde die Substitution der Lösungen (2) durch Einschliessung in eckige Klammern angedeutet.

Die Determinante:

$$\Sigma \pm \frac{\partial [x_1]}{\partial a_1} \frac{\partial [x_2]}{\partial a_2} \dots \frac{\partial [x_n]}{\partial a_n}$$

kann nie Null sein; denn für $x = a$ erhält sie den Werth 1. Hieraus folgt, dass sich die n Gleichungen

$$[x_k] = x_k \tag{3}$$

immer auflösen lassen müssen nach den n Grössen $a_1 \dots a_n$.

Dies vorausgeschickt berechne man durch einfache Quadratur den Ausdruck:

$$V = \sum_{k=1}^{k=n} a_k b_k + \int_a^x \left[\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H \right] dx \tag{4}$$

als Function von $x\ a\ a_1 \dots a_n\ b_1 \dots b_n$.

Durch Differentiation dieses Ausdruckes nach c, worunter irgend eine beliebige der Constanten a_k oder b_k verstanden wird, erhält man zunächst:

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \sum_{k=1}^{k=n} a_k b_k + \int_a^x dx \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ [p_k] \frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{\partial H}{\partial p_k} \right] - \left[\frac{\partial H}{\partial x_k} \right] \frac{\partial [x_k]}{\partial c} \right\}.$$

In Folge der Gleichungen (1) ist aber identisch:

$$\left[\frac{\partial H}{\partial x_k} \right] = - \frac{d[p_k]}{dx} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial}{\partial c} \left[\frac{\partial H}{\partial p_k} \right] = \frac{\partial}{\partial c} \frac{d[x_k]}{dx} = \frac{d}{dx} \frac{\partial [x_k]}{\partial c}.$$

Der Ausdruck unter dem Integralzeichen wird hiernach:

$$= \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ [p_k] \frac{d}{dx} \frac{\partial [x_k]}{\partial c} + \frac{d[p_k]}{dx} \frac{\partial [x_k]}{\partial c} \right\}$$

$$= \frac{d}{dx} \sum_{k=1}^{k=n} [p_k] \frac{\partial [x_k]}{\partial c}$$

und man findet daher durch Ausführung der Integration:

$$\frac{\partial V}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c} \sum_{k=1}^{k=n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{k=n} \left\{ [p_k] \frac{\partial [x_k]}{\partial c} - b_k \frac{\partial a_k}{\partial c} \right\}.$$

Indem man hierin erst $c = a_i$ und dann $c = b_i$ setzt, ergiebt sich:

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = \sum_{k=1}^{k=n} [p_k] \frac{\partial [x_k]}{\partial a_i}$$

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = a_i + \sum_{k=1}^{k=n} [p_k] \frac{\partial [x_k]}{\partial b_i}.$$

Andererseits, wenn man in der Function V für die Grössen $a_1 \dots a_n$ ihre Werthe aus den Gleichungen (3) einsetzt, so verwandelt sich dieselbe in eine Function von $x\, x_1 \dots x_n\, b_1 \dots b_n$, die durch (V) bezeichnet werden mag und aus der man rückwärts wieder die ursprüngliche Function V erhält, wenn man für $x_1 \dots x_n$ die Werthe (3) setzt. Man hat daher auch:

$$\frac{\partial V}{\partial a_i} = \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\partial (V)}{\partial x_k}\right] \frac{\partial [x_k]}{\partial a_i}$$

$$\frac{\partial V}{\partial b_i} = \left[\frac{\partial (V)}{\partial b_i}\right] + \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\partial (V)}{\partial x_k}\right] \frac{\partial [x_k]}{\partial b_i},$$

hieraus folgt durch Vergleichung mit den früheren Werthen, dass identisch

$$(5) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\partial (V)}{\partial x_k} - p_k\right] \frac{\partial [x_k]}{\partial a_i} = 0$$

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\partial (V)}{\partial x_k} - p_k\right] \frac{\partial [x_k]}{\partial b_i} + \left[\frac{\partial (V)}{\partial b_i}\right] - a_i = 0$$

sein muss.

Die Gleichung (5) repräsentirt für $i = 1, 2, \dots n$ ein System von n Gleichungen, die linear und homogen sind in Bezug auf die n Grössen:

$$\left[\frac{\partial (V)}{\partial x_k} - p_k\right].$$

Die Determinante dieses Systems ist nach dem Früheren nicht Null. Das System kann daher nicht anders bestehen, als indem einzeln

$$\left[\frac{\partial (V)}{\partial x_k} - p_k\right] = 0$$

ist, woraus dann nach (6) folgt, dass ebenso auch:

$$\left[\frac{\partial (V)}{\partial b_i}\right] - a_i = 0$$

sein muss.

Man sieht somit, dass die vollständigen Lösungen (2) des Systems (1) den $2n$ Gleichungen identisch genügen müssen:

$$(7) \qquad \frac{\partial (V)}{\partial x_k} = p_k$$

$$(8) \qquad \frac{\partial (V)}{\partial b_k} = a_k.$$

Diese Gleichungen sind an sich nicht identisch; denn die Grössen p_k und a_k kommen linker Hand gar nicht vor; sie sind folglich Integral-

gleichungen des Systems (1). Weiter ist ihre Anzahl $2n$ und sie enthalten $2n$ willkürliche Constante, nämlich die $2n$ Anfangswerthe $a_1 \dots a_n\ b_1 \dots b_n$. Endlich kann nicht irgend eine der Gleichungen (7) und (8) eine Folge der übrigen sein; denn in jeder kommt eine Grösse p_k oder a_k vor, die in allen übrigen fehlt.

Die Gleichungen (7) und (8) bilden daher ein System vollständiger Integralgleichungen der Differentialgleichungen (1).

In derselben doppelten Weise, in der wir die partiellen Differentialquotienten von V nach a_i und b_i bildeten, können wir nun auch den Differentialquotienten dieser Function nach x bilden. Aus der Definition (4) ergiebt sich direct:

$$\frac{dV}{dx} = \left[\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H\right].$$

Andrerseits erhält man indirect aus der Function (V), wenn man sich darin für $x_1 \dots x_n$ die Werthe (3) substituirt denkt:

$$\frac{dV}{dx} = \left[\frac{\partial(V)}{\partial x}\right] + \sum_{k=1}^{k=n} \left[\frac{\partial(V)}{\partial x_k}\right] \frac{d[x_k]}{dx},$$

oder nach (1) und (7)

$$\frac{dV}{dx} = \left[\frac{\partial(V)}{\partial x} + \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k}\right].$$

Die Subtraction dieser beiden Formeln zeigt, dass die vollständigen Lösungen des Systems (1) auch noch die Gleichung identisch erfüllen müssen:

$$0 = \frac{\partial(V)}{\partial x} + H.$$

Hierfür kann man nach (7) schreiben:

$$(9) \qquad 0 = \frac{\partial(V)}{\partial x} + H\left(x, x_1 \dots x_n, \frac{\partial(V)}{\partial x_1} \dots \frac{\partial(V)}{\partial x_n}\right).$$

Von dieser Gleichung, in der die Variabeln p gar nicht mehr vorkommen, wissen wir zunächst nur, dass sie durch Substitution der Werthe (3) von $x_1 \dots x_n$ identisch erfüllt werden muss. Indem man aber in die solcher Art entstehende Identität, die für alle beliebigen Werthe der a_k und b_k Statt hat, den n Grössen $a_1 \dots a_n$ die aus den Gleichungen (3) folgenden Werthe zuertheilt, wird diese Substitution wiederum aufgehoben, woraus erhellt, dass die Gleichung (9) an sich identisch sein muss.

Die Function (V) genügt demnach der partiellen Differentialgleichung (9) und zwar ist dieselbe, wenn man ihr noch eine willkürliche Constante durch Addition zufügt, eine vollständige Lösung dieser Gleichung. Denn sie enthält n willkürliche Constanten $b_1 \dots b_n$ und diese lassen sich aus den partiellen Differentialquotienten:

$$\frac{\partial(V)}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial(V)}{\partial x_2}, \quad \dots \frac{\partial(V)}{\partial x_n}$$

nicht eliminiren, weil sonst eine der n Gleichungen (7) eine Folge der übrigen sein müsste.

Fasst man die erhaltenen Resultate zusammen, so ergiebt sich der folgende, allgemein gültige Satz:

I. *Wenn es sich darum handelt, die gegebene partielle Differentialgleichung erster Ordnung:*

$$(\alpha) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x,\ x_1 \dots x_n,\ \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0$$

vollständig zu lösen, so schreibe man in der Function H allgemein:

$$p_k \quad \text{statt} \quad \frac{\partial V}{\partial x_k}$$

und bilde mit dieser Function von $x\, x_1 \dots x_n\, p_1 \dots p_n$ das System von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen:

$$(\beta) \qquad \frac{dx_k}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_k}\ , \quad \frac{dp_k}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}.$$

Hat man dies System vollständig integrirt und die $2n$ Integrationsconstanten seiner Lösungen ausgedrückt durch die Werthe:

$$a_1 \dots a_n\ b_1 \dots b_n$$

der Grössen

$$x_1 \dots x_n\ p_1 \dots p_n$$

für den beliebig gewählten Werth a von x, so substituire man diese Lösungen in den Ausdruck:

$$\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H$$

und berechne durch einfache Quadratur

$$V = \sum_{k=1}^{k=n} a_k b_k + \int_a^x dx \left[\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H\right]$$

als Function von $x\, a_1 \dots a_n\ b_1 \dots b_n$. Eliminirt man schliesslich aus dieser Function mittelst der gefundenen Werthe von $x_1 \dots x_n$ die Grössen $a_1 \dots a_n$ und bezeichnet die resultirende Function von $x\, x_1 \dots x_n\, b_1 \dots b_n$ durch (V), so liefert die Formel:

$$V = (V) + \text{Const.}$$

eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung (α) und zugleich hat man in den $2n$ Gleichungen

$$\frac{\partial (V)}{\partial x_k} = p_k\ , \quad \frac{\partial (V)}{\partial b_k} = a_k$$

die vollständigen Integralgleichungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen (β).

Wendet man diesen Satz auf eine partielle Differentialgleichung von der Form an

$$\frac{\partial z}{\partial x} + F\left(z,\ x,\ x_1 \cdots x_n,\ \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0,$$

nachdem man dieselbe zuvor auf die oben angegebene Weise zurückgeführt hat auf eine Gleichung, in welcher die unbekannte Function nicht mehr vorkommt, so wird man auf den folgenden allgemeinen Satz geführt, durch den das nur in beschränktem Masse gültige Theorem V von p. 366 der Jacobi'schen Vorlesungen zu ersetzen ist, und den man leichter direct auf dem dort eingehaltenen Wege beweist:

II. *Es sei:*

$$F(z,\ x,\ x_1 \ldots x_n,\ p_1 \ldots p_n)$$

eine beliebig gegebene Function der $2n + 2$ *Grössen* $z,\ x,\ x_1 \ldots x_n,\ p_1 \ldots p_n$ *und zwischen denselben folgendes System von* $2n + 1$ *gewöhnlichen Differentialgleichungen gegeben:*

$$\frac{dx_k}{dx} = \frac{\partial F}{\partial p_k}\ ,\quad \frac{dp_k}{dx} = -\frac{\partial F}{\partial x_k} - p_k \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$\frac{dz}{dx} = \sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial F}{\partial p_k} - F.$$

Man habe dieses System vollständig integrirt und in den $2n + 1$ *Integralgleichungen statt der willkürlichen Constanten die Werthe*

$$a_1 \ldots a_n \quad b_1 \ldots b_n \quad \text{und} \quad c$$

eingeführt, welche resp. die Grössen

$$x_1 \ldots x_n \quad p_1 \ldots p_n \quad \text{und} \quad z - (x_1 p_1 + \cdots x_n p_n)$$

für den beliebig gewählten Anfangswerth a von x erhalten. Drückt man dann vermittelst der Integralgleichungen die Grösse z durch $x,\ x_1 \ldots x_n,$ $a,\ b_1 \ldots b_n,\ c$ *allein aus, so ist der erhaltene Ausdruck:*

$$z = Z$$

eine vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{\partial z}{\partial x} + F\left(z,\ x,\ x_1 \ldots x_n,\ \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0,$$

und zugleich sind die $2n + 1$ *Gleichungen:*

$$\frac{\partial Z}{\partial x_k} = p_k\ ,\quad \frac{\partial Z}{\partial b_k} = \frac{\partial Z}{\partial c}\, a_k$$

$$z = Z$$

die vollständigen Integralgleichungen der obigen gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Endlich, wenn man diesen Satz auf eine partielle Differentialgleichung in der unaufgelösten Form

$$\varphi\left(x_1 \ldots x_n,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0$$

anwendet, so gelangt man zu dem folgenden Satze, welcher der ersten Fassung der Jacobi-Hamilton'schen Methode (Crelle's J. 17) zu substituiren ist:

III. *Es sei:*

$$\varphi\,(x_1 \ldots x_n,\ z,\ p_1 \ldots p_n)$$

eine beliebig gegebene Function der $2n+1$ *Variabeln* $x_1 \ldots x_n\, z\, p_1 \ldots p_n$ *und zwischen diesen Variabeln das folgende System von* $2n$ *gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben:*

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_1}} = \frac{dx_2}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_2}} = \cdots = \frac{dx_n}{\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}}$$

$$= -\frac{dp_1}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + p_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}} = \cdots = -\frac{dp_n}{\frac{\partial\varphi}{\partial x_n} + p_n\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

$$= \frac{dz}{p_1\frac{\partial\varphi}{\partial p_1} + \cdots p_n\frac{\partial\varphi}{\partial p_n}},$$

von dem ein Integral $\varphi = \text{Const.}$ *ist. Hat man die* $2n-1$ *übrigen Integrale dieses Systems gefunden und, nachdem man* p_1 *mittelst der Gleichung* $\varphi = 0$ *eliminirt hat, ihre* $2n-1$ *willkürlichen Constanten ausgedrückt durch die Werthe*

$$a_2 \ldots a_n,\ c,\ b_2 \ldots b_n$$

der Grössen

$$x_2 \ldots x_n,\ z,\ p_2 \ldots p_n$$

für den beliebig gewählten Werth a_1 *von* x_1, *so setze man:*

$$c = b_1 + a_2 b_2 + \ldots a_n b_n$$

und eliminire aus den $2n-1$ *Integralen die* $2n-2$ *Grössen*

$$a_2 \ldots a_n,\ p_2 \ldots p_n.$$

Man erhält hierdurch eine Gleichung zwischen $x_1 \ldots x_n,\ z,\ b_1,\ b_2 \ldots b_n$, *die nach* z *aufgelöst eine vollständige Lösung mit den* n *willkürlichen Constanten* $b_1,\ b_2 \ldots b_n$ *der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung liefert:*

$$\varphi\left(x_1 \ldots x_n,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0.$$

§. 3.

Die vorhergehenden Betrachtungen hatten vor Allem den Zweck, die Jacobi-Hamilton'sche Methode zu ersetzen durch eine möglichst einfache andere, die mit dieser die Kürze und Klarheit der Ableitung theilt, aber keinen Ausnahmen mehr unterworfen ist. Man

erkennt jedoch leicht, dass jene Betrachtungen gleichzeitig auch die Mittel enthalten, die allgemeinere Cauchy'sche Regel zu beweisen, d. h. die Aufgabe zu lösen, diejenige Lösung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x,\ x_1 \ldots x_n,\ \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0$$

zu finden, die sich für $x = a$ auf eine gegebene Function von x_1, $x_2 \ldots x_n$ reducirt.

Man braucht in der That zu diesem Ende nur im vorigen § an Stelle der Anfangswerthe $b_1 \ldots b_n$ irgend n andere willkürliche Constanten $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ durch n Gleichungen von der Form

$$b_1 = \frac{\partial f}{\partial a_1}, \ldots, \quad b_n = \frac{\partial f}{\partial a_n}$$

einzuführen, in denen f eine beliebig gegebene Function der Anfangswerthe $a_1 \ldots a_n$ und der neuen Constanten $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ ist, und, an Stelle der Formel (4), zur Definition von V als Function von $x\, a_1 \ldots a_n$ $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ die Formel zu setzen:

$$V = f + \int_a^x \left[\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H\right] dx.$$

Bezeichnet man durch

$$x_k = [x_k], \qquad p_k = [p_k]$$

die vollständigen Lösungen, ausgedrückt in x und den $2n$ Constanten $a_1 \ldots a_n$, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, der $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung, welche der obigen partiellen Differentialgleichung äquivalent sind, so ist auch jetzt noch, und zwar aus demselben Grunde wie früher, die Determinante der Functionen $[x_1] \ldots [x_n]$ in Bezug auf die Anfangswerthe $a_1 \ldots a_n$ verschieden von Null. Indem man die Differentialquotienten der Function V nach a_i, α_i und x nun wiederum auf doppelte Weise bildet, wird man hiernach durch fast wörtlich dieselben Schlüsse wie vorhin zu dem folgenden Satze geführt, der die Cauchy'sche Lösung der genannten Aufgabe und zugleich als speciellen Fall den Satz I. des vorigen § enthält:

IV. *Es sei:*

$$f(a_1 \ldots a_n,\ \alpha_1 \ldots \alpha_n)$$

eine beliebig gegebene Function der $2n$ Grössen $a_1 \ldots a_n$, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$, deren partielle Differentialquotienten

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} \cdots \frac{\partial f}{\partial a_n}$$

von einander unabhängig sind in Bezug auf $\alpha_1 \ldots \alpha_n$. Es sei ferner

$$H(x,\ x_1 \ldots x_n,\ p_1 \ldots p_n)$$

eine beliebig gegebene Function von $x\, x_1 \ldots x_n\, p_1 \ldots p_n$ und zwischen diesen Variabeln das System von $2n$ gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung gegeben:

$$(1) \qquad \frac{dx_k}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_k}, \quad \frac{dp_k}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial x_k}.$$

Man habe dies System vollständig integrirt und die $2n$ Integrationsconstanten durch die Werthe

$$a_1 \ldots a_n \quad b_1 \ldots b_n$$

der Grössen

$$x_1 \ldots x_n \quad p_1 \ldots p_n$$

für $x = a$ ausgedrückt. Indem man dann:

$$(2) \qquad b_1 = \frac{\partial f}{\partial a_1}, \quad \ldots, \quad b_n = \frac{\partial f}{\partial a_n}$$

setzt, erhält man die vollständigen Lösungen des Systems (1):

$$(3) \qquad x_k = [x_k], \qquad (4) \qquad p_k = [p_k]$$

und vermöge dieser durch einfache Quadratur:

$$(5) \qquad V = f + \int_a^x \left[\sum_{k=1}^{k=n} p_k \frac{\partial H}{\partial p_k} - H\right] dx$$

als Functionen von x, $a_1 \ldots a_n$, $\alpha_1 \ldots \alpha_n$. Eliminirt man nun vermöge der n Gleichungen (3) *aus V die Grössen $a_1 \ldots a_n$, und bildet mit der so erhaltenen Function V von $x\, x_1 \ldots x_n\, \alpha_1 \ldots \alpha_n$ die $2n$ Gleichungen*

$$\frac{\partial V}{\partial x_k} = p_k, \quad \frac{\partial V}{\partial \alpha_k} = \frac{\partial f}{\partial \alpha_k},$$

so sind dieselben die vollständigen Integralgleichungen des Systems (1) *und zugleich ist diese Function V selbst diejenige vollständige Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:*

$$(6) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} + H\left(x, x_1 \ldots x_n, \frac{\partial V}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial V}{\partial x_n}\right) = 0,$$

welche für $x = a$ den gegebenen Werth

$$V = f(x_1 \ldots x_n, \alpha_1 \ldots \alpha_n)$$

annimmt.

Letzteres folgt unmittelbar aus der Formel (5), wenn man hinzunimmt, dass die Gleichungen (3), aus denen die Anfangswerthe $a_1 \ldots a_n$ zu bestimmen sind, für $x = a$ sich auf:

$$x_k = a_k$$

reduciren.

Ich habe den Satz speciell für die vollständige Lösung der Gleichung (6) ausgesprochen, um gleichzeitig anzugeben, wie sich durch diese die vollständigen Integralgleichungen des Systems (1) darstellen. Es ist aber ohne Weiteres ersichtlich, dass derjenige Theil des Satzes,

der sich auf die Lösung der partiellen Differentialgleichung (6) bezieht, im Allgemeinen auch dann noch gilt, wenn man den Grössen $\alpha_1 \ldots \alpha_n$ bestimmte constante Werthe beilegt, d. h. für f eine ganz beliebige Function von $a_1 \ldots a_n$ nimmt, wie denn auch in der Herleitung des Satzes diese Annahme nur die Aenderung hervorbringt, dass die Differentiation von V nach den α wegfällt. Doch darf nicht übersehen werden, dass im letzteren Falle besondere Ausnahmen eintreten können, wenn nämlich für die gerade gewählte Function f die vollständigen Lösungen des Systems (1) durch die Substitutionen (2) unendliche oder unbestimmte Werthe erhalten.

Man kann übrigens diesen Satz auch aus dem früheren ableiten mit Hülfe des folgenden Satzes, welcher lehrt, aus irgend einer gegebenen vollständigen Lösung der Gleichung (6) diejenige Lösung derselben Gleichung zu finden, die für $x = a$ einer beliebig gegebenen Function von $x_1 \ldots x_n$ gleich wird:

V. *Es sei zwischen V und den unabhängigen Variabeln $x, x_1 \ldots x_n$ eine beliebige partielle Differentialgleichung erster Ordnung gegeben, in der V selbst nicht vorkommt, und:*

$$V = \varphi(x, x_1 \ldots x_n, c_1 \ldots c_n) + \text{Const.}$$

eine vollständige Lösung derselben. Setzt man dann:

$$V = \varphi - \varphi_a + f_a, \tag{7}$$

wo φ_a aus φ entsteht, wenn man $x, x_1 \ldots x_n$ resp. mit $a, a_1 \ldots a_n$ vertauscht und

$$f_a = f(a_1 \ldots a_n)$$

eine beliebig gegebene Function von $a_1 \ldots a_n$ ist, und eliminirt hieraus die Grössen

$$a_1 \ldots a_n \quad c_1 \ldots c_n$$

mit Hülfe der $2n$ Gleichungen:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_k} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial c_k}, \tag{8}$$

$$\frac{\partial f_a}{\partial a_k} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial a_k}, \tag{9}$$

so hat die resultirende Function V von $x, x_1 \ldots x_n$ die beiden Eigenschaften: Sie genügt der gegebenen partiellen Differentialgleichung und sie erhält für $x = a$ den Werth:

$$V = f(x_1 \ldots x_n).$$

Betrachtet man nämlich in (7) die Grössen $a_1 \ldots a_n\ c_1 \ldots c_n$ als Functionen der unabhängigen Variabeln, so ergiebt die Differentiation dieser Formel nach x_i:

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial c_k} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial c_k} \right) \frac{\partial c_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^{k=n} \left(\frac{\partial f_a}{\partial a_k} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial a_k} \right) \frac{\partial a_k}{\partial x_i}.$$

Für diejenigen Functionen $a_1 \ldots a_n$, $c_1 \ldots c_n$, welche den Gleichun-

gen (8) und (9) genügen, wird daher wie für die ursprüngliche vollständige Lösung

$$\frac{\partial V}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}.$$

Der angegebene Werth von V ist demnach eine Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung; und derselbe reducirt sich auf $f(x_1 \ldots x_n)$, wenn man $x = a$ setzt; denn für $x = a$ werden die Gleichungen (8) erfüllt durch:

$$a_1 = x_1 \quad , \quad \ldots \quad , \quad a_n = x_n.$$

Mit Hülfe dieses Satzes kann man aus einer bekannten vollständigen Lösung unendlich viele andere Lösungen derselben partiellen Differentialgleichung erster Ordnung ableiten. Aber nicht jede beliebige Lösung kann auf diese Weise erhalten werden. So ist namentlich hervorzuheben, dass der obige Satz ebenso wenig wie die Cauchy'sche Methode jemals zu der Hamilton'schen Lösung führen kann, deren willkürliche Constanten die Anfangswerthe $a_1 \ldots a_n$ sind und die für $x = a$ sich auf Null oder eine Constante reducirt. Man erhält die Hamilton'sche Lösung vielmehr, wann sie überhaupt existirt, dadurch, dass man mittelst der n Gleichungen

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_k} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial c_k}$$

die Constanten $c_1, c_2 \ldots c_n$ aus $V = \varphi - \varphi_a$ eliminirt.

Wenn verlangt wird, dass die gesuchte Lösung V nicht für $x = a$, sondern für eine beliebig gegebene Gleichung

$$\psi(x, x_1 \ldots x_n) = 0$$

den gegebenen Werth

$$V = f(x, x_1 \ldots x_n)$$

erhalten soll, so kann man diese Aufgabe auf die frühere zurückführen dadurch, dass man sich in der partiellen Differentialgleichung sowohl, wie in ihrer vollständigen Lösung und der gegebenen Function f an Stelle von x eine neue Variable u durch die Gleichung $\psi = u$ eingeführt denkt. Man gelangt auf diese Weise zu dem folgenden Satze:

VI. *Um aus der vollständigen Lösung*

$$V = \varphi(x, x_1 \ldots x_n, c_1 \ldots c_n) + \text{Const.}$$

einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $x\, x_1 \ldots x_n$ und V diejenige Lösung derselben Gleichung abzuleiten, welche den gegebenen Werth

$$V = f(x, x_1 \ldots x_n)$$

erhält, sobald zwischen den unabhängigen Variabeln die gegebene Bedingungsgleichung

$$\psi(x, x_1 \ldots x_n) = 0$$

hergestellt wird, stelle man die $2n + 3$ Gleichungen auf:

$$V = \varphi - \varphi_a + f_a, \qquad \psi_a = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial c_k} = \frac{\partial \varphi_a}{\partial c_k}, \qquad \frac{\partial f_a}{\partial a_h} - \frac{\partial \varphi_a}{\partial a_h} = \lambda \frac{\partial \psi_a}{\partial a_h},$$

in denen $k = 1, 2, \ldots n$, $a_h = a, a_1, \ldots a_n$ *ist, und eliminire aus denselben die* $2n + 2$ *Grössen*

$$a, a_1 \ldots a_n, c_1 \ldots c_n, \lambda.$$

Der resultirende Werth von V *ist die gesuchte Lösung.*

Hier wie im Folgenden wird immer allgemein unter F_a derjenige Ausdruck verstanden, der aus der gegebenen Function F von $x\, x_1 \ldots x_n$ durch die Substitutionen

$$x = a, \quad x_1 = a_1, \ldots x_n = a_n$$

hervorgeht. —

Da man endlich jede partielle Differentialgleichung erster Ordnung, welche die unbekannte Function selbst enthält, zurückführen kann auf eine andere partielle Differentialgleichung, in welcher die neue unbekannte Function nicht mehr explicite vorkommt und von welcher jede Lösung, einer Constanten gleich gesetzt, eine Lösung der ursprünglichen Gleichung liefert, während umgekehrt jede Lösung der gegebenen Gleichung, die eine willkürliche Constante enthält, durch Auflösung nach dieser willkürlichen Constanten zu einer Lösung der transformirten Gleichung führt, eine Lösung, die man noch durch Multiplication mit einer willkürlichen Constante vervollständigen kann, so lehrt der Satz VI. auch die Aufgabe lösen:

Die Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $x, x_1 \ldots x_n$ so zu bestimmen, dass bei einer beliebig gegebenen Gleichung

$$\psi(x, x_1 \ldots x_n) = 0$$

eine andere, ebenfalls gegebene Gleichung

$$f(x, x_1 \ldots x_n) = 0$$

stattfindet.

Diese allgemeinste Aufgabe wird durch die $2n + 5$ Formeln gelöst:

$$(10) \qquad \begin{cases} F = 0, \quad F_a = 0, \quad f_a = 0, \quad \psi_a = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial c_k} + \lambda \dfrac{\partial F_a}{\partial c_k} = 0 \\ \dfrac{\partial F_a}{\partial a_h} + \mu \dfrac{\partial f_a}{\partial a_h} + \nu \dfrac{\partial \psi_a}{\partial a_h} = 0, \end{cases}$$

aus denen die $2n + 4$ Grössen:

$$a, a_1 \ldots a_n, c_1 \ldots c_n, \lambda, \mu, \nu$$

zu eliminiren sind. Dabei ist angenommen, dass durch die Gleichung $F = 0$ zwischen $x, x_1 \ldots x_n$ und den n willkürlichen Constanten $c_1 \ldots c_n$ eine vollständige Lösung der gegebenen partiellen Differentialgleichung definirt wird.

Ich hebe hier noch die beiden specielleren Sätze hervor, welche die früheren V. und VI. als specielle Fälle enthalten, und leicht in ähnlicher Weise direct verificirt werden können:

VII. *Wenn:*

$$x = X(x_1 \ldots x_n,\ c_1 \ldots c_n)$$

die vollständige Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung zwischen $x\, x_1 \ldots x_n$ *ist, so erhält man diejenige Lösung derselben Gleichung, welche für* $x_n = a_n$ *der gegebenen Function* $f(x_1 \ldots x_{n-1})$ *gleich wird, indem man aus den* $2n + 1$ *Gleichungen:*

$$x = X, \qquad X_a = f_a$$

$$\frac{\partial X}{\partial c_k} = \lambda \frac{\partial X_a}{\partial c_k}, \qquad \frac{\partial X_a}{\partial a_h} = \frac{\partial f_a}{\partial a_h},$$

in denen $k = 1, 2, \ldots n$, $h = 1, 2, \ldots n-1$ *ist, die* $2n$ *Grössen* $a_1 \ldots a_{n-1}\ c_1 \ldots c_n\ \lambda$ *eliminirt.*

VIII. *Aus der vollständigen Lösung*

$$x = X(x_1 \ldots x_n,\ c_1 \ldots c_n)$$

einer partiellen Differentialgleichung 1. O. zwischen $x\, x_1 \ldots x_n$ *erhält man diejenige Lösung* x *derselben Gleichung, welche den gegebenen Werth*

$$x = f(x_1 \ldots x_n)$$

annimmt, sobald zwischen den unabhängigen Variabeln die gegebene Bedingungsgleichung:

$$\psi(x,\ x_1 \ldots x_n) = 0$$

stattfindet, indem man aus den $2n + 3$ *Gleichungen:*

$$x = X, \quad X_a = f_a, \quad \psi_a = 0$$

$$\frac{\partial X}{\partial c_k} = \lambda \frac{\partial X_a}{\partial c_k}, \qquad \frac{\partial X_a}{\partial a_k} - \frac{\partial f_a}{\partial a_k} = \mu \frac{\partial \psi_a}{\partial a_k}$$

die $2n + 2$ *Grössen eliminirt:*

$$a_1 \ldots a_n,\ c_1 \ldots c_n,\ \lambda,\ \mu.$$

Der Satz VII. ist deshalb von Interesse, weil er den Uebergang vermittelt von der im Satze III. angegebenen Integrationsmethode der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu der allgemeineren Methode von Cauchy.

Man könnte den Sätzen V.—VIII. eine kürzere Fassung geben mit Hülfe der Bemerkung, dass, wie die betreffenden Formeln zeigen, die durch diese Sätze gelieferte Lösung immer einem gewissen Maximum oder Minimum der gegebenen entspricht.

Für den speciellen Fall der linearen partiellen Differentialgleichungen vereinfachen sich dieselben beträchtlich und führen zu einem symmetrischen Ausdruck der bekannten Jacobi'schen Regeln über die Bestimmung der Lösung einer solchen Gleichung durch eine Grenzbedingung (Crelle's J. 23, p. 26).

Leipzig, October 1870.

Integration der linearen Differentialgleichung

$$y^{(n)} = Ax^2y'' + Bxy' + Cy,$$

in welcher n eine ganze positive Zahl und A, B, C constante Zahlen bezeichnen, mittelst bestimmter Integrale.

Von Simon Spitzer in Wien.

Durch meine Arbeiten über die Integration linearer Differentialgleichungen bin ich zur Einsicht gelangt, dass man Gleichungen der genannten Form

(1) $$y^{(n)} = Ax^2y'' + Bxy' + Cy$$

Genüge leisten kann durch Ausdrücke folgender Form:

$$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n + v^n}{n}} u^\alpha v^\beta \left[C_1 e^{\lambda_1 uvx} + C_2 e^{\lambda_2 uvx} \ldots\ldots + C_n e^{\lambda_n uvx}\right] du\, dv,$$

in welchen $\alpha + 1$ und $\beta + 1$ bestimmte, positive und constante Zahlen, ferner $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots\ldots \lambda_n$ die n Wurzeln der Gleichung $\lambda^n = A$ sind, und endlich $C_1, C_2, C_3, \ldots\ldots C_n$ willkürliche Constanten bezeichnen.

Um dies zu beweisen, fasse ich ein particulares Integral besonders ins Auge und setze:

(3) $$y = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n + v^n}{n}} u^\alpha v^\beta e^{\lambda uvx}\, du\, dv.$$

Durch Differenziren dieses Ausdruckes erhält man:

$$y' = \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n + v^n}{n}} u^{\alpha+1} v^{\beta+1} e^{\lambda uvx}\, du\, dv,$$

$$y'' = \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n + v^n}{n}} u^{\alpha+2} v^{\beta+2} e^{\lambda uvx}\, du\, dv,$$

$$y^{(n)} = \lambda^n \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n + v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta+n} e^{\lambda uvx}\, du\, dv.$$

Behandelt man nun dieses für $y^{(n)}$ erhaltene Integral zweimal nach einander mittelst der Methode des theilweisen Integrirens, so erhält man successive:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta+n} e^{\lambda u v x} dv = -\int_0^\infty e^{-\frac{u^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta+1} e^{\lambda u v x} \partial e^{-\frac{v^n}{n}}$$

$$= -e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta+1} e^{\lambda u v x} + \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} \partial \left(v^{\beta+1} e^{\lambda u v x}\right)$$

$$= -e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta+1} e^{\lambda u v x} + \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta} e^{\lambda u v x} (\lambda u v x + \beta + 1) dv$$

folglich, wenn man zu den Grenzen 0 und ∞ übergeht:

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta+n} e^{\lambda u v x} dv = \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta} e^{\lambda u v x} (\lambda u v x + \beta + 1) dv$$

und also schliesslich:

$$y^{(n)} = \lambda^n \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta} e^{\lambda u v x} (\lambda u v x + \beta + 1)\, du\, dv.$$

Behandelt man das hier sich darbietende Integral

$$\int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha+n} v^{\beta} e^{\lambda u v x} (\lambda u v x + \beta - 1)\, du$$

wiederum in gleicher Weise, so sieht man, dass man dasselbe vorerst auf nachstehende Weise schreiben kann:

$$-\int_0^\infty e^{-\frac{v^n}{n}} u^{\alpha-1} v^{\beta} e^{\lambda u v x} (\lambda u v x + \beta - 1) \partial e^{-\frac{u^n}{n}};$$

und dies giebt nach der Methode des theilweisen Integrirens:

$$-e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha-1} v^{\beta} e^{\lambda u v x} (\lambda u v x + \beta - 1)$$

$$-\int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} v^{\beta} \partial \left(u^{\alpha-1} e^{\lambda u v x} (\lambda u v x + \beta - 1)\right),$$

und ist, wenn der Ausdruck

$$\alpha + 1,\ \beta + 1 - \lambda,\ \alpha + \beta + 3,\ uvx + \lambda^2 u^2 v^2 x^2$$

zur augenblicklichen Abkürzung mit F bezeichnet wird, gleich

$$-e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha-1} v^{\beta} e^{\lambda u v x} (\lambda u v x + \beta - 1) - \int_0^\infty e^{-\frac{u^n+v^n}{n}} u^{\alpha} v^{\beta} e^{\lambda u v x} F\, du.$$

Geht man nun auch bei diesem Integrale zu dem bestimmten Integrale mit den Grenzen 0 und ∞ über, so verschwindet das ausser dem Integralzeichen stehende, und man erhält:

$$(4) \qquad y^{(n)} = \lambda^n \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n + v^n}{n}} u^\alpha v^\beta e^{\lambda u v x} F\, du\, dv.$$

Substituirt man nun die vorher aufgestellten Werthe von y, y' und y'', sowie den eben jetzt erhaltenen Werth von $y^{(n)}$ in die Gleichung (1), so erhält man:

$$\lambda^n \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n + v^n}{n}} u^\alpha v^\beta e^{\lambda u v x} F\, du\, dv$$

$$= A x^2 \lambda^2 \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n + v^n}{n}} u^{\alpha+2} v^{\beta+2} e^{\lambda u v x}\, du\, dv$$

$$+ B x \lambda \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n + v^n}{n}} u^{\alpha+1} v^{\beta+1} e^{\lambda u v x}\, du\, dv$$

$$+ C \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{u^n + v^n}{n}} u^\alpha v^\beta e^{\lambda u v x}\, du\, dv;$$

und diese Gleichung, in welcher F die vorhin angegebene Bedeutung besitzt, wird identisch, wenn:

$$\lambda^n = A,$$
$$\lambda^n (\alpha + \beta + 3) = B,$$
$$\lambda^n (\alpha + 1)(\beta + 1) = C$$

gesetzt wird.

Es ist demnach der in (2) stehende Werth von y das Integral der Differentialgleichung:

$$y^{(n)} = \lambda^n [x^2 y'' + (\alpha + \beta + 3) x y' + (\alpha + 1)(\beta + 1) y].$$

Dass sich auf ähnliche Weise auch die Gleichung:

$$y^{(n)} = A_m x^m y^{(m)} + A_{m-1} x^{m-1} y^{(m-1)} + \cdots + A_1 x y' + A_0 y$$

behandeln lässt, versteht sich wohl von selbst.

Wien, November 1870.

Ueber die Doppelpunkte von Curven im Raume, deren Geschlecht Null ist.

Von A. Brill in Darmstadt.

Die algebraischen Curven im Raume von einer gegebenen Ordnung lassen sich, wie Herr Clebsch gezeigt hat, nach der Classe von Abel'schen Functionen, welcher sie zugehören, anordnen. Diejenigen Curven, deren „Geschlecht" $= 0$ ist, haben die Eigenschaft, dass ihre Coordinaten sich als rationale Functionen eines Parameters (λ) darstellen lassen, dass also die *homogenen* Coordinaten ($x\,y\,z\,\omega$) ganzen Functionen von λ proportional sind:

$$\begin{aligned}
\varrho \cdot x &= a_0 + \lambda a_1 + \lambda^2 a_2 + \cdots\cdots + \lambda^n a_n \\
\varrho \cdot y &= b_0 + \lambda b_1 + \lambda^2 b_2 + \cdots\cdots + \lambda^n b_n \\
\varrho \cdot z &= c_0 + \lambda c_1 + \lambda^2 c_2 + \cdots\cdots + \lambda^n c_n \\
\varrho \cdot \omega &= d_0 + \lambda d_1 + \lambda^2 d_2 + \cdots\cdots + \lambda^n d_n
\end{aligned} \quad \cdots\cdots (1)$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfactor bedeutet, die a, b, c, d Constante, n die Ordnung der Curve. Eine solche Raumcurve hat im Allgemeinen nur scheinbare Doppelpunkte. Besitzt sie einen wirklichen Doppelpunkt, so besteht zwischen den Coefficienten jener Ausdrücke n^{ten} Grades in λ eine Beziehung. Dieselbe lässt sich in folgender Weise aufstellen.

Den Coordinaten eines wirklichen Doppelpunktes entsprechen zwei verschiedene Werthe des Parameters λ. Seien dieselben λ und μ, ϱ und σ die beiden zugehörigen Proportionalitätsfactoren, so hat man vier Gleichungen von der Form:

$$a_0(\sigma - \varrho) + a_1(\sigma\lambda - \varrho\mu) + a_2(\sigma\lambda^2 - \varrho\mu^2) + \cdots + a_n(\sigma\lambda^n - \varrho\mu^n) = 0 \cdots\cdots (2),$$

aus welcher Gleichung die drei entsprechenden durch Vertauschung von a mit bez. b, c, d hervorgehen. Um aus diesen 4 Gleichungen die Grössen λ, μ, $\frac{\varrho}{\sigma}$ zu eliminiren, füge ich die folgenden identischen Gleichungen hinzu:

$$x(\sigma - \varrho) + y(\sigma\lambda - \varrho\mu) + z(\sigma\lambda^2 - \varrho\mu^2) = 0$$
$$x(\sigma\lambda - \varrho\mu) + y(\sigma\lambda^2 - \varrho\mu^2) + z(\sigma\lambda^3 - \varrho\mu^3) = 0$$
(3) . . . . . .
$$x(\sigma\lambda^{n-2} - \varrho\mu^{n-2}) + y(\sigma\lambda^{n-1} - \varrho\mu^{n-1}) + z(\sigma\lambda^n - \varrho\mu^n) = 0;$$

wo zur Abkürzung:

$$\frac{x}{z} = \lambda \,.\, \mu\,; \qquad \frac{y}{z} = -(\lambda + \mu)$$

gesetzt ist.

Man bilde nun aus den vier Gleichungen (2) in Verbindung mit je $n - 3$ der Gleichungen (3) ein System von Gleichungen, welches linear und homogen ist in Bezug auf die Grössen $\sigma\lambda^i - \varrho\mu^i$; alsdann ist die Determinante der Coefficienten gleich Null. Man erhält so $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ in den Grössen x, y, z homogene Gleichungen von der $(n-3)^{\text{ten}}$ Ordnung. Die Zahl der in denselben linear auftretenden Potenzen und Produkte von x, y, z ist nun aber gleichfalls $= \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, sodass die Determinante der Coefficienten dieser Gleichungen gleich Null zu setzen ist. Dies ergiebt die gesuchte Bedingung. Die Determinante ist in den Coefficienten der Gleichungen (1) von der $2(n-1)(n-2)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Ersetzt man eine jener $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Gleichungen durch die folgende identische:

$$x + \lambda \,.\, y + \lambda^2 \,.\, z = 0,$$

nachdem man dieselbe mit einem entsprechenden Produkt aus Potenzen von x, y, z multiplicirt hat, und setzt nun die Determinante der Coefficienten Null, so erhält man eine in λ quadratische Gleichung, welche das dem Doppelpunkt zugehörige Werthepaar λ, μ ergiebt. Hieran knüpft sich leicht die Bedingung für den Uebergang zu einem Rückkehrpunkt, sowie die für einen weiteren Doppelpunkt.

Im Falle einer Raumcurve 4^{ter} Ordnung ist die Zahl der aus den Coefficienten der Gleichungen (2) zu bildenden Vertikalreihen gleich 5. Bezeichnet man mit (i) die durch Auslassung der i^{ten} Vertikalreihe gebildete 4 gliedrige Determinante, so ist die gesuchte Bedingung:

$$\begin{vmatrix} (1) & (2) & (3) \\ (2) & (3) & (4) \\ (3) & (4) & (5) \end{vmatrix} = 0.$$

Für λ, μ hat man die quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 \\ (2) & (3) & (4) \\ (3) & (4) & (5) \end{vmatrix} = 0. \cdot$$

Für $n = 5$ ist die Zahl der Vertikalreihen der Coefficienten $= 6$.

Bezeichnet man mit (ik) die durch Weglassung der i^{ten} und k^{ten} Vertikalreihe entstehende 4 gliedrige Determinante, so hat man (nach einer kleinen Reduction) als Bedingungsgleichung für einen wirklichen Doppelpunkt:

$$\begin{vmatrix} (01) & (02) & (12) & (03)-(12) & (13) & (23) \\ (02) & (03)+(12) & (13) & (04) & (14)+(23) & (24) \\ (12) & (13) & (23) & (14)-(23) & (24) & (34) \\ (03)-(12) & (04) & (14)-(23) & (05)-(14)+2(23) & (15) & (25)-(34) \\ (13) & (14)+(23) & (24) & (15) & (25)-(34) & (35) \\ (23) & (24) & (34) & (25)-(34) & (35) & (45) \end{vmatrix} = 0.$$

Das zugehörige Parameterpaar ergiebt sich aus der quadratischen Gleichung:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 0 & \lambda^2 & 0 & 0 \\ (01) & (02) & (12) & (03)-(12) & (13) & (23) \\ (02) & (03)+(12) & (13) & (04) & (14)+(23) & (24) \\ (12) & (13) & (23) & (14)-(23) & (24) & (34) \\ (13) & (14)+(23) & (24) & (15) & (25)-(34) & (35) \\ (23) & (24) & (34) & (25)-(34) & (35) & (45) \end{vmatrix} = 0.$$

Ueber diejenigen Curven eines Büschels, welche eine gegebene Curve zweipunktig berühren.

Von A. Brill in Darmstadt.

Jeder Aufgabe über Berührung von Curven eines Büschels („Büschel" im weiteren Sinn genommen) mit einer gegebenen Curve entspricht eine solche über ein lineares Gebilde in einem Raum von höheren Dimensionen, welches aus jener Curve durch eindeutige Transformation entstanden ist. Die Lösunng für beide Probleme ist dieselbe*). So z. B. bestimmt sich die Zahl der eine gegebene Curve $f = 0$ in einem Punkte zweipunktig berührenden (in drei aufeinander folgenden Punkten treffenden) Curven eines Büschels, zugleich mit der Zahl der *Wendepunkte* einer Curve von demselben Geschlecht, welche durch eindeutige Transformation aus $f = 0$ entstanden ist; die Zahl der dreipunktig berührenden Curven des Büschels zugleich mit der Zahl der *Wendungsberührebenen* einer Raumcurve etc.

Man hat mit Hilfe von geometrischen Betrachtungen diese Zahlen bereits mehrfach bestimmt. Die algebraische Behandlungsweise führt zur Aufstellung gewisser simultaner Covarianten von f und den Curven des Büschels, welche in jenen Punkten verschwinden. Diese Covarianten haben um desswillen ein Interesse, weil sie zugleich Covarianteneigenschaften in Bezug auf die aus der Curve $f = 0$ durch eindeutige Transformation entstandene Curve besitzen, welche man von vornherein angeben kann. Auf diesen Punkt gedenke ich an einem anderen Orte zurück zukommen.

Im Nachfolgenden werde ich auf dem angedeuteten Weg den Ausdruck für die Zahl derjenigen Curven eines Büschels mit zwei willkürlichen Parametern ableiten, welche eine gegebene Curve zweipunktig berühren. Man hat in diesem Falle eine Covariante aufzustellen, welche, in den Coordinaten der transformirten Curve geschrieben, die Eigenschaft der Hesse'schen Curve besitzt, dieselbe in ihren Wendepunkten zu schneiden.

* Vgl. eine Notiz des Verf. in den Göttinger Nachrichten vom Dez. 1870.

§ 1.

Aufstellung der Covariante L.

Die Gleichung einer Curve m^{ter} Ordnung sei gegeben:

$$f(x_1 x_2 x_3) = f(x) = 0.$$

Ihr Geschlecht sei p, d die Zahl der Doppel-, β die Zahl der Rückkehrpunkte. Unter den Basispunkten des Büschels von Curven s^{ter} Ordnung:

$$\alpha \,.\, \varphi(x) + \beta \,.\, \psi(x) + \gamma \,.\, \chi(x) = 0 \tag{1}$$

mögen σ mit einfachen, τ mit Doppelpunkten der Curve $f = 0$ zusammenfallen.

Wenn eine Curve dieses Büschels (1) die Curve $f = 0$ zweipunktig berührt (in 3 aufeinanderfolgenden Punkten trifft), so verschwindet die Determinante:

$$R = \begin{vmatrix} \varphi(x) & \psi(x) & \chi(x) \\ \varphi(x+dx) & \psi(x+dx) & \chi(x+dx) \\ \varphi(x+2dx+d^2x) & \psi(x+2dx+d^2x) & \chi(x+2dx+d^2x) \end{vmatrix} \tag{3}$$

wo durch die Argumente (x), $(x+dx)$, $(x+2dx+d^2x)$ drei unendlich benachbarte Punkte auf $f = 0$ bezeichnet werden sollen.

Statt der Gleichung (3) wollen wir kürzer schreiben:

$$R = \begin{vmatrix} \varphi(x) \\ \varphi(x+dx) \\ \varphi(x+2dx+d^2x) \end{vmatrix},$$

indem wir, wie dies in der Folge öfter geschehen soll, die Reihen der ψ und χ weglassen. Gleichzeitig bestehen die Gleichungen:

$$f(x) = 0 \qquad f(x+dx) = 0 \qquad f(x+2dx+d^2x) = 0$$

von denen die beiden letzteren in der Form geschrieben werden können:

$$\Sigma f_i dx_i = 0; \quad \Sigma f_i d^2x_i + (n-1)\,\Sigma\Sigma f_{i\varkappa}\, dx_i dx_\varkappa = 0 \tag{4}$$

$$i, \varkappa = 1, 2, 3,$$

wo:

$$f_i = \frac{1}{n} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_i} \;;\; f_{i\varkappa} = \frac{1}{n(n-1)} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_\varkappa}.$$

Wir führen noch die analogen Bezeichnungen ein:

$$\varphi_i = \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \;;\; \varphi_{i\varkappa} = \frac{1}{s(s-1)} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_\varkappa};$$

u. s. w.

und nehmen die beliebige lineare Gleichung zwischen den homogenen Coordinaten x hinzu:

$$k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 = k\,.$$

Alsdann berechnen sich die dx_i aus der durch Differentiation dieser Gleichung entstehenden Gleichung und aus (4) wie folgt:

$$dx_1 = \varrho(k_2 f_3 - f_2 k_3)$$
$$dx_2 = \varrho(k_3 f_1 - f_3 k_1)$$
$$dx_3 = \varrho(k_1 f_2 - f_1 k_2),$$

wo ϱ ein Proportionalitätsfactor ist.

Man erhält hieraus:

$$x_3 dx_2 - x_2 dx_3 = k \cdot f_1,$$

u. s. w.

Mit Hilfe dieser Beziehungen beweist man die folgende Gleichung:

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 dx_1 & x_2 dx_2 & x_3 dx_3 \\ dx_1^2 & dx_2^2 & dx_3^2 \end{vmatrix} = \varrho^3 \cdot k^3 \cdot f_1 f_2 f_3 .$$

Führt man nun in R die angeführten Bezeichnungen ein, so erhält man:

$$R = s^2 \cdot \begin{vmatrix} \varphi \\ \Sigma \varphi_i dx_i \\ \Sigma \varphi_i d^2 x_i + (s-1) \cdot \Sigma\Sigma \varphi_{ix}\, dx_i\, dx_x \end{vmatrix},$$

oder auch:

$$R = s^2 (s-1) \cdot P + s^2 \cdot Q,$$

wo

$$P = \begin{vmatrix} \Sigma\Sigma \varphi_{ix}\, x_i x_x \\ \Sigma\Sigma \varphi_{ix}\, x_i dx_x \\ \Sigma\Sigma \varphi_{ix}\, dx_i dx_x \end{vmatrix}, \quad Q = \begin{vmatrix} \Sigma \varphi_i x_i \\ \Sigma \varphi_i dx_i \\ \Sigma \varphi_i d^2 x_i \end{vmatrix}$$

ist. In diese beiden Ausdrücke sind die dx, d^2x aus den Gleichungen (4) einzuführen. Was zunächst die Determinante P betrifft, so kann man dieselbe durch die folgende 6gliedrige Determinante darstellen:

$$P = \tfrac{1}{2} \cdot \varrho^3 \cdot k^3 \cdot \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} \\ \psi_{11} & \psi_{22} & \psi_{33} & \psi_{23} & \psi_{31} & \psi_{12} \\ \chi_{11} & \chi_{22} & \chi_{33} & \chi_{23} & \chi_{31} & \chi_{12} \\ 2f_1 & 0 & 0 & 0 & f_3 & f_2 \\ 0 & 2f_2 & 0 & f_3 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & 2f_3 & f_2 & f_1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Dies erhellt sofort aus der Multiplication dieser Determinante mit der folgenden:

$$\varrho^3 \cdot k^3 \cdot f_1 f_2 f_3 = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 2x_2 x_3 & 2x_3 x_1 & 2x_1 x_2 \\ x_1 dx_1 & x_2 dx_2 & x_3 dx_3 & x_3 dx_2 + x_2 dx_3 & x_1 dx_3 + x_3 dx_1 & x_2 dx_1 + x_1 dx_2 \\ dx_1^2 & dx_2^2 & dx_3^2 & dx_2 dx_3 & 2dx_3 dx_1 & 2dx_1 dx_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ferner lässt sich Q in Form eines Productes anschreiben:

$$Q = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ d^2x_1 & d^2x_2 & d^2x_3 \end{vmatrix},$$

dessen letzter Factor bekanntlich*) bis auf eine Constante gleich der Hesse'schen Determinante von f ist, wenn man $f = 0$ voraussetzt. Der constante Factor bestimmt sich leicht $= -(n-1)k^3 \cdot \varrho^3$, so dass man hat:

$$(6) \quad \frac{R}{s^2 \cdot k^3 \cdot \varrho^3} = L = \frac{s-1}{2} \begin{vmatrix} \varphi_{11} & \varphi_{22} & \varphi_{33} & \varphi_{23} & \varphi_{31} & \varphi_{12} \\ \psi_{11} & \psi_{22} & \psi_{33} & \psi_{23} & \psi_{31} & \psi_{12} \\ \chi_{11} & \chi_{22} & \chi_{33} & \chi_{23} & \chi_{31} & \chi_{12} \\ 2f_1 & 0 & 0 & 0 & f_3 & f_2 \\ 0 & 2f_2 & 0 & f_3 & 0 & f_1 \\ 0 & 0 & 2f_3 & f_2 & f_1 & 0 \end{vmatrix} -$$

$$-(n-1) \cdot \begin{vmatrix} \varphi_1 & \psi_1 & \chi_1 \\ \varphi_2 & \psi_2 & \chi_2 \\ \varphi_3 & \psi_3 & \chi_3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} \cdot$$

Dies ist die gesuchte Covariante. Dieselbe ist in den Variabeln x von der Ordnung $3s + 3n - 9$.

§ 2.

Verhalten von L in denjenigen Basispunkten des Curvenbüschels, welche in einfache Punkte von $f = 0$ fallen.

Ich werde zunächst den Ausdruck L in eine für die Untersuchungen zweckmässigere Form bringen, indem ich denselben mit:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & 2x_2x_3 & 2x_3x_1 & 2x_1x_2 \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & 2y_2y_3 & 2y_3y_1 & 2y_1y_2 \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & 2z_2z_3 & 2z_3z_1 & 2z_1z_2 \\ y_1z_1 & y_2z_2 & y_3z_3 & y_2z_3+z_2y_3 & y_3z_1+z_3y_1 & y_1z_2+z_1y_2 \\ z_1x_1 & z_2x_2 & z_3x_3 & z_2x_3+x_2z_3 & z_3x_1+x_3z_1 & z_1x_2+x_1z_2 \\ x_1y_1 & x_2y_2 & x_3y_3 & x_2y_3+x_3y_2 & x_3y_1+x_1y_3 & x_1y_2+y_1x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

multiplicire**).

---

*) Hesse, über die Wendepunkte u. s. w. u. s. w. Journ. Crelle-Borchardt, Bd. 41.

**) Man beweist die Identität dieser beiden Formen von Δ, indem man die sechsgliedrige Determinante multiplicirt mit der Determinante:

Zuvor möge für die 1., 2., ... Polare von $f(x)$ in Bezug auf die Punkte y, z u. s. w. die Bezeichnung eingeführt werden:

$$\Sigma f_i y_i = f_y; \qquad \Sigma f_i z_i = f_z;$$
$$\Sigma\Sigma f_{ix} y_i y_x = f_{yy}; \qquad \Sigma\Sigma f_{ix} y_i z_x = f_{yz}; \qquad \Sigma\Sigma f_{ix} z_i z_x = f_{zz};$$

u. s. w.

so dass also $f_x = f_{xx} = f$; für die Polaren von φ, ψ, χ, sowie von L in Bezug auf y und z mögen analoge Bezeichnungen gelten. Alsdann hat man, unter Berücksichtigung der Gleichung $f = 0$:

$$(7) \quad L.\Delta = \frac{s-1}{2} \cdot \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & 0 \\ \varphi_{yy} & 2y_1 \cdot f_y \\ \varphi_{zz} & 2z_1 \cdot f_z \\ \varphi_{yz} & z_1 \cdot f_y + y_1 \cdot f_z \\ \varphi_{zx} & x_1 \cdot f_z \\ \varphi_{xy} & x_1 \cdot f_y \end{vmatrix} - (n-1) \cdot \begin{vmatrix} \varphi_x \\ \varphi_y \\ \varphi_z \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & f_{xy} & f_{xz} \\ f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} \cdot$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist statt der ganzen sechsgliedrigen Determinante blos deren 1. und 4. Verticalreihe angeschrieben worden; die 2. und 3. Reihe lässt sich aus der ersten durch Vertauschung von φ mit resp. ψ und χ; die 5. und 6. aus der 4. durch Vertauschung der Indexzahl 1 mit resp. 2 und 3 ableiten. Ebenso werden die 2 dreigliedrigen Determinanten nur durch ihre ersten Verticalreihen repräsentirt.

Diese oben aufgestellte Form ist bequem zur Untersuchung des Verhaltens der Curve $L = 0$ in denjenigen Punkten von $f = 0$, durch welche die Curven $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\chi = 0$ hindurch gehn.

Ich werde zunächst zeigen, dass *in den σ einfachen Punkten von $f = 0$, für welche φ, ψ, χ verschwinden, die Curve $L = 0$ eine Berührung 2. Ordnung* (3 zusammenfallende Punkte) *mit $f = 0$ gemeinsam hat.*

In einem solchen Punkte ist nämlich:

1. $L = 0$
2. $\Sigma L_i y_i$ proportional mit $\Sigma f_i y_i$
3. $\Sigma L_i d^2 x_i + (r-1)\,\Sigma\Sigma L_{ix} dx_i dx_x$ proportional mit $\Sigma f_i d^2 x_i + (n-1)\,\Sigma\Sigma f_{ix}\, dx_i dx_x$

(wenn r den Grad von L in den x bedeutet).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2(yz)_1 & 0 & 0 & 0 & (yz)_3 & (yz)_2 \\ 0 & 2(yz)_2 & 0 & (yz)_3 & 0 & (yz)_1 \\ 0 & 0 & 2(yz)_3 & (yz)_2 & (yz)_1 & 0 \end{vmatrix} = 2(yz)_1\,(yz)_2\,(yz)_3,$$

wo $(yz)_1 = y_2 z_3 - z_2 y_3$, u. s. w. ist.

Man beweist diese drei Behauptungen für $L \cdot \Delta$ statt für L, indem man am geeigneten Orte annimmt, dass die y_i, z_i in der Determinante Δ sich resp. wie dx_i, d^2x_i verhalten.

Aus der Gleichung (7) geht unmittelbar hervor, dass $L\Delta = 0$ ist, wenn für einen Punkt x f, φ, ψ, χ verschwinden.

Zum Beweis der zweiten Behauptung bilden wir die erste Polare:

$$(8)\quad r\cdot\Delta\cdot\Sigma L_i y_i = \frac{s-1}{2}\cdot \begin{vmatrix} s\cdot\varphi_{xy} & 0 \\ \varphi_{yy} & 2y_1\cdot f_y \\ \varphi_{zz} & 2z_1\cdot f_z \\ \varphi_{yz} & z_1 f_y + y_1 f_z \\ \varphi_{zx} & x_1 f_z \\ \varphi_{xy} & x_1 f_y \end{vmatrix} + \frac{s-1}{2}\cdot \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & 0 \\ \varphi_{yy} & 2y_1\cdot f_y \\ \varphi_{zz} & 2z_1\cdot f_z \\ \varphi_{yz} & z_1\cdot f_y + y_1 f_z \\ \varphi_{zx} & x_1\cdot f_z \\ s\cdot\varphi_{yy} & (n-1)x_1\cdot f_{yy} \end{vmatrix}$$

$$-(n-1)(s-1)\cdot \begin{vmatrix} \varphi_{xx} & 0 & f_{xy} & f_{xz} \\ \varphi_{yy} & f_{yx} & f_{yy} & f_{yz} \\ \varphi_{zz} & f_{zx} & f_{zy} & f_{zz} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{vmatrix} + K$$

wo K eine Anzahl von Gliedern umfasst, welche nebst ihren ersten Polaren für die fraglichen Punkte verschwinden. Auch das Product der dreigliedrigen Determinanten verschwindet, und L_y wird somit f_y proportional. Nehmen wir die y der dx proportional an, so verschwindet L_y in den betreffenden Punkten, weil alsdann $f_y = 0$ ist. Dies soll beim Beweis der dritten Behauptung angenommen werden.

Alsdann ist, mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$r\cdot\Delta\cdot\Sigma L_i z_i = \frac{(s-1)}{2}\, s \begin{vmatrix} \varphi_{xz} & 0 \\ \varphi_{yy} & 2y_1\cdot f_y \\ \varphi_{zz} & 2z_1\cdot f_z \\ \varphi_{yz} & z_1\cdot f_y + y_1 f_z \\ \varphi_{zx} & x_1\cdot f_z \\ \varphi_{xy} & x_1\cdot f_y \end{vmatrix} =$$

$$= -s(s-1)\cdot \begin{vmatrix} \varphi_{xy} & x_1 \\ \varphi_{yy} & y_1 \\ \varphi_{xz} & z_1 \end{vmatrix} \cdot f_z^3 .$$

Andererseits erhält man durch abermalige Polarenbildung aus Gleichung (8) mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$r(r-1)\cdot\Delta\cdot\Sigma\Sigma L_{ix} y_i y_x = (s-1)\, s \begin{vmatrix} \varphi_{xy} & 0 \\ \varphi_{yy} & 0 \\ \varphi_{zz} & 2z_1\cdot f_z \\ \varphi_{yz} & y_1\cdot f_z \\ \varphi_{zx} & x_1\cdot f_z \\ 0 & (n-1)x_1\cdot f_{yy} \end{vmatrix} -$$

$$-(n-1)(s-1)s\begin{vmatrix}\varphi_{xy}\\ \varphi_{yy}\\ \varphi_{xz}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0 & 0 & f_{xz}\\ 0 & f_{yy} & f_{yz}\\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{vmatrix}=$$

$$=-(s-1)s\cdot\begin{vmatrix}\varphi_{xy}\\ \varphi_{yy}\\ \varphi_{xz}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{vmatrix}\cdot f_z^2\cdot f_{yy}\cdot$$

Setzt man in diesem und in dem vorher erhaltenen Ausdruck die z_i den d^2x_i proportional, so folgt aus der Addition beider der Beweis der Behauptung 3. Somit ist aber auch der obige Satz bewiesen.

§ 3.

Verhalten von L in den Doppel- und Rückkehrpunkten von $f=0$.

In den τ Doppelpunkten von $f=0$, durch welche alle Punkte des Büschels (1) *hindurchgehn, hat die Curve $L=0$ einen vierfachen Punkt. Von den vier Zweigen der Curve, welche demselben entsprechen, haben zwei mit je einem Zweige der Curve $f=0$ eine zweipunktige Berührung gemeinsam,* so dass in jeden der τ Punkte $4\,.\,2+2\,.\,2=12$ Schnittpunkte von $L=0$ und $f=0$ fallen.

Man kann nämlich zeigen:

1. dass für einen solchen Punkt die 3. Polare von L in Bezug auf einen beliebigen Punkt y verschwindet;
2. dass die 4. Polare mit f_{yy} proportional ist;
3. dass der durch 5malige Differentiation von L entstehende Ausdruck:

$$r(r-1)(r-2)(r-3)\left((r-4)L_{y^5}+10\,.\,L_{y^3z^2}\right),$$

wo zur Abkürzung y_i für dx_i, z_i für d^2x_i $(i=1,\,2,\,3)$ gesetzt ist und die verschwindenden Glieder weggelassen sind, mit dem durch 3malige Differentiation von f entstehenden:

$$n(n-1)\left((n-2)f_{y^3}+3\,.\,f_{yz^2}\right)$$

proportional ist.

Weil für die fraglichen Punkte sowohl f, φ, ψ, χ, als auch f_y, f_z verschwinden, so werden gewisse Glieder der zu bildenden Polaren verschwinden, und zwar jedenfalls alle aus der sechsgliedrigen Determinante (P) entstehenden, für welche weniger als 4 Horizontalreihen in die Differentiation hereingezogen sind, sowie alle die aus dem Product (Q) von dreigliedrigen Determinanten entstehenden Glieder, welche nicht zwei Differentiationen auf die beiden ersten (und nur diese) Reihen der Functionaldeterminante von φ, ψ, χ angewendet, enthalten.

Aus dieser Bemerkung erhellt sofort, dass die 3. Polare sowohl von P wie von Q, also auch von L, verschwindet.

Es erweist sich für die Bildung der Zahlencoefficienten als zweckmässig, die Polaren erst in Bezug auf einen beliebigen Punkt u zu bilden, und erst zum Schluss $u = y$ zu setzen. Man erhält in dieser Weise (mit Weglassung der verschwindenden Glieder) die 4. Polare wie folgt:

$$r(r-1)(r-2)(r-3)\cdot L_{y^4} = 12(s-1)\begin{vmatrix} s\cdot\varphi_y & 0 \\ (s-2)\,\varphi_{y^2} & 2(n-1)\,y_1\cdot f_{yy} \\ (s-2)\,\varphi_{z^2y} & 2(n-1)\,z_1\cdot f_{zy} \\ \varphi_{yz} & 0 \\ \varphi_{zx} & 0 \\ (s-1)\,\varphi_{yy} & (n-1)\,x_1\cdot f_{yy} \end{vmatrix} +$$

$$+ 12(s-1)\begin{vmatrix} s\cdot\varphi_y & 0 \\ (s-2)\,\varphi_{y^2} & 2(n-1)\,y_1 f_{yy} \\ \varphi_{zz} & 0 \\ (s-2)\,\varphi_{y^2z} & (n-1)\,(z_1 f_{yy} + y_1 f_{zy}) \\ \varphi_{zx} & 0 \\ (s-1)\,\varphi_{yy} & (n-1)\,x_1 f_{yy} \end{vmatrix} +$$

$$+ 12(s-1)\begin{vmatrix} s\,\varphi_y & 0 \\ \varphi_{yy} & 0 \\ (s-2)\,\varphi_{z^2y} & 2(n-1)\,z_1 f_{yz} \\ (s-2)\,\varphi_{y^2z} & (n-1)\,(z_1 f_{yy} + y_1 f_{zy}) \\ \varphi_{zx} & 0 \\ (s-1)\,\varphi_{yy} & (n-1)\,x_1 f_{yy} \end{vmatrix} -$$

$$-24(n-1)\left\{\begin{vmatrix}\varphi_{xy}\\ \varphi_{yy}\\ \varphi_{xz}\end{vmatrix} + \tfrac{1}{2}\begin{vmatrix}\varphi_{yy}\\ \varphi_{xy}\\ \varphi_{xz}\end{vmatrix}\right\}\cdot\begin{vmatrix} 0 & (n-1)f_{yy} & (n-1)f_{yz} \\ (n-1)f_{yy} & (n-2)f_{y^2} & (n-2)f_{y^2z} \\ 0 & f_{zy} & f_{zz}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{vmatrix}.$$

Man erkennt, dass die rechte Seite Glied für Glied mit f_{yy} proportional ist. Somit ist die zweite Behauptung oder, geometrisch ausgedrückt, der Satz bewiesen, dass 2 Zweige der Curve $L = 0$ in dem fraglichen Punkte die 2 Zweige von $f = 0$ berühren.

Die dritte Behauptung sagt eine Berührung 2. Ordnung dieser Zweige aus. Um dieselbe zu erweisen, nehmen wir von nun an die y den dx proportional an, d. h. wir nehmen an, dass die Gleichung:

$$f_{yy} = 0$$

erfüllt sei. Man erhält unter dieser Voraussetzung, mit Weglassung der verschwindenden Glieder:

$$\cdot(r-1)(r-2)(r-3)(r-4)L_{y^3} = 30(s-1)\begin{vmatrix} s\cdot\varphi_{xy} & 0 \\ \varphi_{yy} & 0 \\ (s-2)\,\varphi_{x^2y} & 2(n-1)z_1 f_{zy} \\ (s-2)\,\varphi_{y^2z} & (n-1)y_1 f_{zy} \\ \varphi_{zx} & 0 \\ (s-1)(s-2)\,\varphi_{y^2} & (n-1)(n-2)x_1 f_{y^2} \end{vmatrix};$$

$$\cdot(r-1)(r-2)(r-3)\cdot L_{y^2z} = -18(n-1)^3\cdot s(s-1)\cdot\begin{vmatrix}\varphi_{xy}\\ \varphi_{yy}\\ \varphi_{xz}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{vmatrix}\cdot f_{yz}^3.$$

Diesen letzten Ausdruck erhält man aus dem oben für L_{y^4} entwickelten, indem man je ein y durch z ersetzt und alsdann zusammenzieht.

Durch Combination der obigen Formeln ergiebt sich:

$$r(r-1)(r-2)(r-3)\,[10\,.\,L_{y^2z} + (r-4)\,.\,L_{y^3}] =$$

$$= -60(n-1)^3\,s(s-1)\,.\begin{vmatrix}\varphi_{xy}\\ \varphi_{yy}\\ \varphi_{xz}\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{vmatrix}\,.\,f_{yz}^3\,[3f_{yz} + (n-2)\,f_{y^2}],$$

durch welche Gleichung die 3. Behauptung erwiesen ist.

Es erübrigt noch *das Verhalten der Curve $L=0$ in den $d-\tau$ Doppelpunkten und den β Rückkehrpunkten zu untersuchen, durch welche die Curven des Büschels nicht hindurchgehn.* Dieser Fall lässt sich in wenigen Worten erledigen, weil das Verhalten der beiden Theile (P und Q), aus welchen L sich zusammensetzt, dasselbe ist, wie das von L. Die Hesse'sche Determinante von f, welche Factor von Q ist, verschwindet bekanntlich *in einem Doppelpunkte von $f=0$ 6fach, in einem Rückkehrpunkte 8fach**). Dies gilt demnach auch von Q.

Man beweist leicht das Gleiche für die sechsgliedrige Determinante P. Die zweite Polare P_{yy} verschwindet für einen Doppelpunkt von $f=0$, daher verschwindet P selbst $2\,.\,3 = 6$fach in einem solchen. Für einen Rückkehrpunkt findet noch eine Berührung von 2 Zweigen des dreifachen Punktes von $P=0$ mit denjenigen von $f=0$ statt, denn die dritte Polare P_{y^3}, deren Glieder theils mit f_{yy}, theils mit f_{y^2z} proportional sind, wird für einen Rückkehrpunkt, für welchen die Gleichung $f_{y^2z} = f_{yy}\,.\,f_{zz}$ erfüllt wird, proportional mit f_{yy}. Was von P und Q einzeln bewiesen wurde, gilt auch von L.

Man erhält nun die Zahl derjenigen Punkte von $f=0$, in welchen eine Curve des Büschels (1) diese Curve zweipunktig berührt, wenn man von der Zahl sämmtlicher Schnittpunkte von $L=0$ mit $f=0$ diejenigen in Abzug bringt, welche in die Basispunkte des Büschels

*) Vgl. Cayley, recherches sur l'élimination u. s. w. Journ. Crelle-Borchardt, Bd. 34.

auf der Curve $f = 0$ oder welche in singuläre Punkte dieser Curve fallen.

Es ergiebt sich somit für diese Zahl:

$$\begin{aligned} n(3n + 3s - 9) - 3\sigma - 12\tau - 6(d - \tau) - 8\beta &= \\ = 3[ns - \sigma - 2\tau + 2(p - 1)] - 2\beta & \\ = 3(M + 2p - 2) - 2\beta . & \end{aligned}$$

Die Zahl M bedeutet hierbei den Grad der durch Transformation mittelst der Gleichungen:

$$\begin{aligned} \varrho \cdot y_1 &= \varphi(x) \\ \varrho \cdot y_2 &= \psi(x) \\ \varrho \cdot x_3 &= \chi(x) \end{aligned}$$

aus der Gleichung $f = 0$ hervorgehenden Curve*).

Weil einer linearen Combination der φ, ψ, χ, also einer Curve des Büschels (1), eine Gerade in der Ebene der transformirten Curve entspricht, so repräsentirt obige Zahl zugleich die Zahl der Wendepunkte der Letzteren.

*) Clebsch und Gordan, Abel'sche Functionen, 3. Abschnitt.

On the transformation of unicursal surfaces.

By A. Cayley.

I consider the question of the transformation (Abbildung auf einer Ebene) of unicursal surfaces. Taking (x, y, z, w) for the coordinates of a point on the surface, (x', y', z') for those of the corresponding point on the plane; then if $X', Y' Z', W'$ denote each of them a function $(x', y', z')^{n'}$ the equations of transformation are

$$x : y : z : w = X' : Y' : Z' : W' :$$

and assuming that each of the curves

$$X' = 0,\ Y' = 0,\ Z' = 0,\ W' = 0$$

(or what is the same thing the general curve

$$aX' + bY' + cZ' + dW' = 0)$$

passes once thro' each of α_1 points, twice thro' each of α_2 points, ... r times thro' each of α_r points (for convenience I write α_r instead of α_r'); and writing also

$$n = n'^2 - \Sigma r^2 \alpha_r$$

$$0 = \tfrac{1}{2} n'(n' + 3) - 3 - \Theta - \Sigma \tfrac{1}{2} r(r + 1)\, \alpha_r$$

(where Θ is $= 0$ or positive except in the case of special relations between the positions of the fixed points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_r$), which equations give

$$-n = 3n' - 6 - 2\Theta - \Sigma r \alpha_r;$$

then the order of the surface is $= n$, and the order of the nodal curve is $b = \frac{1}{2}(n - 2)(n - 3) + \Theta$. I assume that the nodal curve has h apparent double points and t actual triple points, but no stationary points, so that q being the class, we have $q = b^2 - b - 2h - 6t$; and I endeavour to find these numbers q, t, h.

For this purpose, imagine thro' the nodal curve a surface of the order k, besides meeting the surface in a curve of the order $nk - 2b$; this curve I call the k-thic residue of the nodal curve, or simply the „residue". The projection (Abbildung) of the complete intersection kn is a curve of the order kn' passing kr times thro' each of the points α_r: this is made up of the projection of the nodal curve *once*, and of the projection of the residue. But as shown by Dr. Clebsch

the projection of the nodal curve is of the order $(n-4)\,n' + 3$, and it passes $(n-4)\,r + 1$ times thro' each of the points α_r; hence the projection of the residue is of the order $(k-n+4)\,n' - 3$ and it passes $(k-n+4)\,r - 1$ times thro' each of the points α_r. I assume that the projection of the residue is the *general* curve which satisfies the foregoing conditions, viz. that the residue, and its projection as defined by the foregoing conditions, *depend each of them on the same number of constants*. The necessity for this is I confess by no means obvious: but take as an illustration Steiner's quartic surface as transformed by the equations $x : y : z : w = x'^2 : y'^2 : z'^2 : (x' + y' + z')^2$: the nodal curve consists of three lines meeting in a point, the quadric residue is the remaining intersection of the surface by a quadric cone passing thro' the three lines; and the projection thereof is a line; the quadric cone, and therefore the conic, each depend upon 2 constants; and the line which is the projection of the conic depends upon the same number (2) of constants: at all events I make the assumption provisionally.

Now in the projection of the residue, we have twice the number of constants

$$= [(k-n+4)\,n' - 3]\,(k-n+4)\,n' - \Sigma[(k-n+4)\,r - 1]\,(k-n+4)\,r\alpha_r,$$

viz. this is

$$= (k-n+4)^2\,(n'^2 - \Sigma r^2\alpha_r) + (k-n+4)\,(-3n' + \Sigma r\alpha_r),$$

or what is the same thing it is

$$= (k-n+4)^2\,n + (k-n+4)\,(n-6-2\Theta),$$

viz. reducing, and replacing Θ by its value $= -\frac{1}{2}(n-2)\,(n-3) + b$, the number in question is

$$= k^2 n + k\,(-n^2 + 4n - 2b) + 2\,(n-4)\,b.$$

Now k being $=$ or $> n-3$, the curve of intersection of a given surface n by a surface k depends on

$$\tfrac{1}{6}(k+1)\,(k+2)\,(k+3) - \tfrac{1}{6}(k-n+1)\,(k-n+2)\,(k-n+3) - 1$$

constants; and making the surface k to pass thro' the curve b we have to subtract herefrom $(k+1)\,b - \frac{1}{2}g - 2t$; that is, for the residue, twice the number of constants is

$$= \tfrac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3) - \tfrac{1}{3}(k-n+1)(k-n+2)(k-n+3) - 2 - 2\,(k+1)\,b + q + 4t,$$

viz. this is

$$= k^2 n + k\,(-n^2 + 4b - 2b) + \tfrac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3) - 2b + q + 4t.$$

Hence comparing the two expressions in question we have

$$2\,(n-4)\,b = \tfrac{1}{3}(n-1)\,(n-2)\,(n-3) - 2b + q + 4t,$$

that is

$$0 = \tfrac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3) - 2(n-3)b + q + 4t,$$

or, as I prefer to write it,

$$0 = \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - (n-3)b + \tfrac{1}{2}q + 2t;$$

which agrees with a more general formula in my „Memoir on the theory of Reciprocal surfaces" Phil. Trans. vol. 159 (1869) see p. 227. I consider any two residues, a k-thic residue and a l-thic residue; to each intersection of these there corresponds an intersection of their projections: or the number of intersections of the two residues must be equal to that of the two projections. Now the projections being (as above)

der $(k-n+4)n'-3$ passing $(k-n+4)r-1$ times thro' each point α_r,
„ $(l-n+4)n'-3$ „ $(l-n+4)r-1$ „ „ „ „

the number of the intersections in question is

$$= [(k-n+4)n'-3][(l-n+4)n'-3] - \Sigma[(k-n+4)r-1][(l-n+4)r-1]\alpha_r + \omega$$

where for a reason which will be afterwards explained I have added the term ω: this is

$$= (k-n+4)(l-n+4)(n'^2 - \Sigma r^2\alpha_r) + (k+l-2n+8)(-3n' + \Sigma r\alpha_r) + 9 - (\Sigma\alpha_r - \omega),$$

viz. it is

$$= (k-n+4)(l-n+4)n + (k+l-2n+8)(n-6-2\Theta) + 9 - (\Sigma\alpha_r - \omega),$$

viz. substituting for Θ its value, $= -\frac{1}{2}(n-2)(n-3) + b$, and reducing, the number is

$$= kln - 2(k+l)b - n^3 + 8n^2 - 16n + 9 + 4(n-4)b - (\Sigma\alpha_r - \omega).$$

But the surfaces n, k, l, having in common the curve b which is a nodal curve on n, besides intersect in

$$kln - b(n + 2k + 2l - 4) + 2q + qt$$

points (Salmon's Geom. of three Dimensions 2nd Ed. p. 283, except that in the formula as there given the singularity t is not taken account of); that is, the number of intersections of the two residues is

$$= kln - 2(k+l)b - (n-4)b + 2q + 9t,$$

which is equal to the number of intersections of the two projections*): or comparing the numbers in question we have

$$-n^3 + 8n^2 - 16n + 9 + 4(n-4)b - (\Sigma\alpha_r - \omega) = -(n-4)b + 2q + 9t,$$

that is

$$2q + 9t = 5(n-4)b - n^3 + 8n^2 - 16n + 9 - (\Sigma\alpha_r - \omega).$$

*) I remark that $n+\lambda$ being positive or not less than $n-3$, two $(n+\lambda)$-thic residues meet in $n(\lambda+4)(\lambda+6) - 12\lambda - 39 - 4(\lambda+4) - (\Sigma\alpha_r - \omega)$ points: in particular two $(n-3)$-thic residues meet in $3n - 3 - 4\Theta - (\Sigma\alpha_r - \omega)$ points; and two $(n-2)$-thic residues meet in $8n - 15 - 8\Theta - (\Sigma\alpha_r - \omega)$ points.

But we have already found

$$2q + 8t = 4(n-3)b - \tfrac{2}{3}n^3 + 4n^2 - \tfrac{22}{3}n + 4$$

and we have therefore

$$t = (n-8)b - \tfrac{1}{3}n^3 + 4n^2 - \tfrac{26}{3}n + 5 - (\Sigma\alpha_r - \omega),$$

and

$$q = -2(n-13)b + n^3 - 14n^2 + 31n - 18 + 4(\Sigma\alpha_r - \omega).$$

I obtain these results in a different manner by investigating expressions for the deficiency (Geschlecht) of the nodal residue $nk - 2b$ and for that of its projection.

First for the projection, we have

$$\text{Twice Def}^{y}. = [(k-n+4)n' - 4][(k-n+4)n' - 5] - \Sigma[(k-n+4)r - 1][(k-n+4)r - 2]\alpha_r + 2\omega$$

where I have added the term 2ω, as afterwards explained: this is

$$= (k-n+4)^2(n'^2 - \Sigma r^2\alpha_r) + (k-n+4)(-9n' + 3\Sigma r\alpha_r) + 20 - 2(\Sigma\alpha_r - \omega)$$

viz. it is

$$= (k-n+4)^2 n + (k-n+4)(3n - 18 - 6\Theta) + 20 - 2(\Sigma\alpha_r - \omega)$$

or substituting for Θ its value $-\frac{1}{2}(n-2)(n-3) + b$ and reducing, it is

$$= k^2n + k(n^2 - 4n - 6b) - 2n^3 + 16n^2 - 32n + 20 + 6(n-4)b - 2(\Sigma\alpha_r - \omega).$$

Next as regards the residue, the number h' of its apparent double points is obtained in terms of h and t by the formula

$$8h + 6t - 2h' = (kn - 4b)(k-1)(n-1) - 2b(k-1).$$

(Salmon p. 284, except that the singularity t is not there taken account of) and we thence have

$$\text{Twice Def}^{y}. = (kn-1)(kn-2) - 2h' = kn(k+n-4) + 4b^2 + b(-4n - 6k + 12) + 2 - 8h - 6t,$$

or introducing q instead of h by the formula $4b^2 - 8h = 4q + 4b + 24t$, this is

$$= kn(k+n-4) + b(-4n - 6k + 12) + 4q + 4b + 2 + 18t$$

viz. it is

$$= k^2n + k(n^2 - 4n - 6b) - 4(n-4)b + 4q + 18t.$$

So that comparing with the deficiency of the projection we have

$$-2n^3 + 16n^2 - 32n + 20 + 6(n-4)b - 2(\Sigma\alpha_r - \omega) = -4(n-4)b + 4q + 2 + 18$$

that is

$$2q + 9t = 5(n-4)b - n^3 + 8n^2 - 16n + 9 - (\Sigma\alpha_r - \omega)$$

the same result as before.

The necessity for the term ω appears by the consideration that if we apply to the plane figure a Cremona-transformation, thus obtaining a new transformation of the surface, the value of $\Sigma\alpha_r$ will in general

be altered; whereas the expressions for q, t should it is clear remain unaltered; and it arises as follows, viz. for certain transformations of the surface the curve of the order $(k-n+4)n'-3$ passing $(k-n+4)r-1$ times thro' each point α_r and which was assumed to be the projection of the residue is not an indecomposable curve but contains a certain number ω of factors (each belonging to a unicursal curve definable by means of the number of its passages thro' the several points α_r) which factors are to be rejected in order to obtain the equation of the proper residue. Thus reverting to the transformation

$$x : y : z : w = x'^2 : y'^2 : z'^2 : (x' + y' + z')^2$$

of Steiner's surface, the projection of the quadric residue was (as already remarked) a line; applying to the plane figure the ordinary quadric (or inverse) transformation we introduce three fixed points, $(\alpha_2 = 3)$, say these are A, B, C; viz. in the new transformation of the surface the projection of any plane section is a quartic curve having a node at each of the fixed points: the projection of the residue ought clearly to be a conic thro' the three points; but according to the general formula it is a quintic having at each of these points a triple point: the quintic is in fact made up of the lines BC, CA, AB and of the conic which is the proper residue; viz. in the case in question there are 3 factors thrown out, or we have $\omega = 3$. To apply this to the second investigation of $2q + 9t$, by comparison of the two deficiencies, observe that in general if a curve is made up of $\omega + 1$ indecomposable curves, the deficiency of the compound curve is equal to the sum of the deficiencies of the component curves $- \omega$; hence if ω of the curves are unicursal, the deficiency of the compound curve is equal to that of the remaining curve $- \omega$; or what is the same thing, the deficiency of the remaining curve is $=$ that of the compound curve $+ \omega$; and the addition of the term $+ \omega$ to the expression for the deficiency is thus accounted for. It is easy to see that a like explanation applies to the first investigation of $2q + 9t$.

I further remark, reverting to the equations

$$x : y : z : w = X' : Y' : Z' : W'$$

of the transformation, that the product of the ω factors is given as the common factor (if any) of the Jacobians

$J(Y', Z', W')$, $J(Z', W', X')$, $J(W', X', Y')$ and $J(X', Y', Z')$.

Such common factor exists whenever we can by a Cremona-transformation of the plane figure reduce the number of the points α_r upon which the transformation of the surface depends; viz. for any given transformation of the surface ω is equal to the excess of $\Sigma\alpha_r$ above the minimum value of $\Sigma\alpha_r$, or what is the same thing $\Sigma\alpha_r - \omega$ is equal to the minimum value of $\Sigma\alpha_r$, and is thus independent of the

particular transformation. And of course if $\Sigma\alpha_r$ has this minimum value, viz. if the transformation is such that the number of the points α_r cannot be reduced by any Cremona-transformation of the plane figure, then we have $\omega = 0$. I presume that for the most simple transformation, that is when n' has its least value, $\Sigma\alpha_r$ has also its least value, and consequently that ω is $= 0$.

Recapitulating, the results obtained are

$$q = -2(n-13)b + n^3 - 14n^2 + 31n - 18 + 4(\Sigma\alpha_r - \omega)$$
$$t = \quad (n-8)b - \tfrac{1}{3}n^3 + 4n^2 - \tfrac{26}{3}n + 5 - (\Sigma\alpha_r - \omega).$$

where it will be recollected that

$$b = \tfrac{1}{2}(n-2)(n-3) + \Theta;$$

the formula are verified in the several cases

n'	α_1	α_2'	n	Θ	ω	b	q	t	
2	2	0	2	0	1	0	0	0	Quadric surface
2	1	0	3	1	0	1	0	0	Cubic scroll
2	0	0	4	2	0	3	0	1	Steiner's quartic surface
3	6	0	3	0	0	0	0	0	Cubic surface
3	5	0	4	1	0	2	2	0	Quartic with nodal conic
2	8	1	4	0	0	1	0	0	Do with nodal line
2	7	1	5	1	0	4	8	0	Quintic with nodal quadriquadric
2	11	0	5	0	0	3	4	0	Do with nodal skew cubic
2	12	2	5	−1	0	2	0	0	Do with two non-intersecting nodal lines

which are the transformations chiefly as yet examined: but the first-mentioned case (quadric surface, generalised stereographic projection) altho' as stated the formula are verified with the value $\omega = 1$, does noth really come under the foregoing theory. It is interesting to see that they are verified in the last-mentioned case, belonging to a negative value of Θ, that is to a special system of fixed points.

Cambridge Dec^{r}. 5th. 1870.

Zur Theorie der Bessel'schen Functionen.

Von E. Lommel in Erlangen.

1. In meinen „Studien über die Bessel'schen Functionen“*) sind folgende drei lineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) y = 0$$

$$z \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + a \frac{\partial y}{\partial z} \pm \tfrac{1}{4} y = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + z^k y = 0$$

integrirt worden durch Ausdrücke, welche für alle drei Gleichungen in der Form

$$y = z^\alpha J^\nu_{(\gamma z^\beta)}$$

enthalten sind. Es erscheint daher die Frage nach der Differentialgleichung, welcher diese allgemeinere Integralform entspricht, und von der demnach die obigen nur specielle Fälle sein müssten, nicht ohne Interesse.

Um diese Frage zu beantworten, gehen wir aus von der Gleichung

$$\frac{\partial \left(z^\nu J^\nu_{(z)}\right)}{\partial z} = z^\nu J^{\nu-1}_{(z)}, \tag{1}$$

in welcher ein Grundgesetz der Bessel'schen Functionen seinen Ausdruck findet.

Differentiirt man diese Gleichung, indem man dabei das in ihr ausgesprochene Gesetz anwendet, so erhält man

$$\frac{\partial^2 \left(z^\nu J^\nu_{(z)}\right)}{\partial z^2} = z^\nu J^{\nu-2}_{(z)} + z^{\nu-1} J^{\nu-1}_{(z)}. \tag{2}$$

Nach einem zweiten Grundgesetz der Bessel'schen Functionen hat man

$$J^\nu_{(z)} = \frac{2(\nu-1)}{z} J^{\nu-1}_{(z)} - J^{\nu-2}_{(z)}$$

oder auch

$$z^\nu J^\nu_{(z)} = 2(\nu-1) z^{\nu-1} J^{\nu-1}_{(z)} - z^\nu J^{\nu-2}_{(z)}. \tag{3}$$

*) Leipzig, Teubner, 1868.

Addirt man jetzt diese drei Gleichungen, nachdem die (1) mit $\frac{a}{z}$, die (3) mit b multiplicirt worden, so kommt

$$\frac{\partial^2\left(z^\nu J^\nu_{(z)}\right)}{\partial z^2} + \frac{a}{z}\cdot\frac{\partial\left(z^\nu J^\nu_{(z)}\right)}{\partial z} + b z^\nu J^\nu_{(z)}$$
$$= (1-b)\, z^\nu J^{\nu-2}_{(z)} + \left(1 + a + 2b(\nu-1)\right) z^{\nu-1} J^{\nu-1}_{(z)}.$$

Macht man nun $b = 1$ und $1 + a + 2(\nu - 1) = 0$, d. i. $a = -(2\nu - 1)$, so verschwindet der Ausdruck zur Rechten, und man erkennt, dass

der Differentialgleichung $y = z^\nu J^\nu_{(z)}$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{2\nu - 1}{z}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + y = 0$$

als particuläres Integral genügt.

2. Durch Combination der Grundgesetze (1) und (3) gelangt man leicht zu der Gleichung:

$$\frac{\partial\left(z^{-\nu} J^\nu_{(z)}\right)}{\partial z} = -z^{-\nu} J^{\nu+1}_{(z)},$$

oder, wenn man darin $-\nu$ statt ν setzt:

$$\frac{\partial\left(z^\nu J^{-\nu}_{(z)}\right)}{\partial z} = -z^\nu J^{-(\nu-1)}_{(z)}. \tag{4}$$

Verfährt man mit dieser Gleichung ebenso wie vorhin mit Gleichung (1), und berücksichtigt man, dass

$$z^\nu J^{-\nu}_{(z)} = -2(\nu-1) z^{\nu-1} J^{-(\nu-1)}_{(z)} - z^\nu J^{-(\nu-2)}_{(z)}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\partial^2\left(z^\nu J^{-\nu}_{(z)}\right)}{\partial z^2} + \frac{a}{z}\cdot\frac{\partial\left(z^\nu J^{-\nu}_{(z)}\right)}{\partial z} + b z^\nu J^{-\nu}_{(z)}$$
$$= (1-b)\, z^\nu J^{-(\nu-2)}_{(z)} - \left(1 + a + 2b(\nu-1)\right) z^{\nu-1} J^{-(\nu-1)}_{(z)}.$$

Wird nun wieder $b = 1$ und $a = -(2\nu - 1)$ genommen, so leuchtet ein, dass auch

$$y = z^\nu J^{-\nu}_{(z)}$$

ein particuläres Integral der nämlichen Gleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{2\nu - 1}{z}\cdot\frac{\partial y}{\partial z} + y = 0$$

ist. Dieses Integral fällt jedoch mit dem vorigen zusammen, so oft ν eine (positive oder negative) ganze Zahl ist, weil für ein ganzes n stets

$$J^{-n}_{(z)} = (-1)^n J^n_{(z)}$$

ist. Dann tritt aber, wie in dem oben erwähnten Schriftchen gezeigt ist, die Bessel'sche Function zweiter Art $Y^n_{(z)}$ an die Stelle der jetzt unverwendbar gewordenen Function erster Art mit negativem Index, und liefert das zweite particuläre Integral:

$$y = z^n Y^n_{(z)}.$$

Die Integration unserer Differentialgleichung kann sonach für jedes reelle ν durchgeführt werden, und wir kommen zu dem Schluss:

Der linearen Differentialgleichung

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{2\nu - 1}{z} \cdot \frac{\partial y}{\partial z} + y = 0$$

genügt als vollständiges Integral:

$$(\text{I}_a) \qquad y = z^\nu \left(A J_{(z)}^{\nu} + B J_{(z)}^{-\nu}\right),$$

so lange ν nicht positiv oder negativ ganz ist.

Ist dagegen ν positiv oder negativ ganz, $= \pm n$, so genügt ihr:

$$y = z^{\pm n}\left(A J_{(z)}^{n} + B Y_{(z)}^{n}\right)$$

als vollständiges Integral.

3. Wir transformiren jetzt vorstehende Differentialgleichung, indem wir zunächst setzen:

$$z = \gamma x^\beta .$$

Dann ist:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{1}{\beta\gamma} \cdot x^{1-\beta} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{x^{2-2\beta}}{\beta^2\gamma^2} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1-\beta}{\beta^2\gamma^2} \cdot x^{1-2\beta} \cdot \frac{\partial y}{\partial x}.$$

Führen wir diese Werthe in unsere Gleichung ein, so verwandelt sie sich in folgende:

$$x^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - (2\beta\nu - 1)\, x \frac{\partial y}{\partial x} + \beta^2\gamma^2 x^{2\beta} y = 0,$$

welcher durch

$$y = x^{\beta\nu}\left(A J_{(\gamma x^\beta)}^{\nu} + B J_{(\gamma x^\beta)}^{-\nu}\right)$$

vollständig genügt wird.*)

In diese Gleichung substituiren wir weiter:

$$y = x^\alpha y_1,$$

wo y_1 eine Function von x vorstellt. Alsdann hat man:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = x^\alpha \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x} + \alpha x^{\alpha-1} \cdot y_1$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = x^\alpha \cdot \frac{\partial^2 y_1}{\partial x^2} + 2\alpha x^{\alpha-1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x} + \alpha(\alpha - 1) x^{\alpha-2} y_1 .$$

Nach Einsetzung dieser Werthe nimmt die obige Differentialgleichung (wenn man den Index bei y_1 wieder weglässt), folgende Gestalt an:

$$\text{(II)} \quad x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (2\alpha - 2\beta\nu + 1) x \frac{\partial y}{\partial x} + \left(\alpha(\alpha - 2\beta\nu) + \beta^2\gamma^2 x^{2\beta}\right) y = 0.$$

Dieselbe wird durch das vollständige Integral

*) Der Kürze wegen wird hier und im Folgenden nur diese Form des Integrals aufgeführt, und dabei als selbstverständlich angenommen, dass im Falle eines ganzzahligen ν statt der Bessel'schen Function mit negativem Index jedesmal die Bessel'sche Function zweiter Art einzutreten hat.

$$(II_a) \qquad y = x^{\beta\nu-\alpha}\left[AJ^{\nu}_{(\gamma x^{\beta})} + BJ^{-\nu}_{(\gamma x^{\beta})}\right]$$

befriedigt, welchem die Eingangs erwähnte allgemeine Form wirklich zukommt.

Dieses Integral zieht sich jedoch, wenn $\beta = 0$ ist, auf das blos particuläre

$$y = x^{-\alpha}$$

zurück. Man findet aber in diesem Falle leicht durch bekannte Methoden als zweites particuläres Integral:

$$y = x^{-\alpha}\log x.$$

Der Differentialgleichung

$$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (2\alpha+1)x\frac{\partial y}{\partial x} + \alpha^2 y = 0$$

entspricht sonach

$$y = x^{-\alpha}(A + B\log x)$$

als vollständiges Integral.

4. Bevor wir uns zur Betrachtung dieser allgemeinen Differentialgleichung wenden, dürfte es angemessen sein, einige speciellere Resultate und zwar namentlich auch die oben vorausgestellten Differentialgleichungen daraus abzuleiten.

Setzt man $\alpha = \beta\nu$, so erhält man die Differentialgleichung:

$$x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x\frac{\partial y}{\partial x} + \beta^2(\gamma^2 x^{2\beta} - \nu^2)y = 0$$

nebst ihrem vollständigen Integral:

$$y = AJ^{\nu}_{(\gamma x^{\beta})} + BJ^{-\nu}_{(\gamma x^{\beta})}.$$

Für $\beta = 1$ und $\gamma = 1$ geht daraus die Bessel'sche Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

und ihr Integral

$$y = AJ^{\nu}_{(x)} + BJ^{-\nu}_{(x)}$$

hervor. Zu derselben Classe gehört ($\beta = 2$, $\gamma = 1$):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + 4\left(x^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

mit dem Integrale

$$y = AJ^{\nu}_{(x^2)} + BJ^{-\nu}_{(x^2)}.$$

Ebenso (für $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$):

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\nu^2}{x}\right)y = 0$$

nebst dem Integral:

$$y = AJ^{\nu}_{(\sqrt{x})} + BJ^{\nu i}_{(\sqrt{x})} \text{ u. s. w.}$$

Eine weitere Classe von Differentialgleichungen ergiebt sich, wenn

man in (II) entweder $\alpha = 0$ oder $\alpha = 2\beta\nu$ setzt; beide Substitutionen führen zu derselben Gleichung, nämlich:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1-2\beta\nu}{x} \cdot \frac{\partial y}{\partial x} + \beta^2\gamma^2 x^{2\beta-2} \cdot y = 0$$

mit dem Integral:

$$y = x^{\beta\nu}\left[AJ^{\nu}_{(\gamma x^{\beta})} + BJ^{-\nu}_{(\gamma x^{\beta})}\right].$$

Unter diese Classe stellt sich sowohl die oben schon integrirte Differentialgleichung (I) (für $\beta = 1$, $\gamma = 1$), als auch die zweite der Eingangs aufgeführten. Setzt man nämlich $\beta = \frac{1}{2}$, $\gamma = 1$, so entspricht der Differentialgleichung

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (1-\nu)\frac{\partial y}{\partial x} + \tfrac{1}{4}y = 0$$

das vollständige Integral:

$$y = x^{\frac{\nu}{2}}\left[AJ^{\nu}_{(V\overline{x})} + BJ^{-\nu}_{(V\overline{x})}\right],$$

während für $\beta = \frac{1}{2}$ und $\gamma = \sqrt{-1} = i$ die Gleichung

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (1-\nu)\frac{\partial y}{\partial x} - \tfrac{1}{4}y$$

nebst ihrem Integral:

$$y = x^{\frac{\nu}{2}}\left(AJ^{\nu}_{(i\,V\overline{x})} + BJ^{-\nu}_{(i\,V\overline{x})}\right)$$

hervorgeht. —

Machen wir endlich in (II) $2\alpha - 2\beta\nu + 1 = 0$ und $\alpha(\alpha - 2\beta\nu) = 0$, woraus

$$\alpha = \beta\nu - \tfrac{1}{2} \qquad \beta\nu = \pm\tfrac{1}{2}$$

folgt, so gelangen wir zunächst zu der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \beta^2\gamma^2 x^{2\beta-2} y = 0,$$

welche die sogenannte Riccati'sche ist. Je nachdem wir nun $\beta^2\gamma^2 = +1$ oder $= -1$ setzen, erhalten wir die Riccati'sche Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + x^{2\beta-2} y = 0$$

nebst ihrem vollständigen Integral:

$$y = \sqrt{x}\left[AJ^{\frac{1}{2\beta}}_{\left(\frac{x^{\beta}}{\beta}\right)} + BJ^{-\frac{1}{2\beta}}_{\left(\frac{x^{\beta}}{\beta}\right)}\right]$$

oder die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - x^{2\beta-2} y = 0$$

und ihr vollständiges Integral:

$$y = \sqrt{x}\left[A J^{\frac{1}{2\beta}}\left(\frac{ix^\beta}{\beta}\right) + B J^{-\frac{1}{2\beta}}\left(\frac{ix^\beta}{\beta}\right)\right]$$

ganz so, wie dieselben in dem oben erwähnten Schriftchen bereits aufgestellt worden sind. Es bleibt bei dieser Herleitung gleichgiltig, ob wir $\beta\nu = +\frac{1}{2}$ oder $\beta\nu = -\frac{1}{2}$ nehmen, das Resultat ist in beiden Fällen das nämliche.

Unter dem oben schon gemachten stillschweigenden Vorbehalte, dass eine Bessel'sche Function mit negativ ganzem Index jedesmal durch die entsprechende Bessel'sche Function zweiter Art zu ersetzen ist, gelten die hier gegebenen Integrale in allen Fällen, mit Ausnahme des einen, wenn $\beta = 0$ ist.

Dann aber ergiebt sich für die Gleichung:

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm y = 0$$

auf directem Wege (indem man $y = x^\delta$ setzt und δ in geeigneter Weise bestimmt) das vollständige Integral:

$$y = Ax^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1\mp 4}} + Bx^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1\mp 4}}$$

oder, wenn man die beiden hierin enthaltenen Fälle trennen will:

$$y = \sqrt{x}\left(A\cos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x\right) + B\sin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\log x\right)\right)$$

für

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + y = 0$$

und

$$y = \sqrt{x}\left(Ax^{\frac{1}{2}\sqrt{5}} + Bx^{-\frac{1}{2}\sqrt{5}}\right)$$

für

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - y = 0.$$

Der hier zur Integration der Riccati'schen Gleichung eingeschlagene Weg lässt gewiss an Einfachheit und Klarheit wenig zu wünschen übrig. Man geht von der Differentialgleichung (I) oder auch von der Bessel'schen Gleichung, welche beide unmittelbare Consequenzen der Grundgesetze der Bessel'schen Functionen sind, aus, verwandelt diese durch zwei Transformationen in die allgemeinere Gleichung (II), und reducirt letztere durch geeignete Bestimmung der Coefficienten auf die verlangte Riccati'sche Form. Die hier der Riccati'schen Gleichung gegebene Gestalt

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \pm x^{2\beta-2} y = 0$$

dürfte im Hinblick auf die Form des Integrals die naturgemässeste und bequemste sein.

5. Kehren wir jetzt zu der allgemeineren Gleichung (II), nämlich

$$x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + (2\alpha - 2\beta\nu + 1)\, x \frac{\partial y}{\partial x} + (\alpha(\alpha - 2\beta\nu) + \beta^2\gamma^2 x^{2\beta})\, y = 0$$

zurück, und setzen:

$$2\alpha - 2\beta\nu + 1 = a$$
$$\alpha(\alpha - 2\beta\nu) = b$$
$$\beta^2\gamma^2 = c.$$

Dann lautet die Gleichung:

$$\text{(III)} \qquad x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ax\frac{\partial y}{\partial x} + (b + cx^{2\beta})y = 0$$

und ihr genügt (wenn β nicht Null ist) noch immer das vollständige Integral:

$$y = x^{\beta\nu-\alpha}\left[AJ^{\nu}_{(\gamma x^{\beta})} + BJ^{-\nu}_{(\gamma x^{\beta})}\right],$$

wenn darin

$$\beta\nu - \alpha = -\frac{a-1}{2}$$
$$\nu = \frac{1}{\beta}\sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - b}$$
$$\gamma = \frac{\sqrt{c}}{\beta}$$

genommen wird. Das doppelte Vorzeichen, welches den in den Ausdrücken für ν und γ vorkommenden Wurzeln anhaftet, braucht nicht berücksichtigt zu werden, da es auf die Form des Integrales keinen Einfluss übt.

Der vorstehende Werth von ν wird imaginär, sobald b positiv und grösser als $\left(\frac{a-1}{2}\right)^2$ wird. Es fragt sich nun, ob die Gültigkeit des obigen Integrals an dieser Schranke aufhört, oder ob die Bessel'sche Function auch für imaginäre Indices ihre Bedeutung beibehält. Die vorliegende Differentialgleichung weist uns somit auf die Nothwendigkeit hin, die Theorie der Bessel'schen Functionen auch auf complexe Indices auszudehnen, was nun im Folgenden geschehen soll.

6. Die von uns in dem angeführten Werkchen an die Spitze gestellte Definition der Bessel'schen Function (erster Art) lautet:

$$\text{(D)} \qquad J^{\nu}_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu}}{2^{\nu}\Gamma_{(\nu+\frac{1}{2})}} \int_0^{\pi} \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega \,.\, d\omega,$$

wo der Index ν reell und grösser als $-\frac{1}{2}$ gedacht ist.

Für einen complexen Index $\nu + \mu i$ behalten wir diese Definition bei und setzen fest:

Die Bessel'sche Function $J^{\nu+\mu i}_{(z)}$ sei definirt durch die Gleichung:

$$J^{\nu+\mu i}_{(z)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{z^{\nu+\mu i}}{2^{\nu+\mu i}\Gamma_{(\nu+\mu i+\frac{1}{2})}} - (K^{\nu,\mu}_{(z)} + iS^{\nu,\mu}_{(z)}),$$

worin

$$K_{(z)}^{\nu,\mu} = \int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\cos(2\mu\log\sin\omega)\,.\,d\omega,$$

$$S_{(z)}^{\nu,\mu} = \int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\sin(2\mu\log\sin\omega)\,.\,d\omega,$$

und

$$\Gamma_{(\nu+\mu i+\frac{1}{2})} = \int_0^\infty e^{-x}\,x^{\nu+\mu i-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\,x^{\nu-\frac{1}{2}}\cos(\mu\log x)\,dx + i\int_0^\infty e^{-x}\,x^{\nu-\frac{1}{2}}\sin(\mu\log x)\,dx$$

ist. Dabei ist μ beliebig reell, ν aber reell und grösser als $-\frac{1}{2}$ zu denken.

Es kommt nun darauf an, zu zeigen, dass die hier definirte Bessel'sche Function mit complexem Index beiden in dieser Abhandlung ewähnten Grundgesetzen gehorcht; dann werden nicht bloss die hier aus jenen Gesetzen gefolgerten Resultate, sondern die ganze auf diesen Grundpfeilern aufgebaute Theorie für sie gelten.

Um den verlangten Nachweis zu führen, differentiiren wir zunächst die Functionen K und S zweimal nach z, und erhalten:

$$\frac{\partial K_{(z)}^{\nu,\mu}}{\partial z} = K' = -\int_0^\pi \sin(z\cos\omega)\,.\,\cos\omega\,.\,\sin^{2\nu}\omega\,.\,\cos(2\mu\log\sin\omega)\,.\,d\omega$$

$$\frac{\partial^2 K_{(z)}^{\nu,\mu}}{\partial z^2} = K'' = -\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\,.\,\cos^2\omega\,.\,\sin^{2\nu}\omega\,.\,\cos(2\mu\log\sin\omega)\,.\,d\omega$$

$$\frac{\partial S_{(z)}^{\nu,\mu}}{\partial z} = S' = -\int_0^\pi \sin(z\cos\omega)\,.\,\cos\omega\,.\,\sin^{2\nu}\omega\,.\,\sin(2\mu\log\sin\omega)\,.\,d\omega$$

$$\frac{\partial^2 S_{(z)}^{\nu,\mu}}{\partial z^2} = S'' = -\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\,.\,\cos^2\omega\,.\,\sin^{2\nu}\omega\,.\,\sin(2\mu\log\sin\omega)\,.\,d\omega.$$

Nun schreiben wir K' in folgender Weise:

$$K' = -\int_0^\pi \sin(z\cos\omega)\sin^{2\nu+1}\omega\,.\,\cos(2\mu\log\sin\omega)\,d(\log\sin\omega)$$

und integriren theilweise, indem wir

$$\cos(2\mu\log\sin\omega)\,d(\log\sin\omega)$$

als integrirten Factor betrachten. Wir erhalten dann:

$$K' = -\left[\sin(z\cos\omega)\sin^{2\nu+1}\omega \cdot \frac{\sin(2\mu\log\sin\omega)}{2\mu}\right]_0^\pi$$

$$+\frac{2\nu+1}{2\mu}\int_0^\pi \sin(z\cos\omega)\cdot\cos\omega\cdot\sin^{2\nu}\omega\cdot\sin(2\mu\log\sin\omega)\cdot d\omega$$

$$-\frac{z}{2\mu}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\cdot\sin^{2\nu+2}\omega\cdot\sin(2\mu\log\sin\omega)\cdot d\omega.$$

Da $\nu > -\frac{1}{2}$ vorausgesetzt ist, so verschwindet der vom Integralzeichen befreite Theil an den Grenzen, und man hat nach einer leicht ersichtlichen Umformung:

$$K' = \frac{2\nu+1}{2\mu}\int_0^\pi \sin(z\cos\omega)\cos\omega\cdot\sin^{2\nu}\omega\cdot\sin(2\mu\log\sin\omega)\cdot d\omega$$

$$-\frac{z}{2\mu}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\sin^{2\nu}\omega\cdot\sin(2\mu\log\sin\omega)\cdot d\omega$$

$$+\frac{z}{2\mu}\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\cos^2\omega\cdot\sin^{2\nu}\omega\cdot\sin(2\mu\log\sin\omega)\cdot d\omega,$$

oder, was dasselbe ist:

$$K' = -\frac{2\nu+1}{2\mu}S' - \frac{z}{2\mu}S - \frac{z}{2\mu}S''.$$

Behandelt man S' in ganz gleicher Weise, so findet man:

$$S' = \frac{2\nu+1}{2\mu}K' + \frac{z}{2\mu}K + \frac{z}{2\mu}K''.$$

Wird diese Gleichung mit i multiplicirt und zur vorigen addirt, so ergiebt sich nach geeigneter Zusammenfassung folgende Beziehung:

(a) $$K + iS + K'' + iS'' = -\frac{2(\nu+\mu i)+1}{z}(K' + iS').$$

Setzen wir ferner in dem Ausdruck für K $\nu+1$ statt ν, so erhalten wir:

$$K^{\nu+1} = \int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\cdot\sin^{2\nu+2}\omega\cdot\cos(2\mu\log\sin\omega)\cdot d\omega$$

$$= \int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\cdot\sin^{2\nu}\omega\cdot\cos(2\mu\log\sin\omega)\cdot d\omega$$

$$-\int_0^\pi \cos(z\cos\omega)\cdot\cos^2\omega\cdot\sin^{2\nu}\omega\cdot\cos(2\mu\log\sin\omega)\cdot d\omega,$$

oder:

$$K^{\nu+1} = K + K''.$$

Ebenso findet sich:

$$S^{\nu+1} = S + S'',$$

und wenn man die letztere Gleichung mit i multiplicirt zur ersteren addirt:

(b) $$K + iS + K'' + iS'' = K^{\nu+1} + iS^{\nu+1},$$

eine zweite wichtige Relation.

7. Indem man die Gleichungen (a) und (b) mit einander combinirt, erhält man zunächst:

$$K' + iS' = -\frac{z}{2(\nu+\mu i)+1}(K^{\nu+1} + iS^{\nu+1}).$$

Nun ist aber nach der Definition:

$$K' + iS' = \sqrt{\pi} \cdot 2^{\nu+\mu i} \cdot \Gamma_{(\nu+\mu i+\frac{1}{2})} \frac{\partial\left(z^{-(\nu+\mu i)} J^{\nu+\mu i}_{(z)}\right)}{\partial z}$$

und

$$K^{\nu+1} + iS^{\nu+1} = \sqrt{\pi} \cdot 2^{\nu+\mu i+1} \cdot \Gamma_{(\nu+\mu i+\frac{1}{2}+1)} \cdot z^{-(\nu+\mu i+1)} J^{\nu+\mu i+1}_{(z)}.$$

Setzt man diese Werthe ein und bedenkt, dass

$$(2(\nu+\mu i)+1)\,\Gamma_{(\nu+\mu i+\frac{1}{2})} = 2(\nu+\mu i+\tfrac{1}{2})\,\Gamma_{(\nu+\mu i+\frac{1}{2})} = 2\,\Gamma_{(\nu+\mu i+\frac{1}{2}+1)}$$

ist, so hat man sofort:

(A) $$\frac{\partial\left(z^{-(\nu+\mu i)} J^{\nu+\mu i}_{(z)}\right)}{\partial z} = -z^{-(\nu+\mu i)} J^{\nu+\mu i+1}_{(z)},$$

d. i. das erste Grundgesetz der Bessel'schen Functionen, welches sonach auch für complexe Indices gültig bleibt.

Differentiiren wir diese Gleichung nochmals, indem wir dabei von der durch sie vorgeschriebenen Regel Gebrauch machen, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^2\left(z^{-(\nu+\mu i)} J^{\nu+\mu i}_{(z)}\right)}{\partial z^2} = z^{-(\nu+\mu i)} J^{\nu+\mu i+2}_{(z)} - z^{-(\nu+\mu i+1)} J^{\nu+\mu i+1}_{(z)}.$$

Andrerseits aber ist vermöge der Definition:

$$\frac{\partial^2\left(z^{-(\nu+\mu i)} J^{\nu+\mu i}_{(z)}\right)}{\partial z^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2^{\nu+\mu i}} \frac{1}{\Gamma_{(\nu+\mu i+\frac{1}{2})}} (K'' + iS''),$$

oder, wenn wir von der Relation (b) Gebrauch machen:

$$\frac{\partial^2\left(z^{-(\nu+\mu i)} J^{\nu+\mu i}_{(z)}\right)}{\partial z^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2^{\nu+\mu i}} \frac{1}{\Gamma_{(\nu+\mu i+\frac{1}{2})}} (K^{\nu+1} + iS^{\nu+1} - K - iS).$$

Führen wir hier zur Rechten statt der K und S die J ein, so lautet unsere Gleichung:

$$\frac{\partial^2\left(z^{-(\nu+\mu i)} J^{\nu+\mu i}_{(z)}\right)}{\partial z^2} = \frac{2\,\Gamma_{(\nu+\mu i+\frac{1}{2}+1)}}{\Gamma_{(\nu+\mu i+\frac{1}{2})}} z^{-(\nu+\mu i+1)} J^{\nu+\mu i+1}_{(z)} - z^{-(\nu+\mu i)} J^{\nu+\mu i}_{(z)},$$

oder endlich, weil

$$\frac{2\,\Gamma(\nu+\mu i+\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(\nu+\mu i+\frac{1}{2})} = 2(\nu+\mu i)+1$$

ist:

$$\frac{\partial^2\left(z^{-(\nu+\mu i)}J_{(z)}^{\nu+\mu i}\right)}{\partial z^2} = (2(\nu+\mu i)+1)\,z^{-(\nu+\mu i+1)}J_{(z)}^{\nu+\mu i+1} - z^{-(\nu+\mu i)}J_{(z)}^{\nu+\mu i}.$$

Setzen wir jetzt den oben durch Differentiation gewonnenen und diesen soeben abgeleiteten Werth von $\frac{\partial^2\left(z^{-(\nu+\mu i)}J_{(z)}^{\nu+\mu i}\right)}{\partial z^2}$ einander gleich, so erhalten wir nach gehöriger Reduction die Gleichung:

$$(B)\qquad J_{(z)}^{\nu+\mu i+2} = \frac{2(\nu+\mu i+1)}{z}J_{(z)}^{\nu+\mu i+1} - J_{(z)}^{\nu+\mu i},$$

welche das zweite Grundgesetz der Bessel'schen Functionen auch für complexe Indices ausspricht.

8. Nachdem diese beiden Grundformeln (A) und (B) erwiesen sind, gelten selbstverständlich auch alle anderen Relationen, welche blosse Consequenzen von (A) und (B) sind; also beispielsweise nicht blos

$$(A)\qquad \frac{\partial\left(z^{-(\nu+\mu i)}J_{(z)}^{\nu+\mu i}\right)}{\partial z} = -z^{-(\nu+\mu i)}J_{(z)}^{\nu+\mu i+1},$$

sondern auch

$$(A')\qquad \frac{\partial\left(z^{\nu+\mu i}J_{(z)}^{\nu+\mu i}\right)}{\partial z} = z^{\nu+\mu i}J_{(z)}^{\nu+\mu i-1}.$$

Ferner:

$$(C)\qquad \frac{\partial^m\left(z^{-\frac{\nu+\mu i}{2}}J_{(\sqrt{z})}^{\nu+\mu i}\right)}{\partial z^m} = (-\tfrac{1}{2})^m\cdot z^{-\frac{\nu+\mu i+m}{2}}J_{(\sqrt{z})}^{\nu+\mu i+m}$$

$$(C')\qquad \frac{\partial^m\left(z^{\frac{\nu+\mu i}{2}}J_{(\sqrt{z})}^{\nu+\mu i}\right)}{\partial z^m} = (\tfrac{1}{2})^m\cdot z^{\frac{\nu+\mu i-m}{2}}J_{(\sqrt{z})}^{\nu+\mu i-m}.$$

Freilich würden, der obigen Definition zu Folge, diese sämmtlichen Gleichungen nur so lange gelten, als der reelle Theil der vorkommenden Indices grösser als $-\frac{1}{2}$ ist. Durch die Gleichungen (C) und (C') sind wir aber in den Stand gesetzt, die Definition der Bessel'schen Function zu ergänzen für den Fall, dass der reelle Theil des Index negativ und kleiner ist als $-\frac{1}{2}$, indem wir hierzu den Weg betreten, welcher § 4. des schon mehrmals citirten Schriftchens gezeigt ist. Aus (C') folgt nämlich, wenn $\nu+m$ statt ν gesetzt wird:

$$(\tfrac{1}{2})^m\cdot z^{\frac{\nu+\mu i}{2}}J_{(\sqrt{z})}^{\nu+\mu i} = \frac{\partial^m\left(z^{\frac{\nu+\mu i+m}{2}}J_{(\sqrt{z})}^{\nu+\mu i+m}\right)}{\partial z^m}$$

oder

$$(\tfrac{1}{2})^m\cdot z^{\frac{\nu+\mu i}{2}}J_{(\sqrt{z})}^{\nu+\mu i} = \frac{\partial^m\left(z^{\nu+\mu i+m}z^{-\frac{\nu+\mu i+m}{2}}J_{(\sqrt{z})}^{\nu+\mu i+m}\right)}{\partial z^m}.$$

Wenden wir nun zur Rechten den Satz

$$\frac{\partial^m (PQ)}{\partial z^m} = \sum_{p=0}^{p=m} \frac{m^{p-1}}{p!} \cdot \frac{\partial^p P}{\partial z^p} \cdot \frac{\partial^{m-p} Q}{\partial z^{m-p}}$$

an, indem wir berücksichtigen, dass

$$\frac{\partial^p z^{\nu+\mu i+m}}{\partial z^p} = (\nu+\mu i+m)^{p-1} \cdot z^{\nu+\mu i-m-p}$$

und nach (C):

$$\frac{\partial^{m-p}\left(z^{-\frac{\nu+\mu i+m}{2}} J^{\nu+\mu i+m}_{(V z)}\right)}{\partial z^{m-p}} = (-\tfrac{1}{2})^{m-p} \cdot z^{-\frac{\nu+\mu i+2m-p}{2}} J^{\nu+\mu i+2m-p}_{(V z)}$$

ist, so erhalten wir zunächst:

$$(\tfrac{1}{2})^m \cdot z^{-\frac{\nu+\mu i}{2}} J^{\nu+\mu i}_{(V z)} = \Sigma (-\tfrac{1}{2})^{m-p} \cdot \frac{m^{p-1}(\nu+\mu i+m)^{p-1}}{p!} \cdot z^{-\frac{\nu+\mu i-p}{2}} J^{\nu+\mu i+2m-p}_{(V z)}$$

oder endlich, wenn man z^2 statt z schreibt, und dann beiderseits mit $2^m z^{-(\nu+\mu i)}$ multiplicirt:

$$(D_2) \qquad J^{\nu+\mu i}_{(z)} = (-1)^m \sum_{p=0}^{p=m} (-2)^p \cdot \frac{m^{p-1}(\nu+\mu i+m)^{p-1}}{p!} \cdot z^{-p} J^{\nu+\mu i+2m-p}_{(z)}$$

Die Bessel'sche Function $J^{\nu+\mu i}_{(z)}$ lässt sich somit ausdrücken durch eine endliche, nach Bessel'schen Functionen geordnete Reihe, welche, wie man sich leicht überzeugt, den Grundgesetzen (A) und (B) gehorcht. In dieser Reihe kommen selbst dann, wenn ν beliebig negativ ist, nur solche Bessel'sche Functionen vor, welche die Bedingungen der Definition (D_1) erfüllen, falls man nur das positiv ganze m so wählt, dass $\nu + m > -\frac{1}{2}$ wird.

Wir betrachten daher die Gleichung (D_2) *als Definition der Bessel'schen Function für den Fall, dass* $\nu < -\frac{1}{2}$ *ist.*

Man würde nach (D_2) beispielsweise erhalten:

$$J^{-1+\mu i}_{(z)} = -J^{1+\mu i}_{(z)} + \frac{\mu i}{z} J^{\mu i}_{(z)}$$

$$J^{-2+\mu i}_{(z)} = J^{2+\mu i}_{(z)} + \frac{4\mu i}{z} J^{1+\mu i}_{(z)} + \frac{4\mu i(\mu i-1)}{z^2} J^{\mu i}_{(z)}$$

$$J^{-3+\mu i}_{(z)} = -J^{3+\mu i}_{(z)} + \frac{6\mu i}{z} J^{2+\mu i}_{(z)} - \frac{12\mu i(\mu i-1)}{z^2} J^{1+\mu i}_{(z)} + \frac{8\mu i(\mu i-1)(\mu i-2)}{z^3} J^{\mu i}_{(z)}$$

. . . . . .

Hiermit ist also die Bedeutung der Bessel'schen Functionen für *jeden beliebigen* Index festgestellt, und wir können von nun an $J^{\nu}_{(z)}$ als Function zweier complexer Variabeln, des Arguments z und des Index ν, betrachten.

9. Das vollständige Integral der Differentialgleichung:

$$(III) \qquad x^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ax \frac{\partial y}{\partial x} + (b + cx^{2\beta}) y = 0$$

kann jetzt in allen Fällen angegeben werden, welche reelle, imaginäre oder complexe Werthe die in ihr vorkommenden Constanten auch haben mögen. Das Integral lautet stets:

$$(\mathrm{III_a}) \qquad y = x^{-\frac{a-1}{2}}\left[AJ^{\nu}_{\left(\sqrt{c}\,\frac{x^\beta}{\beta}\right)} + BJ^{-\nu}_{\left(\sqrt{c}\,\frac{x^\beta}{\beta}\right)}\right],$$

worin

$$\nu = \frac{1}{\beta}\sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - b}$$

ist.

Nur wenn $\beta = 0$ oder $c = 0$ ist, verliert dieses Integral seine Brauchbarkeit. In beiden Fällen nimmt obige Gleichung die Form an:

$$(\mathrm{III'}) \qquad x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ax\frac{\partial y}{\partial x} + by = 0.$$

Die Supposition $y = x^\lambda$ liefert sofort:

$$\lambda = -\frac{a-1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - b}$$

und wir erhalten als vollständiges Integral:

$$(\mathrm{III_b}) \qquad y = x^{-\frac{a-1}{2}}\left(Ax^{+\sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - b}} + Bx^{-\sqrt{\left(\frac{a-1}{2}\right)^2 - b}}\right),$$

welches übrigens auch wieder auf ein blos particuläres zusammenschrumpft, wenn $b = \left(\frac{a-1}{2}\right)^2$ ist. Dann aber hat man für die Gleichung (siehe oben § 3.):

$$(\mathrm{III''}) \qquad x^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ax\frac{\partial y}{\partial x} + \left(\frac{a-1}{2}\right)^2 y = 0$$

das vollständige Integral:

$$(\mathrm{III_c}) \qquad y = x^{-\frac{a-1}{2}}(A + B\log x).$$

Es versteht sich von selbst, dass mit dieser Differentialgleichung (III) auch alle in dieser Abhandlung erwähnten speciellen Gleichungen ebenso erschöpfend integrirt sind. Der sogenannten Bessel'schen Differentialgleichung z. B., nämlich:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial y}{\partial x} + \left(1 - \frac{a}{x^2}\right)y = 0,$$

welche bisher blos für ein positives a integrirt worden war, genügt stets das vollständige Integral:

$$y = AJ^{\sqrt{a}}_{(x)} + BJ^{-\sqrt{a}}_{(x)},$$

welchen Werth die Grösse a auch annehmen mag.

Erlangen, December 1870.

Zur Theorie der Krümmungslinien und der dreifachen Orthogonalsysteme.

Von H. Stahl in Berlin.

§ 1.

Eine Verallgemeinerung der elliptischen Coordinaten.

Bei den Problemen, die sich auf Linien einer Fläche beziehen, handelt es sich zumeist um Einführung eines die Differentialgleichungen vereinfachenden, den Eigenschaften der Fläche angepassten Coordinatensystems. Im Folgenden ist von einem allgemeinen Coordinatensystem die Rede, von dem die elliptischen Coordinaten ein specieller Fall sind und dessen Einführung sich besonders bei algebraischen Flächen empfehlen dürfte. Ich gebe eine Anwendung desselben auf die Krümmungslinien der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung und auf das dreifache Orthogonalsystem eines sehr einfachen Flächensystems dritter Ordnung.

Ist $u = 0$ die Gleichung einer Fläche, sind u_i die ersten, u_{ik} die zweiten Differentialquotienten von u nach x, y, z; ist ferner (x, y, z) ein Punkt der Fläche, (ξ, η, ζ) ein Punkt der Normale, so hat man

$$\lambda \,.\, u_1 = x - \xi \quad \lambda \,.\, u_2 = y - \eta \quad \lambda \,.\, u_3 = z - \zeta. \tag{1}$$

Schneiden sich zwei aufeinanderfolgende Normalen, so ist:

$$\begin{aligned} u_1 d\lambda + \lambda du_1 &= dx \\ u_2 d\lambda + \lambda du_2 &= dy \\ u_3 d\lambda + \lambda du_3 &= dz\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Elimination von λ und $d\lambda$ giebt die Differentialgleichung der Krümmungslinien von $u = 0$:

$$\begin{vmatrix} u_1 & du_1 & dx \\ u_2 & du_2 & dy \\ u_3 & du_3 & dz \end{vmatrix} = 0. \tag{3}$$

Die Entwickelung aber von (2) nach dx, dy, dz giebt die Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\left(u_{11} - \frac{1}{\lambda}\right) dx + u_{12}\, dy + u_{13}\, dz &= -u_1 \cdot \frac{d\lambda}{\lambda} \\
u_{12}\, dx + \left(u_{22} - \frac{1}{\lambda}\right) dy + u_{23}\, dz &= -u_2 \cdot \frac{d\lambda}{\lambda} \qquad (4) \\
u_{13}\, dx + u_{23}\, dy + \left(u_{33} - \frac{1}{\lambda}\right) dz &= -u_3 \cdot \frac{d\lambda}{\lambda},
\end{aligned}$$

aus denen man sehr einfach die Orthogonalität der Krümmungslinien beweist. Verbindet man mit (4) die Gleichung

$$u_1\, dx + u_2\, dy + u_3\, dz = 0, \qquad (5)$$

so erhält man durch Elimination von dx, dy, dz, $\frac{d\lambda}{\lambda}$ zur Bestimmung von λ als Function von $x\,y\,z$ die quadratische Gleichung:

$$\begin{vmatrix} u_{11} - \frac{1}{\lambda} & u_{12} & u_{13} & u_1 \\ u_{12} & u_{22} - \frac{1}{\lambda} & u_{23} & u_2 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} - \frac{1}{\lambda} & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0. \qquad (6)$$

Bezeichnet man durch U_{ik} die Unterdeterminanten von

$$\Sigma \pm u_{11}\, u_{22}\, u_{33}$$

und setzt

$$\begin{aligned}
\varphi(u_1\, u_2\, u_3) &= \Sigma\, u_{ik}\, u_i\, u_k \\
\Phi(u_1\, u_2\, u_3) &= \Sigma\, U_{ik}\, u_i\, u_k
\end{aligned} \qquad (i \text{ und } k = 1, 2, 3), \qquad (7)$$

so stellt sich (6) nach λ entwickelt dar in der Form

$$\lambda^2 . \Phi(u_1\, u_2\, u_3) + \lambda \left\{ \varphi(u_1\, u_2\, u_3) - (u_{11} + u_{22} + u_{33})(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \right\} + (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 0, \qquad (8)$$

die ich durch

$$\Delta(u, \lambda) = 0$$

oder auch kurz durch $\Delta = 0$ bezeichnen will.

Versteht man nun unter λ_1, λ_2 zwei Parameter und bestimmt x, y, z als Functionen derselben aus den 3 Gleichungen

$$u = 0 \qquad \Delta(u, \lambda_1) = 0 \qquad \Delta(u, \lambda_2) = 0,$$

so hat man in λ_1, λ_2 das oben bezeichnete Coordinatensystem. Um die Coordinaten λ_1, λ_2 einzuführen, kann man $\Delta(u, \lambda) = 0$ beliebig mit Hülfe von $u = 0$ verändern; die so reducirte Gleichung bezeichne ich durch

$$D(u, \lambda) = 0.$$

Man bemerkt leicht, was für algebraische Flächen wichtig ist, dass $\Delta(u, \lambda)$ desgleichen die Functionen $\varphi(u_1\, u_2\, u_3)$, $\Phi(u_1\, u_2\, u_3)$, $u_{11} + u_{22} + u_{33}$, $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ Covarianten von u für orthogonale Transformation sind. Denn bezeichnet man die Determinante einer solchen Transformation durch

$$\Sigma \pm l_1\, m_2\, n_3$$

und geht u durch die Transformation über in v, so hat man:

$$v_i = l_i u_1 + m_i u_2 + n_i u_3$$

$$v_{ik} = l_i l_k u_{11} + m_i m_k u_{22} + n_i n_k u_{33} + (l_i m_k + l_k m_i) u_{12} + (m_i n_k + m_k n_i) u_{23} + (n_i l_k + n_k l_i) u_{31}.$$

Mit Berücksichtigung dieser Gleichungen und der sechs Relationen zwischen den Coefficienten l, m, n der orthogonalen Substitution, geht aber die für u gebildete Determinante (6), wenn sie zweimal mit der Transformationsdeterminante multiplicirt wird, gerade in dieselbe Determinante für v über.

Um die Coordinaten λ_1, λ_2 in die Differentialgleichung (3) der Krümmungslinien von $u = 0$ einzuführen, empfiehlt es sich, dieselbe erst, da $\Delta(u, \lambda)$ eine homogene Function zweiten Grades in u_1, u_2, u_3 ist, zu multipliciren mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} u_1 & \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_1} \\ u_2 & \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_2} \\ u_3 & \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_3} & \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \lambda_1 . \lambda_2 (\lambda_1 - \lambda_2) . \begin{vmatrix} u_1 & \varphi' u_1 & \Phi' u_1 \\ u_2 & \varphi' u_2 & \Phi' u_2 \\ u_3 & \varphi' u_3 & \Phi' u_3 \end{vmatrix} . \quad (10)$$

Benutzt man die Form der linken Seite, so erhält man, mit Unterdrückung des Factors $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$ als Differentialgleichung der Krümmungslinien von $u = 0$:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_3} \cdot du_3 & \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_1} \cdot dx + \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_2} \cdot dy + \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_3} \cdot dz \\ \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_1} \cdot du_1 + \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_2} \cdot du_2 + \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_3} \cdot du_3 & \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_1} \cdot dx + \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_2} \cdot dy + \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_3} \cdot dz \end{vmatrix} = 0, \quad (11$$

die durch die Gleichungen (9) in die Coordinaten λ_1, λ_2 überzuführen ist. Ich gehe sogleich zu den Anwendungen über.

§ 2.

Die Krümmungslinien der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung.

Bildet man für das auf den Mittelpunkt und die Hauptachsen bezogene Ellipsoid die Gleichung (6), so hat man sofort durch Reduction in $D(u, \lambda) = 0$ die Gleichung des confocalen Ellipsoids, woraus die Identität der Coordinaten λ_1 λ_2 mit den elliptischen Coordinaten hervorgeht.

Die allgemeine Fläche zweiter Ordnung sei

$$u = \tfrac{1}{2}(u_1 x + u_2 y + u_3 z + u_4) = 0 \qquad \text{wo}$$
$$u_i = a_{i1} x + a_{i2} y + a_{i3} z + a_{i4} \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (12)$$

Setzt man:

$$A = \Sigma \pm a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} \quad (13)$$

und bezeichnet die Unterdeterminanten von A durch A_{ik}, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} \Phi' u_1 &= 2(A_{44}x - A_{14}) \\ \Phi' u_2 &= 2(A_{44}y - A_{24}) \\ \Phi' u_3 &= 2(A_{44}z - A_{34}) \\ \Phi(u_1\, u_2\, u_3) &= -A. \end{aligned} \tag{14}$$

Ferner findet man, indem man den Coefficienten von λ in $\Delta(u, \lambda) = 0$ aus der Determinantenform (6) bildet:

$$\Delta(u,\lambda) = -A\lambda^2 + \lambda\{A_{44}(x^2+y^2+z^2) - 2(A_{14}x + A_{24}y + A_{34}z) + (A_{11}+A_{22}+A_{33})\} + (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = 0. \tag{15}$$

Hier ist also der Coefficient von λ gleich $A(\lambda_1 + \lambda_2)$; das letzte Glied gleich $-A \,.\, \lambda_1 \,.\, \lambda_2$. Man hat demnach:

$$\varphi' u_1\, dx + \varphi' u_2\, dy + \varphi' u_3\, dz = d(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) = -A(\lambda_2\, d\lambda_1 + \lambda_1\, d\lambda_2) \tag{16}$$

$$\Phi' u_1\, dx + \Phi' u_2 dy + \Phi' u_3 dz = A_{44}\, d(x^2+y^2+z^2) - 2(A_{14}\, dx + A_{24}\, dy + A_{34}\, dz) = A(d\lambda_1 + d\lambda_2), \tag{17}$$

folglich:

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial u_1} dx + \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_2} dy + \frac{\partial \Delta_1}{\partial u_3} dz = \lambda_1^2 (\Phi' u_1\, dx + \Phi' u_2 dy + \Phi' u_3 dz) + \lambda_1 (\varphi' u_1\, dx + \varphi' u_2\, dy + \varphi' u_3 dz) = A \,.\, \lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2)\, d\lambda_1$$

$$\frac{\partial \Delta_2}{\partial u_1} dx + \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_2} dy + \frac{\partial \Delta_2}{\partial u_3} dz = A \,.\, \lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)\, d\lambda_2. \tag{18}$$

Endlich ist, da u_{ik} constant:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \Delta}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \Delta}{\partial u_3} du_3 + \frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} d\lambda = 0 \tag{19}$$

und aus (15):

$$\frac{\partial \Delta_1}{\partial \lambda_1} = A(\lambda_2 - \lambda_1) \qquad \frac{\partial \Delta_2}{\partial \lambda_2} = A(\lambda_1 - \lambda_2). \tag{20}$$

Setzt man die Werthe (18) und (20) in die allgemeine Differentialgleichung (11) der Krümmungslinien ein, so erhält man:

$$A^2 \,.\, (\lambda_1 - \lambda_2)^3 \,.\, d\lambda_1\, d\lambda_2 = 0,$$

mithin:

$$\lambda_1 = \text{Const.} \qquad \lambda_2 = \text{Const.} \tag{21}$$

als die Gleichungen der Krümmungslinien der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung.

§ 3.

Ueber dreifache Orthogonalsysteme.

Wie die Differentialgleichung der Krümmungslinien kann man auch die Differentialgleichung der kürzesten Linien von $u = 0$ direct in die Coordinaten $\lambda_1\, \lambda_2$ transformiren, wieder nach Multiplication mit der Determinante (10). Für die allgemeine Fläche zweiter Ordnung würde es sich dabei um die Bildung der drei Ausdrücke

$$dx^2 + dy^2 + dz^2$$
$$du_1 \cdot dx + du_2 \cdot dy + du_3 \cdot dz$$
$$du_1^2 + du_2^2 + du_3^2$$

in $\lambda_1 \lambda_2$ handeln, wenn eine geschickt angelegte Rechnung nöthig ist. Man kann die Gleichungen der kürzesten Linie der allgemeinen Fläche zweiter Ordnung übrigens, da $\Delta(u, \lambda)$ eine Covariante von u für orthogonale Transformation ist, aus den Jacobi'schen Gleichungen der kürzesten Linien des Ellipsoids unmittelbar ableiten. Ich gebe statt dessen noch eine Anwendung der Coordinaten $\lambda_1 \lambda_2$ zur Auffindung dreifach orthogonaler Flächensysteme.

Ist $u_\alpha = 0$ ein Flächensystem mit dem Parameter α, so bringe man mit Hülfe von $\lambda_1 \lambda_2$ die Gleichungen der Krümmungslinien von $u_\alpha = 0$ auf die Form:

$$c_1 = T_1(\lambda_1 \lambda_2), \quad c_2 = T_2(\lambda_1 \lambda_2), \tag{22}$$

wo $c_1 c_2$ die Integrationsconstanten sind. Bildet man aus diesen Gleichungen die quadratische Gleichung in C:

$$C^2 - C(T_1 + T_2) + T_1 T_2 = 0, \tag{23}$$

deren Wurzeln c_1 und c_2 sind und trägt in dieselbe aus $\Delta(u, \lambda_1) = 0$ und $\Delta(u, \lambda_2) = 0$ λ_1 und λ_2 als Functionen von (x, y, z) ein, so erhält man eine Gleichung, die ich bezeichne durch

$$D(u_\alpha, C) = 0.$$

Die drei Gleichungen:

$$u_\alpha = 0 \quad D(u_\alpha, c_1) = 0 \quad D(u_\alpha, c_2) = 0 \tag{24}$$

geben x, y, z als Functionen von $c_1 c_2$ und man erhält die Coordinaten der einen und der anderen Krümmungslinie von $u_\alpha = 0$, wenn man c_1 resp. c_2 constant setzt. Hierbei kann wieder $D(u_\alpha, C) = 0$ mit Hülfe von $u_\alpha = 0$ umgeformt werden.

Erfüllt nun das Flächensystem $u_\alpha = 0$ mit dem Parameter α die Bedingungen*), ein dreifach orthogonales System zu erzeugen mit den Parametern $\alpha, \gamma_1, \gamma_2$:

$$u_\alpha = 0 \quad \gamma_1 = v \quad \gamma_2 = w, \tag{25}$$

so muss sich, da die durch die zwei letzten Gleichungen (24) dargestellten Flächen sich auf $u_\alpha = 0$ schon orthogonal schneiden, eine Function γ von α und C bestimmen lassen:

$$\gamma = F(\alpha, C) \tag{26}$$

derart, dass auch die Orthogonalität der Flächensysteme α und γ eintritt. Die Gleichungen:

$$\gamma_1 = F(\alpha, c_1) \quad \gamma_2 = F(\alpha, c_2) \tag{27}$$

*) s. Serret. Liouville's Journal t. XII, 1847, p. 241 ff.

stellen dann, wenn man aus (24) α, c_1, c_2 durch (x, y, z) ersetzt, mit $u_\alpha = 0$ zusammen das dreifache Orthogonalsystem (25) dar.

Die Bedingung der Orthogonalität zweier Flächensysteme mit den Parametern α und γ ist nun, wenn man $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = \alpha_1$ u. s. w. setzt:

$$\gamma_1 \alpha_1 + \gamma_2 \alpha_2 + \gamma_3 \alpha_3 = 0.$$

Aus ihr erhält man für die Function $\gamma = F(\alpha, C)$ die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \cdot (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2) + \frac{\partial \gamma}{\partial C} \cdot (\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3) = 0. \quad (28)$$

Zur Bestimmung von α_i und C_i aus den die Parameter α und C implicite enthaltenden Gleichungen $u_\alpha = 0$ und $D(u_\alpha, C) = 0$ hat man:

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} \cdot \alpha_1 = 0$$
$$\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial C} \cdot C_1 + \frac{\partial D}{\partial \alpha} \cdot \alpha_1 = 0$$

nebst den entsprechenden Gleichungen für y und z; es ergiebt sich der Ausdruck:

$$\frac{\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \alpha_3 C_3}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = \frac{\frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha}}{\frac{\partial D}{\partial C}} \cdot \frac{\frac{\partial D}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_\alpha}{\partial z}}{\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial z}\right)^2} - \frac{\frac{\partial D}{\partial \alpha}}{\frac{\partial D}{\partial C}}. \quad (29)$$

Diese Function von x, y, z, α, C muss sich, wenn ein dreifach orthogonales System möglich ist, durch $u_\alpha = 0$ und $D(u_\alpha, C) = 0$ in eine Function $\chi(\alpha, C)$ von α und C allein überführen lassen und man hat dann für γ die partielle Differentialgleichung:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} + \chi(\alpha, C) \cdot \frac{\partial \gamma}{\partial C} = 0, \quad (30)$$

für deren eine Lösung γ auch jede Function von γ gesetzt werden kann.

§ 4.

Anwendung auf das Flächensystem $xyz = \alpha$.

Als Beispiel zu dem Vorstehenden nehme ich das von Serret a. a. O. in anderer Weise behandelte einfache Flächensystem dritter Ordnung:

$$\mu_\alpha = x \,.\, y \,.\, z - \alpha = 0. \quad (31)$$

Setzt man

$$x^2 + y^2 + z^2 = a$$
$$x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 = b, \quad (32)$$

so hat man sofort nach § 1.:

$$D(u_\alpha, \lambda) = 3\lambda^2 \alpha^2 + 2\lambda \alpha a + b, \quad (33)$$

also

$$a = -\frac{3\alpha}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) \qquad b = 3\alpha^2 . \lambda_1 \lambda_2 \tag{34}$$

und x^2, y^2, z^2 sind die Wurzeln der cubischen Gleichung in t:

$$2t^3 + 3t^2\alpha(\lambda_1 + \lambda_2) + 6t\alpha^2 . \lambda_1 \lambda_2 - 2\alpha^2 = 0,$$

die die Coordinaten x, y, z als Functionen von $\lambda_1 \lambda_2$ liefert.

Zunächst ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien auf λ_1, λ_2 zu transformiren und zu integriren. Die Determinante (10) § 1. geht mit Vernachlässigung eines gleichgültigen Factors über in

$$\begin{vmatrix} x^3 & y^3 & z^3 \\ x & y & z \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man mit dieser Determinante die Differentialgleichung (3) und benutzt ausser (31) und (34) die aus ihnen hergeleiteten Gleichungen:

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0$$

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = -\frac{3\alpha}{4}(d\lambda_1 + d\lambda_2)$$

$$\frac{dx}{x^3} + \frac{dy}{y^3} + \frac{dz}{z^3} = -\tfrac{3}{2}(\lambda_2 d\lambda_1 + \lambda_1 d\lambda_2)$$

$$x^3 dx + y^3 dy + z^3 dz = \frac{3\alpha^2}{8}\{(3\lambda_1 - \lambda_2)d\lambda_1 + (3\lambda_2 - \lambda_1)d\lambda_2\},$$

so erhält man als Differentialgleichung der Krümmungslinien von (31):

$$d\lambda_1^2(2\lambda_2^2 - \lambda_1\lambda_2) + d\lambda_2^2(2\lambda_1^2 - \lambda_1\lambda_2) + 2\,d\lambda_1 d\lambda_2(3\lambda_1\lambda_2 - \lambda_1^2 - \lambda_2^2) = 0$$

die in die Factoren zerfällt:

$$\lambda_2 d\lambda_1 + (2\lambda_1 - \lambda_2)d\lambda_2 = 0$$
$$(2\lambda_2 - \lambda_1)d\lambda_1 + \lambda_1 d\lambda_2 = 0,$$

deren Integrale nach bekannter Methode:

$$c_1 = \lambda_2^2(3\lambda_1 - \lambda_2) \qquad c_2 = \lambda_1^2(3\lambda_2 - \lambda_1). \tag{35}$$

Dies sind die Gleichungen der Krümmungslinien von $xyz = \alpha$ mit den Constanten c_1 und c_2. Aus (34) und (35) erhält man:

$$c_1 + c_2 = \frac{4a(2a^2 - 9b)}{27\alpha^3} \qquad c_1 . c_2 = \frac{4b^2(4b - a^2)}{27\alpha^6}.$$

Mithin sind c_1 und c_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung in C:

$$D(u_\alpha, C) = 27\alpha^6 C^2 - 4a\alpha^3(2a^2 - 9b) . C + 4b^2(4b - a^2) = 0, \tag{36}$$

die man benutzen würde, um x, y, z als Functionen von c_1, c_2 darzustellen. Setzt man nun:

$$M = 27\alpha^3 C + 18ab - 4a^3,$$

so findet sich:

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = 6\,\alpha^2 C\,.\,M \qquad \frac{\partial D}{\partial C} = 2\,\alpha^3 M$$

$$\frac{\partial D}{\partial x}\cdot\frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial D}{\partial y}\cdot\frac{\partial u_\alpha}{\partial y} + \frac{\partial D}{\partial z}\cdot\frac{\partial u_\alpha}{\partial z} = 8\,\alpha b M.$$

Bildet man hiermit den Ausdruck (29), so wird die Differentialgleichung für γ:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} - \frac{4 + 3\,\alpha C}{\alpha^2}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial C} = 0,$$

deren einfachste Lösung:

$$\gamma = \alpha^2\,.\,(\alpha C + 2)\,. \qquad (37)$$

Setzt man hieraus C in (36) ein und für α allenthalben $x\,y\,z$, so hat man eine quadratische Gleichung in γ, deren Wurzeln die Functionen v und w der Gleichungen (25) § 3. sind:

In der That geht die von Serret angegebene Gleichung:

$$\gamma = (2x^2 - y^2 - z^2)\,(2y^2 - z^2 - x^2)\,(2z^2 - x^2 - y^2)$$
$$\pm 2\,(x^4 + y^4 + z^4 - x^2y^2 - y^2z^2 - z^2x^2)^{\frac{3}{2}},$$

die quadrirt und in unserer Bezeichnung die Form annimmt:

$$\gamma^2 - 2\,\gamma\,(27\,\alpha^2 - 9\,ab + 2\,a^3)$$
$$+ 27\,(27\,\alpha^4 - 18\,\alpha^2 ab + 4\,\alpha^2 a^3 - a^2b^2 + 4\,b^3) = 0, \qquad (38)$$

durch die Substitution (37) unmittelbar in die Gleichung (36) über, wenn man die rechte Seite in (37) zuvor mit $\frac{27}{2}$ multiplicirt. Hat man es nur mit den Krümmungslinien von $x\,.\,y\,.\,z = \alpha$ zu thun, so ist die Gleichung (36) einfacher als (38).

Derselbe Weg führt zu dem durch das System von Paraboloiden $u_\alpha = yz - \alpha x = 0$ erzeugten dreifachen Orthogonalsystem, das Serret ebenfalls angiebt*; man hat für dasselbe $c_1 = \lambda_1$; $c_2 = \lambda_2$ und

$$D(u_\alpha, \lambda) = \lambda^2\alpha^2 + 2\,\lambda\alpha x - (\alpha^2 + y^2 + z^2) = 0$$
$$\gamma^2 = \alpha^2\,(\lambda^2 - 1),$$

die den Gleichungen (36) und (37) des vorigen Beispiels entsprechen.

*) s. auch Salmon Anal. Geom. d. R. übers. v. Fiedler. II. Thl. p. 564.

Berlin, November 1870.

Die Abbildung einer Fläche vierter Ordnung mit zwei sich schneidenden Doppelpaaren.

Von G. Korndörfer in Neumünster.

I.

Die Fläche enthält keine besonderen Knotenpunkte mehr.

§ 1.

Im Anschluss an meine frühere Abhandlung (Annalen I, S. 592 und II, S. 41) untersuche ich jetzt diejenigen Fälle der Fläche, bei welchen ein Aufbrechen der Doppelcurve stattfindet. Eine solche Fläche, die sonst keine weiteren Besonderheiten besitzt, wird durch die Gleichung dargestellt

$$(qr - ps)^2 = 4p^2\psi.$$

Die Doppelcurve zerfällt in ein Linienpaar, den Schnitt des Ebenenpaares qr mit der Ebene p; deren Schnittpunkte mit der Fläche ψ sind die 4 Rückkehrpunkte der Fläche 4ter Ordnung. Jede Ebene der Büschel $q = \sigma p$ oder $r = \sigma q$ schneidet einen Kegelschnitt aus der Fläche. Mit Hülfe von $q = \sigma p$ zerfällt ihre Gleichung in die Factoren $p^2 = 0$ und $(\sigma r + s)^2 - 4\psi = 0$. Die Verbindung von $q = \sigma p$ mit $(\sigma r + s)^2 - 4\psi = 0$ giebt die eine Kegelschnittschaar, die von $r = \sigma p$ mit $(\sigma q + s)^2 - 4\psi = 0$ die andern.

Es wäre zunächst zu untersuchen, wie viel Geradenpaare in jeder dieser Schaaren auftreten können. Bezieht man daher die Fläche auf ein Coordinatentetraeder, dessen 3 Ecken die Nebenecken des aus den 4 Rückkehrpunkten gebildeten vollständigen Vierecks sind, und dessen 4te Ecke einer der Schnittpunkte der Durchschnittslinie der Ebenen q und r mit der Fläche ψ ist, so lässt sich die Flächengleichung in der Form darstellen

$$4t^2[a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{11}xt + 2a_{21}yt + 2a_{34}zt]$$
$$= [(ax + by)(ax - by) + t(ax + \beta y + \gamma z + \delta t)]^2$$

und die eine Kegelschnittschaar ist durch den Complex der Gleichungen

$$[\sigma(ax - by) + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t]^2$$
$$- 4\{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{31}zt\} = 0$$
$$ax + by - \sigma t = 0$$

bestimmt.

So oft beide einander berühren, zerfällt der Kegelschnitt in ein Geradenpaar, was durch die in σ biquadratische Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} (\sigma a+\alpha)^2 - 4a_{11}, & (\sigma a+\alpha)(\beta-\sigma b), & \gamma(\sigma a+\alpha), & (\sigma a+\alpha)\delta - 4a_{14}, & a \\ (\sigma a+\alpha)(\beta-\sigma b) & (\beta-\sigma b)^2 - 4a_{22} & \gamma(\beta-\sigma b) & (\beta-\sigma b)\delta - 4a_{24}, & b \\ (\sigma a+\alpha)\gamma & \gamma(\beta-\sigma b) & \gamma^2 - 4a_{33} & \gamma\delta - 4a_{34}, & 0 \\ (\sigma a+\alpha)\delta - 4a_{14} & (\beta-\sigma b)\delta - 4a_{24} & \gamma\delta - 4a_{34} & \delta^2, & -\sigma \\ a & b & 0 & -\sigma, & 0 \end{vmatrix}$$

angezeigt wird.

Es kommen in jedem Kegelschnittbüschel 4 Geradenpaare vor; so erhält man die 16 Geraden der Fläche, die in 2 Gruppen zu je 8 zerfallen, dass jede Gruppe einer der Doppelgeraden zugeordnet ist.

Die doppelt berührenden Kegel der Fläche erhält man, wenn in der Gleichung $(\varphi + 2\lambda p^2)^2 = 4p^2(\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2)$ für λ ein solcher Werth substituirt wird, dass die Determinante der Gleichung 2^{ten} Grades $\psi + \lambda\varphi + \lambda^2 p^2 = 0$ erschwindet. Dieses führt zu der in λ biquadratischen Gleichung:

$$\lambda^2 + \lambda\delta = \frac{(a_{14} + \lambda\alpha)^2}{a_{11} + \lambda\alpha^2} + \frac{(a_{24} + \lambda\beta)^2}{a_{22} - \lambda b^2} + \frac{(a_{34} + \lambda\gamma)^2}{a_{33}}.$$

Es existiren 4 Kegel, welche die Fläche doppelt einhüllen und deren Tangentenebenen Kegelschnittschaaren aus derselben schneiden. Die Coordinaten der Spitzen genügen den Gleichungen

$$x(a_{11} + \lambda a^2) + t(a_{14} + \lambda\alpha) = 0$$
$$y(a_{22} - \lambda b^2) + t(a_{24} + \lambda\beta) = 0$$
$$z \cdot a_{33} + t(a_{34} + \lambda\gamma) = 0.$$

Dieses sind die Gleichungen einer Raumcurve 3^{ter} Ordnung, welche durch die Kegelspitzen und die 3 Nebenecken des vollständigen Vierecks geht.

Ist $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ die Gleichung der Tangentenebene eines der 4 doppelt berührenden Kegel, so ist dessen Gleichung $K = B^2 - AC$ und für den Schnitt dieser Ebene mit der Fläche ist $K = (B + \varrho C)^2$. Die Flächengleichung zerfällt mit Benutzung des Ausdrucks für K in die beiden Factoren:

$$\left.\begin{aligned} qr + p.s + 2p^2\lambda + 2p(B + \varrho C) &= 0 \\ qr + p.s + 2p^2\lambda - 2p(B + \varrho C) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und jeder Factor in Verbindung mit $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ gibt eine Kegelschnittschaar von K.

§ 2.

Um die Fläche auf eine Ebene eindeutig abzubilden, bediene ich mich des Kegels K in Verbindung mit dem Ebenenbüschel $q = \sigma p$. Die Flächengleichung zerfällt dann in die Factoren

$$\left\{\begin{array}{c} \sigma r + s + 2\lambda p + 2(B + \varrho C) = 0 \\ \sigma r + s + 2\lambda p - 2(B + \varrho C) = 0 \\ p = 0. \end{array}\right\}$$

welch beide ersteren 2 projectivische Ebenenbüschel darstellen. Einer dieser in Verbindung mit

$$\lambda + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$$
$$q - \sigma p = 0$$

stellt die Coordinaten eines variablen Punktes der Fläche als rationale Functionen 4^{ten} Grades in ϱ, σ dar. Ist $\Sigma u_i x_i = 0$ die Gleichung eines veränderlichen Punktes der Fläche, so erhält man durch Elimination der x die Gleichung

$$0 = [u,\ A + 2\varrho B + \varrho^2 C,\ q - \sigma p,\ \sigma r + s + 2\lambda p - 2(B + \varrho C)]$$

oder

$$0 = +2\lambda(u,\ A + 2\varrho B + \varrho^2 C,\ q - \sigma p,\ p) - 2(u,\ A + \varrho B,\ q - \sigma p,\ B + \varrho C$$
$$+ (u,\ A + 2\varrho B + \varrho^2 C,\ q - \sigma p,\ \sigma r + s).$$

Aus dieser Form geht wieder hervor, dass die höchsten Potenzen von ϱ, σ den 2^{ten} Grad nicht übersteigen.

Führe ich noch eine 3^{te} Veränderliche τ ein, so nehmen die bei der Abbildung benutzten 3 Gleichungen die homogene Form an:

$$s \cdot \tau + \sigma r + 2A\tau p + 2(B\tau + \varrho C) = 0$$
$$\tau q - \sigma p = 0$$
$$A\tau^2 + 2B\varrho\tau + C\varrho^2 = 0.$$

Sind alsdann ϱ, σ, τ die Dreieckscoordinaten eines Punktes der Ebene, so entspricht jedem Punkt der Ebene ein Punkt der Fläche und umgekehrt. Es entstehen auf diese Weise 16 Arten von Abbildungen, nämlich 2 Gruppen nach Wahl des Ebenenbüschels und jede Gruppe enthält wieder 8 Classen, der benutzten Kegelschnittschaar eines der 4 doppelt berührenden Kegel entsprechend. Setzt man in obigen Gleichungen $\tau = 0$, so reduciren sich dieselben auf

$$\left\{\begin{array}{c} \sigma r + 2\varrho C = 0 \\ \sigma p = 0 \\ C\varrho^2 = 0 \end{array}\right\}$$

und diese sind erfüllt, wenn

1) $\sigma = 0,\ C = 0$
2) $\varrho = 0,\ p = 0,\ r = 0$
3) $p = 0,\ C = 0,\ r = 0.$

Hieraus folgt, der Punkt $\tau = 0$, $\sigma = 0$, der ausserdem einen Doppelpunkt der Abbildung jedes ebenen Schnittes giebt, ist das Bild des in $C = 0$ liegenden Kegelschnitts. Der Punkt $\tau = 0$, $\varrho = 0$, der ebenfalls ein Doppelpunkt der Abbildung ist, stellt alle Punkte der Linie $p = 0$, $r = 0$ dar. Die ganze Linie $\tau = 0$ repräsentirt einen Punkt dieser Geraden $p = 0$, $r = 0$, nämlich den, in welchem sie von $C = 0$ geschnitten wird.

Kommen in der Kegelschnittschaar des Büschels $q = \sigma p$ die Geradenpaare $a_1 b_1$ $a_2 b_2$ $a_3 b_3$ $a_4 b_4$ in der Kegelschnittschar von k die Paare

$$a_1 c_1 \qquad a_2 c_2 \qquad a_3 c_3 \qquad a_4 c_4 ,$$

so tritt 4mal der Fall ein, dass 2 untereinander stehende Paare eine gemeinsame Gerade besitzen, welche dann in bekannter Weise die 4 festen Punkte der Abbildung ergeben.

Die Abbildung der einen Doppelgeraden ist der Doppelpunkt $\tau = 0$, $\varrho = 0$ in Verbindung mit der Geraden τ; die der andern muss dann nothwendiger Weise eine Curve dritter Ordnung sein, welche in $\tau = 0$, $\varrho = 0$ einen Doppelpunkt besitzt und den Punkt $\tau = 0$, $\sigma = 0$ einfach trifft. Die Tangentenrichtung derselben in diesem Punkte entspricht dem Schnitt der Doppelgeraden mit dem Kegelschnitt C und die Richtungen der Tangenten im Doppelpunkt entsprechen den Abbildungen des Punktes, in welchem sich die beiden Doppelgeraden treffen.

Jeder ebene Schnitt der Fläche bildet sich als Curve 4^{ter} Ordnung mit 2 Doppelpunkten in den Punkten $\tau = 0$, $\varrho = 0$ und $\tau = 0$, $\sigma = 0$ und einfachen Punkten in den 4 andern Fundamentalpunkten ab. Der Kegelschnitt C wird von demselben 2mal getroffen, den beiden Tangentenrichtungen in jenem Doppelpunkt entsprechend; die erste Doppelgerade wird einmal geschnitten, was aber in der Abbildung doppelt, nämlich durch die beiden Tangentenrichtungen im anderen Doppelpunkt angedeutet wird. Die Abbildungscurve trifft dann noch das Bild der 2^{ten} Doppelgeraden in einem Punktepaar, dem andern Doppelpunkt des Schnittes entsprechend.

Die 8 Geraden, welche die erste Doppelgerade treffen, bilden sich aber, als Kegelschnitte durch die beiden Doppelpunkte und je 3 der einfachen in Verbindung mit den 4 Geraden, welche die 4 Fundamentalpunkte mit dem ersten Doppelpunkt verbinden. Die 8, der andern Doppelgeraden angehörig, sind jene 4 Punkte selbst nebst den 4 sie mit dem andern Doppelpunkt verbindenden Geraden.

Die beiden Kegelschnittschaaren, welche den Doppelgeraden angehören, bilden sich als Strahlbüschel, dessen Scheitel ein Doppelpunkt, und als Curvenbüschel 3^{ter} Ordnung ab, dessen Gebilde durch alle Fundamentalpunkte gehen und einen Doppelpunkt im 2^{ten} Doppelpunkt besitzen. Curven derselben Schaar schneiden sich gar nicht, Curven verschie-

dener Schaaren in 2 Punkten, und jedes Gebilde trifft die ihm zugehörige Doppelgerade in 2 Punkten. 2 weitere Kegelschnittschaaren sind der Strahlbüschel und Curvenbüschel 3^{ter} Ordnung, die den beiden obigen entgegengesetzt liegen. Die 6 letzten endlich sind die 6 Kegelschnittschaaren, welche durch die beiden Doppelpunkte und je 2 der 4 einfachen gehen.

Die Abbildung der einen Doppelgeraden ist eine Curve 3^{ter} Ordnung durch alle Fundamentalpunkte mit einem Doppelpunkt in $\tau = 0$, $\varrho = 0$. Dieses giebt 8 Bestimmungsstücke derselben. Um weitere zu erhalten, legt man nur in der Gleichung eines ebenen Schnittes der Fläche $\Sigma u_i f_i = 0$ den u_i die Bedingung auf durch 2 weitere Punkte einer Verbindungsgeraden des Punktes τ, σ mit einem der Fundamentalpunkte zu gehen. Die Gleichung $\Sigma u_i f_i = 0$ zerfällt dann in $A(f + \lambda\varphi) = 0$ und der letzte Schnittpunkt des Curvenbüschels 3^{ter} Ordnung $f + \lambda\varphi$ giebt einen Abbildungspunkt der Doppelgeraden. Der ihm zugeordnete wird dann in bekannter Weise gefunden. . Die Tangentenrichtungen im Doppelpunkte jeder Curve der Schaar deuten die Abbildungen ihres Schnittes mit der anderen Doppelgeraden an. Geht der Doppelpunkt in einen Rückkehrpunkt über, so entsprechen die Rückkehrtangenten den Bildern der Rückkehrpunkte. In der Nähe des Punktes (τ, ϱ) verwandelt sich die Gleichung des Büschels $f + \lambda\varphi$ in die der beiden Tangenten des Doppelpunktes:

$$(a\tau^2 + 2b\tau\varrho + c\varrho^2) + \lambda(\alpha\tau^2 + 2\beta\tau\varrho + \gamma\varrho^2) = 0.$$

So oft beide Tangenten zusammenfallen, entsteht die Rückkehrtangente, was durch die in λ quadratische Gleichung

$$(b + \lambda\beta)^2 - (a + \lambda\alpha)(c + \lambda\gamma) = 0$$

angezeigt wird. Die beiden Werthe von λ entsprechen den Curven des Büschels, welche durch die beiden Rückkehrpunkte gehen. Man sieht auch leicht, dass die beiden Rückkehrtangenten mit den Linien ϱ und τ harmonisch liegen.

Legt man in der Gleichung $\Sigma u_i f_i = 0$ den u_i die Bedingung auf, dass diese Curve in einem der Fundamentalpunkte einen Doppelpunkt besitzt, so zerfällt der Schnitt in diese Gerade und einen Curvenbüschel 3^{ter} Ordnung, welch letzterer sich als Curvenbüschel 4^{ter} Ordnung mit 3 Doppelpunkten abbildet. Sie schneiden sich dann noch in einem weiteren Punkte, welcher dem Bilde der Doppelgeraden angehört. Unter jener Schaar finden sich wieder 2, die in (τ, ϱ) einen Rückkehrpunkt besitzen und die Rückkehrtangenten deuten abermals die Bilder der 2 Rückkehrpunkte der Doppelgeraden an.

Legt man in der Gleichung $\Sigma u_i f_i = 0$ den u_i die Bedingung auf, durch 2 weitere Punkte der Verbindungsgeraden der Ecke (ϱ, τ) mit einem der 4 Fundamentalpunkte zu gehen, so zerfällt $\Sigma u_i f_i = 0$ in

$A(f+\lambda\varphi)=0$. Der 2te Factor stellt einen Curvenbüschel 3ter Ordnung dar, welcher in der Ecke (ϱ, σ) einen allen Gebilden derselben gemeinsamen Doppelpunkt besitzt. Die Tangentenrichtung in der anderen nebst der Richtung jener Verbindungslinie gibt die Abbildung des Schnittpunktes mit der Doppelgeraden an. Daraus folgt, dass sich alle Curven der Schaar in (ϱ, σ) berühren müssen. Jede schneidet noch das Bild der anderen Doppelgeraden in einem Punktepaar, welches die Abbildung ihres Doppelpunktes ist. Unter der Schaar finden sich 2 vor, welche jenes Bild berühren und die Berührungspunkte geben die Abbildungen der beiden Rückkehrpunkte dieser Doppellinie. Dass jene Zahl wirklich 2 beträgt, findet man leicht, indem man die Bedingungen eines vollständigen Schnittpunktsystems entwickelt und die Integralsummen 3ter Gattung gleich Null setzt.

Bildet sich eine Gerade als Kegelschnitt durch die beiden Doppelpunkte und 3 der Fundamentalpunkte ab, so wird dieser von dem Bild eines ebenen Schnittes in 7 Punkten geschnitten. Legt man dann in der Gleichung $\Sigma u_i f_i = 0$ den μ_i die Bedingung auf, durch 2 weitere Punkte jenes Kegelschnittes zu gehen, so zerfällt $\Sigma u_i f_i$ in $A(f+\lambda\varphi)=0$. Es bedeutet dann $f+\lambda\varphi$ eine Kegelschnittschaar durch die beiden Doppelpunkte und den 4ten Fundamentalpunkt, dieselbe ist die Abbildung des Curvenbüschels 3ter Ordnung, in welchem die durch jene Gerade gelegte Ebenenschaar die Fläche schneidet. Alle diese Kegelschnitte müssen sich in der Ecke $(\tau\varrho)$ berühren und die Tangentenrichtung in diesem Punkte nebst der des Ergänzungskegelschnittes stellen die Abbildung des festen Doppelpunktes des Schnittes dar. Jeder Kegelschnitt schneidet dann noch das Bild der anderen Doppelgeraden in einem Punktepaar, welches die Abbildung des beweglichen Doppelpunktes des Schnittes ist. Jene Schaar enthält 2 Curven, welche dieses Bild berühren und die Berührungspunkte sind abermals die Bilder der 2 Rückkehrpunkte dieser Doppellinie.

Die oben erwähnten 2 Gruppen von Abbildungen unterscheiden sich dadurch von einander, dass sich die beiden Doppellinien in entgegengesetzter Weise verhalten und die 8 Klassen einer Gruppe dadurch, dass immer andere 4 einander nicht schneidende Geraden, die einer Doppelgeraden zugeordnet sind, sich als Fundamentalpunkte abbilden.

§ 3.

Benutzt man bei der Abbildung 2 der doppelt berührenden Kegel, so zerfällt die Flächengleichung in die 4 Factoren:

$$0=(\lambda-\lambda')p+(B+\varrho C)+(B'+\sigma' C')$$
$$0=(\lambda-\lambda')p+(B+\varrho C)-(B'+\sigma C')$$
$$0=(\lambda-\lambda')p-(B+\varrho C)+(B'+\sigma C')$$
$$0=(\lambda-\lambda')p-(B+\varrho C)-(B'+\sigma C');$$

λ und λ' sind Wurzeln der biquadratischen Gleichung in λ, welche den 4 doppelt berührenden Kegeln entspricht und

$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0, \qquad A' + 2\sigma B' + \sigma^2 C' = 0$$

sind die Gleichungen der veränderlichen Tangentenebenen zweier derselben. Einer der 4 Factoren in Verbindung mit den beiden Gleichungen der Tangentenebenen stellt die Coordinaten eines veränderlichen Punktes der Fläche als rationale Function 4^{ter} Ordnung in ϱ, σ dar. Solcher Abbildungen giebt es 6 Gruppen, je nach den beiden benutzten Kegeln, und jede Gruppe enthält 4 Klassen, den gebrauchten Kegelschnittschaaren entsprechend. Die 8 Paare, die in den beiden Ebenenbüscheln auftreten, will ich mit

$$\begin{matrix} a_1 b_1 & a_2 b_2 & a_3 b_3 & a_4 b_4 \\ c_1 d_1 & c_2 d_2 & c_3 d_3 & c_4 d_4 \end{matrix}$$

bezeichnen. Die Paare, welche in den benutzten Kegelschnittschaaren auftreten, sollen sein:

$$\begin{matrix} a_1 c_1 & a_2 c_2 & a_3 c_3 & a_4 c_4 \\ b_3 c_1 & a_2 d_4 & b_1 c_3 & a_4 d_2. \end{matrix}$$

Bei der Abbildung erhält man wieder die beiden festen Doppelpunkte, die Bilder der in C und C' liegenden Kegelschnitte; dann tritt 4mal der Fall ein, dass der Schnitt zweier unter einander stehender Paare eine gemeinsame Gerade liefert und diese c_1, a_2, c_3, a_4 sind die 4 festen Punkte der Abbildung. Da keine der Doppelgeraden bei der Abbildung bevorzugt ist, beide zusammen eine Curve 4^{ter} Ordnung mit 2 Doppelpunkten darstellen müssen, so wird das Bild einer jeden eine Curve 2^{ter} Ordnung durch die beiden Doppelpunkte und 2 der einfachen $a_2 a_4$, $c_1 c_3$ sein. Erstere sei die Doppelgerade 1, letztere die Doppelgerade 2. Die zu 1 gehörigen 6 anderen Geraden sind die 4 Verbindungslinien der Doppelpunkte mit c_1, c_3 und die beiden Kegelschnitte, welche durch dieselben durch c_1, c_3, a_2 oder c_1, c_3, a_4 gelegt werden können; die zu 2 gehörigen sind die 4 Verbindungslinien mit a_2, a_4 und die Kegelschnitte durch a_2, a_4, c_1 und a_2, a_4, c_3. Die Bilder der beiden Doppelgeraden schneiden sich dann noch in einem Punktepaare, welches die Abbildung ihres Schnittpunktes repräsentirt.

Die 24 verschiedenen Arten der Abbildung unterscheiden sich dadurch von einander, dass immer 2 einander nicht schneidende Geraden der einen Doppellinie mit 2 einander nicht schneidenden der anderen sich als Fundamentalpunkte abbilden, sodass letztere jede Gerade der ersteren Doppellinie treffen, welche mit den beiden ersteren Paare bilden und umgekehrt.

Die Kegelschnittschaaren, welche den beiden Doppelgeraden an-

gehören, bilden sich als Curvenbüschel 2^{ter} Ordnung durch die Doppelpunkte $a_2 a_4$ und $c_1 c_3$ ab.

Werden endlich zu Ausgangsebenen C, C' die Ebenen zweier Geradenpaare $a_1 c_1$, $b_3 c_1$ benutzt, so werden die beiden Doppelpunkte der Abbildung zu einfachen, den Bildern der sich nicht schneidenden Geraden a_1, b_3, die anderen Fundamentalpunkte sind dann a_2, a_4, c_3. Die Bilder der Doppelgeraden müssen dann in einen Kegelschnitt durch a_1, a_2, a_4, b_3 und eine Gerade durch c_3 übergehen. Die 24 Arten der Abbildung unterscheiden sich von einander dadurch, dass sich immer 4 einander nicht schneidende Geraden einer Doppellinie in Verbindung mit denjenigen der anderen, welche von den 4 folgenden Geraden der ersteren getroffen werden, als Fundamentalpunkte abbilden.

Die Gerade und der Kegelschnitt treffen sich in einem Punktepaare, welches dem Schnitte der Doppelgeraden entspricht. Die 4 Punkte $a_1\, a_2\, a_4\, b_3$ lassen sich 6mal zu je 2 verbinden, sodass man in Verbindung mit dem alle Fundamentalpunkte treffenden Kegelschnitt die 7 anderen Geraden der einen Doppellinie erhält; die 4 fehlenden der 2^{ten} sind noch die Verbindungen von c_1 mit a_1, a_2, a_4, b_3. Die Kegelschnittschaar der letzteren ist der Strahlbüschel, dessen Scheitel c_1 und die der ersteren der Kegelschnittbüschel durch $a_1\, a_2\, a_4\, b_3$. Durch c_1 lassen sich 2 Tangenten an den Kegelschnitt durch $a_1\, a_2\, a_4\, b_3$ ziehen, sie entsprechen den 2 Kegelschnitten des Büschels, welche die zugehörige Doppelgerade berühren; ebenso kommen in der Kegelschnittschaar durch $a_1\, a_2\, a_4\, b_3$ 2 Gebilde vor, welche die durch c_1 gehende Gerade berühren. Sie sind die Bilder der Kegelschnitte, welche die andere Doppelgerade berühren.

Dass jede Doppelgerade von 2 Kegelschnitten berührt wird, lässt sich auch leicht analytisch nachweisen.

Behalten wir das in § 1. gewählte Coordinatensystem bei, so drückt sich die Doppelgerade $q = 0$, $p = 0$ durch

$$ax + by = 0, \quad t = 0$$

aus. Um ihren Schnitt mit einem Kegelschnitte der Schaar zu bestimmen, setzen wir also $t = 0$, $x = \mu \,.\, b$, $y = -\mu \,.\, a$, und erhalten aus der Gleichung:

$$0 = [\sigma(ax - by) + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta t]^2$$
$$- 4\{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{14}xt + 2a_{24}yt + 2a_{34}zt\}$$

einen Kegelschnitt der Schaar die in z, μ quadratische Gleichung:

$$[\mu \,.\, (2\sigma ab + \alpha b - \beta a) + \gamma z]^2 - 4\{\mu^2(a_{11}b^2 + a_{22}a^2) + a_{33}z^2\} = 0.$$

Diese hat zwei gleiche Wurzeln, wenn

$$4(a_{11}b^2 + a_{22}a^2)a_{33} - \gamma^2(a_{11}b^2 + a_{22}a^2) - a_{44}(2\sigma ab + \alpha b - \beta a)^2 = 0,$$

und diese Gleichung liefert die beiden Werthe von σ, für welche eine Berührung der Kegelschnitte mit der einen Doppelgeraden eintritt. Für andere Werthe von σ giebt die obige Gleichung in μ und ε Punktepaare einer Involution, deren Doppelpunkte jene Berührungspunkte werden. —

Um zu weiteren Punkten der Abbildungen der Doppelgeraden zu gelangen, legt man in der Gleichung $\Sigma u_i f_i = 0$ den u_i die Bedingung auf, dass jene Curve in einem der Fundamentalpunkte einen Doppelpunkt besitzt, z. B. in a_1. Die Gleichung $\Sigma u_i f_i = 0$ stellt dann einen Curvenbüschel 3^{ter} Ordnung dar, der sich noch in einem 9^{ten} Punkte schneidet und dieser ist dem Bild $a_1 a_2 a_4 b_3$ der einen Doppelgeraden angehörig. Legt man den u_i die Bedingung auf, dass jene Curve durch 2 weitere Punkte einer Geraden, z. B. $a_2 b_3$ geht, so zerfällt $\Sigma u_i f_i$ in $A(f + \lambda\varphi)$ und der Kegelschnittbüschel $f + \lambda\varphi$ schneidet sich noch in einem 4^{ten} Punkte, welcher auf dem Bilde der durch c_1 gehenden Doppelgeraden liegt. Dessen Schnitt mit $a_2 b_3$ ergänzt sich mit jenem 4^{ten} Punkte zu dem festen Doppelpunkte eines ebenen Schnittes, während der bewegliche durch das Schnittpunktepaar einer Curve des Systems $f + \lambda\varphi$ mit dem Kegelschnitt $a_1 a_2 a_4 b_3$ angedeutet wird. Unter dieser Schaar finden sich 2 Gebilde, welche denselben berühren und die Berührungspunkte sind die Abbildungen der beiden Rückkehrpunkte. —

Legt man den u_i die Bedingung auf, dass das ganze System $\Sigma u_i f_i$ durch 2 weitere Punkte des Kegelschnittes $a_1 a_2 a_4 c_3 b_1$ geht, so zerfällt dasselbe in die Gleichung dieses und einen Strahlbüschel $A + \lambda B$. Der Scheitel desselben liegt dann auf dem Bilde der durch c_1 gehenden Doppelgeraden und ergänzt sich mit dem Schnittpunkte dieses und des Kegelschnittes $a_1 a_2 a_4 c_3 b_1$ zu dem festen Doppelpunkte des ebenen Schnittes. Jeder Strahl des Büschels schneidet dann das Bild der anderen Doppelgeraden in einem Punktepaar, welches die Abbildung des beweglichen Doppelpunktes ist. Unter jenen Strahlen sind 2, welche in zusammenfallenden Punktepaaren schneiden und dieselben sind abermals die Bilder der Rückkehrpunkte auf dieser Doppelgeraden.

Legt man endlich den u_i die Bedingung auf, dass das System $\Sigma u_i f_i = 0$ durch 2 weitere Punkte einer durch c_1 gehenden Geraden, z. B. $c_1 a_1$ geht, so zerfällt dasselbe in $A(f + \lambda\varphi)$ und das Büschel $f + \lambda\varphi$ schneidet sich noch in einem 4^{ten} Punkte, welcher auf dem Kegelschnitt $a_2 a_4 b_3 a_1$ liegt. Derselbe ergänzt sich mit dessen Schnitte mit $a_1 c_1$ zu der Abbildung des festen Doppelpunktes des Schnittes, während der bewegliche durch das Punktepaar dargestellt wird, in welchem eine Curve des Büschels die durch c_1 gehende Gerade trifft. Unter jener Schaar finden sich wieder 2, welche diese Gerade berühren

und die Berührungspunkte sind die Bilder der Rückkehrpunkte der zugehörigen Doppelgeraden.

II.

Die Fläche besitzt noch einen besonderen Knotenpunkt.

Lässt man die Fläche 2^{ter} Ordnung $\psi = 0$ einen Kegel bedeuten, dessen Spitze auf der Fläche $(qr + ps) = 0$ liegt, so wird diese zu einem Knotenpunkt der Fläche.

Um die doppelt berührenden Kegel der Fläche zu finden, lege ich ein Coordinatentetraeder, dessen 3 Ecken in die Nebenecken des aus den 4 Rückkehrpunkten gebildeten vollständigen Vierecks fallen und dessen 4^{te} Ecke die Kegelspitze von ψ. Die Gleichung der Fläche besitzt dann die Form (vgl. § 1.):

$$4t^2\{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2\} = [(ax + by)(ax - by) + t(\alpha x + \beta y + \gamma z)]^2$$

und die doppelt berührenden Kegel ergeben sich durch Nullsetzen der Determinante der Gleichung:

$$(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2) + \lambda^2 t^2 + \lambda(a^2x^2 - b^2y^2) + \lambda t(\alpha x + \beta y + \gamma z) = 0,$$

was zu der in λ quadratischen Gleichung führt:

$$\frac{\alpha^2}{a_{11} + \lambda a^2} + \frac{\beta^2}{a_{22} - \lambda b^2} + \frac{\gamma^2}{a_{33}} = 4.$$

Die Fläche besitzt daher nur 2 doppelt berührende Kegel. Die Coordinaten der Spitze folgen aus den Gleichungen:

$$x(a_{11} + \lambda a^2) + \frac{\lambda t}{2}\alpha = 0$$

$$y(a_{22} - \lambda b^2) + \frac{\lambda t}{2}\beta = 0$$

$$z a_{33} + \frac{\lambda t}{2}\gamma = 0.$$

Für den Schnitt des Ebenenbüschels $q = \sigma p$ $(ax + by - \sigma t = 0)$ mit der Fläche zerfällt diese in die Factoren $t^2 = 0$ und

$$4(a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2) - (\sigma(ax - by) + (\alpha x + \beta y + \gamma z))^2 = 0.$$

Diese Gleichung stellt ein System von Kegeln mit gemeinsamer Spitze dar, welche sämmtlich den Kegel $\psi = 0$ in zweien seiner Seiten berühren. Der Durchschnitt eines solchen Kegels mit $q = \sigma p$ kann nur dann in zwei Gerade zerfallen, wenn entweder der Kegel ein Ebenenpaar wird, oder die Ebene durch die Spitze des Kegels geht. Das erste geschieht, wenn σ der Gleichung

$$\begin{vmatrix} (\alpha + \sigma a)^2 - 4a_{11} & (\alpha + \sigma a)(\beta - \sigma b) & (\alpha + \sigma a)\gamma \\ (\alpha + \sigma a)(\beta - \sigma b) & (\beta - \sigma b)^2 - 4a_{22} & (\beta - \sigma b)\gamma \\ (\alpha + \sigma a)\gamma & (\beta - \sigma b)\gamma & \gamma^2 - 4a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

genügt, welche in σ quadratisch ist, und also zwei Geradenpaare liefert.

Für den Schnitt des Ebenenbüschels $q = \sigma p$ mit der Fläche zerfällt diese in die Factoren $q^2 = 0$ und $(\sigma r + s)^2 - 4\psi = 0$ und letzterer in Verbindung mit $q = \sigma p$ liefert die eine Kegelschnittschaar. So oft die Ebene $q = \sigma p$ die Fläche $(\sigma r + s)^2 - 4\psi = 0$ tangirt, zerfällt der Schnitt in ein Linienpaar und die bezüglichen Werthe von σ folgen aus der quadratischen Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} (\sigma a + \alpha)^2 - 4a_{11} & (\beta - \sigma b)^2 \\ (\sigma a + \alpha)\gamma & (\beta - \sigma b) \end{vmatrix}.$$

Als drittes Geradenpaar muss man den Schnitt der durch den Knotenpunkt gehenden Ebene $ax + by = 0$ mit der Fläche hinzufügen. So entstehen die 12 Geraden der Fläche, die sich in 2 Gruppen zu je 6 theilen, sodass jede Gruppe einer Doppellinie angehört.

Ist $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ eine veränderliche Tangentenebene des Kegels ψ, so ist dessen Gleichung $\psi = B^2 - AC$ und mit Hülfe desselben zerfällt die Flächengleichung in die Factoren:

$$ps + qr + 2p(B + \varrho C) = 0$$
$$ps + qr - 2p(B + \varrho C) = 0.$$

Jeder derselben in Verbindung mit $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ stellt eine Kegelschnittschaar von ψ dar. Mit Hülfe des Büschels $r = \sigma p$ zerfallen diese Factoren noch in

$$s + \sigma q + 2(B + \varrho C) = 0$$
$$s + \sigma q - 2(B + \varrho C) = 0$$

und jeder derselben in Verbindung mit $r = \sigma p$ und $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ liefert eine eindeutige Abbildung der Fläche auf eine feste Ebene.

Die Doppelcurve bildet sich wieder ganz in derselben Weise ab, wie im Fall I. Sind $a_1 b_1$, $a_2 b_2$, $a_3 b_3$ die Geradenpaare des Büschels $q = \sigma p$ und $c_1 d_1$, $c_2 d_2$, $c_3 d_3$ die des Büschels $r = \sigma p$, sodass $c_1 d_1$, $a_1 b_1$ die durch den Knotenpunkt gehenden Paare darstellen, ferner

$$a_1 d_2, \quad b_2 d_1, \quad a_3 c_1, \quad c_3 b_1$$
$$a_1 d_3, \quad b_3 d_1, \quad a_2 c_1, \quad c_2 b_1$$

die Paare der Schaaren des Kegels ψ, und kommen

$$c_1 d_1, \quad c_2 d_2, \quad c_3 d_3$$
$$a_1 d_3, \quad b_3 d_1, \quad a_2 c_1, \quad c_2 b_1$$

in den benutzten Schaaren vor, so sind die 4 Fundamentalpunkte die Bilder von c_1, d_1, c_2, d_3. Ist σ constant, dem durch den Knotenpunkt gehenden Paare entsprechend, ϱ dagegen veränderlich, so entsteht die unendlich vieldeutige geradlinige Abbildung des Knotenpunktes, auf welcher die Punkte c_1, d_1, sowie der Doppelpunkt $\tau = 0$, $\sigma = 0$ liegen.

Die beiden anderen Geraden der Doppellinie (p, r) sind die Verbindungen des Doppelpunktes (τ, σ) mit den Punkten c_2 und d_3. Die 4 Verbindungslinien des anderen (τ, ϱ) mit den 4 Fundamentalpunkten, nebst den beiden Kegelschnitten durch die beiden Doppelpunkte, durch c_2, d_3 und c_1 oder d_1 geben die 6 Geraden der anderen Doppellinie. Die Kegelschnittschaaren des einfach berührenden Kegels sind der Strahlbüschel, dessen Scheitel in (ϱ, τ) und der Kegelschnittbüschel durch die beiden Doppelpunkte, durch c_2 und d_3.

Solcher Abbildungen giebt es 2 Gruppen, nach Wahl des benutzten Ebenenbüschels, und jede enthält 2 Classen, den Kegelschnittschaaren von ψ entsprechend. Die beiden Gruppen unterscheiden sich von einander dadurch, dass sich die Doppelgeraden und mit ihnen die bevorzugten beiden Geradenpaare $c_1 d_1$, $a_1 b_1$ in entgegengesetzter Weise verhalten; und die 2 Classen einer Gruppe dadurch, dass immer andere 2 einander nicht schneidende der 4 anderen Geraden der bevorzugten Doppellinie, welche mit den Geraden a_1 und b_1 Paare bilden, sich als Fundamentalpunkte abbilden.

Wird bei der Abbildung eine Kegelschnittschaar eines der doppelt berührenden Kegel K benutzt, so zerfällt die Flächengleichung in die Factoren

$$s + \sigma q + 2\lambda p + 2(B + \varrho C) = 0$$
$$s + \sigma q + 2\lambda p - 2(B + \varrho C) = 0,$$

von welchen einer in Verbindung mit $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ und $r = \sigma p$ die eindeutige Abbildung der Fläche liefert. Die Geradenpaare, welche in den Schaaren von K vorkommen, seien

$$a_3 c_2, \quad c_3 a_2, \quad a_1 d_1$$
$$b_1 c_1, \quad b_2 d_3, \quad b_3 d_2,$$

von denen die erstere bei der Abbildung benutzt worden sei.

Die beiden Doppellinien bilden sich wie früher ab; als einfache Fundamentalpunkte erhält man die Geraden c_2, c_3, als zusammenfallende den Knotenpunkt, sodass jeder derselben ein Bild der Geraden d_1 liefert. Die 3 anderen den Knotenpunkt treffenden Geraden sind die Verbindungslinien von c_1 mit den Doppelpunkten und der Kegelschnitt durch sämmtliche Fundamentalpunkte. Die 4 Verbindungslinien der Punkte c_2 und c_3 mit den Doppelpunkten und die beiden Kegelschnitte, die durch alle Ausnahmspunkte, beziehungsweise c_2 oder c_3 ausgenommen, hindurchgehen, geben die 6 letzten Geraden der Fläche.

Solcher Abbildungen giebt es 2 Gruppen nach Wahl des benutzten Ebenenbüschels und jede Gruppe enthält 4 Classen den Kegelschnittschaaren der doppelt berührenden Kegel entsprechend. Die beiden Gruppen unterscheiden sich von einander durch das entgegen-

gesetzte Verhalten der Doppellinien und die 4 Classen einer Gruppe, dass immer einer der zusammenfallenden Punkte die Gerade c_1 oder d_1 ist und die beiden anderen solche 2 Geraden dieser Doppellinie repräsentiren, welche entweder beide mit a_1 oder b_1 Paare bilden.

Bedient man sich bei der Abbildung der beiden doppelt berührenden Kegel, so entstehen 4 Classen von Abbildungen. Sind

$$b_2\,c_2 \quad b_3\,c_3 \quad a_1\,c_1$$
$$a_3\,c_2 \quad c_3\,a_2 \quad a_1\,d_1$$

die benutzten Geradenpaare, so werden sich c_3 und c_2 als einfache Fundamentalpunkte, a_1 doppelt abbilden, welches dem Knotenpunkte entspricht. Die beiden Doppellinien werden sich als Kegelschnitte abbilden, von denen der eine durch das zusammenfallende Punktepaar, der andere durch c_2, c_3 geht. Die 4 Classen der Abbildung unterscheiden sich dadurch von einander, dass sich immer eine andere der durch den Knotenpunkt gehenden Geraden doppelt abbildet. Die beiden einfachen Fundamentalpunkte gehören dann zweien Geraden der anderen Doppellinie an, welche von derjenigen der ersteren getroffen werden, die noch durch den Knotenpunkt geht.

Nimmt man die Ebenen zweier Geradenpaare, z. B. $b_2\,c_2$ und $a_3\,c_2$ zu Ausgangsebenen C und C', so erhält man 5 einfache Fundamentalpunkte in b_2, a_3, c_3 und doppelt gerechnet a_1; die eine Doppelgerade ist der Kegelschnitt durch b_2, a_3 und die beiden Punkte a_1, die andere eine Gerade durch c_3 u. s. w.

Werden endlich zur Abbildung der einfach berührende Kegel ψ und einer der doppelt berührenden benutzt und sind

$$b_2\,c_2 \quad b_3\,c_3 \quad a_1\,c_1$$
$$a_1\,d_3 \quad b_3\,d_1 \quad a_2\,c_1 \quad c_2\,b_1$$

die dabei verwendeten Paare, so erhält man eine unendlich vieldeutige geradlinige Abbildung des Knotenpunktes, wenn die Tangentenebene $a_1\,c_1$ des einen Kegels fest, die des anderen variabel gedacht wird. In einer Geraden liegen der eine Doppelpunkt und die Punkte $a_1\,c_1$. Die beiden Doppellinien werden durch 2 Kegelschnitte dargestellt, welche durch die beiden Doppelpunkte c_1, c_2 oder a_1, b_3 hindurchgehen. Die beiden anderen, den Knotenpunkt treffenden Geraden sind die Verbindungslinien des einen Doppelpunktes mit b_3, c_2.

Solcher Abbildungen giebt es 4 Gruppen zu 2 Klassen nach Wahl der Kegelschnittschaar eines der doppelt und einfach berührenden Kegel. Die 4 Gruppen unterscheiden sich dadurch von einander, dass immer 2 den Knotenpunkt treffenden aber nicht zu einer Doppellinie gehörigen Geraden sich als Fundamentalpunkte abbilden; und die beiden Klassen einer Gruppe, dass die beiden andern Fundamentalpunkte die Bilder solcher 2 Geraden der beiden Doppellinien sein werden, welche

keine jener bereits abgebildeten treffen. Nimmt man zu Ausgangsebenen C und C' die Ebenen zweier Geradenpaare, die eine gemeinsame Gerade besitzen, z. B. $b_3 c_3$ und $b_3 d_1$, so erhält man wieder 5 einfache Fundamentalpunkte c_1, c_2, c_3, a_1, d_1, von welchen c_1, a_1, d_1 in einer Geraden liegen. Die eine Doppellinie ist eine Gerade durch a_1, die andere ein Kegelschnitt durch c_1, c_2, c_3, d_1 u. s. w.

III.

Die Fläche besitzt noch 2 besondere Knotenpunkte, von denen jeder die Spitze eines einfach berührenden Kegels ist.

Eine solche Fläche wird durch die Gleichung dargestellt (a. a. O. p. 617) $(p^2 + \psi - \chi)^2 = 4p^2\psi$, wo $\psi = 0$ ein Kegel, dessen Spitze auf $p^2 - \chi = 0$, und $\chi = 0$ ein Kegel, dessen Spitze auf $p^2 - \psi = 0$ liegt. Damit die Doppelcurve in ein Linienpaar zerfällt, muss die Ebene p die Fläche $\psi - \chi$ tangiren. Nach den früheren Bezeichnungen lässt sich $\psi - \chi = 0$ in der Form darstellen

$$x^2(1-b_{11})+y^2(1-b_{22})+z^2(1-b_{33})-t^2-2b_{14}xt-2b_{21}yt-2b_{34}zt=0$$

und die Bedingung des Berührens ist erfüllt, wenn

$$(1 - b_{11})(1 - b_{22})(1 - b_{33}) = 0.$$

Dieses kann sonach auf 3 verschiedene Weisen geschehen, je nachdem b_{11}, b_{22}, b_{33} gleich 1 wird. Ich nehme an $b_{11} = 1$, dann lässt sich die Flächengleichung in die Form setzen:

$$\{y^2(1-b_{22})+z^2(1-b_{33})-2b_{14}xt-2b_{21}yt-2b_{34}zt\}^2=4t^2(x^2+y^2+z^2).$$

Die Ebene t berührt die Fläche $\psi - \chi$ in dem Punkte y, z, $t = 0$; hätte man $b_{22} = 1$ oder $b_{33} = 1$ gewählt, so lägen die Berührungspunkte beziehungsweise in x, z, $t = 0$ oder x, y, $t = 0$.

Die Gleichungen der beiden Doppellinien in der Ebene t sind

$$y\sqrt{1-b_{22}} + z\sqrt{b_{33}-1} = 0$$
$$y\sqrt{1-b_{22}} - z\sqrt{b_{33}-1} = 0.$$

Diese können in eine bessere Form gebracht werden, indem man die Bedingungsgleichungen berücksichtigt (vgl. a. a. O. p. 621):

$$1 = b_{14}^2 + \frac{b_{24}^2}{b_{22}} + \frac{b_{34}^2}{b_{23}}$$
$$1 = b_{14}^2 + \frac{b_{24}^2}{b_{22}^2} + \frac{b_{34}^2}{b_{33}^2}.$$

Aus beiden folgt die Gleichung:

$$\frac{b_{24}}{b_{22}}\sqrt{1-b_{22}} = \pm\frac{b_{34}}{b_{33}}\sqrt{b_{33}-1}$$

und mit deren Hülfe werden die beiden Doppellinien

$$y\frac{b_{31}}{b_{33}} + z\frac{b_{21}}{b_{22}} = 0$$
$$y\frac{b_{31}}{b_{33}} - z\frac{b_{21}}{b_{22}} = 0.$$

Bezeichnet man diese Ausdrücke der Kürze wegen mit $q = 0$, $r = 0$, so wird die Flächengleichung $\{qr - 2t(b_{11}x + b_{21}y + b_{31}z)\}^2 = 4t^2\psi$, und wenn ausserdem noch der lineare Ausdruck $b_{11}x + b_{21}y + b_{31}z = s$ gesetzt wird, so ist die endliche Gleichung unserer Fläche

$$(qr - 2ts)^2 = 4t^2\psi.$$

Die Ebenen q und r schneiden Geradenpaare aus der Fläche aus, letztere ist speciell die singuläre Tangentenebene, welche die Fläche längs der Verbindungsgeraden der beiden Knotenpunkte berührt. Die beiden Kegel, welche in den Knotenpunkten die Fläche 4ter Ordnung ringsum berühren, berühren sich ausserdem und die Fläche längs einer Geraden, welche der Doppellinie r angehört. Die 4 Schnittpunkte derselben mit der andern Doppelgeraden mit den zugehörigen Spitzen verbunden, geben 4 weitere in der Fläche liegende Gerade, welche die beiden Paare des Kegelbüschels sind, welche der Ebenenbüschel $q = \sigma t$ aus der Fläche schneidet. Die 4 andern Geraden der Fläche entstehen dann noch durch den Schnitt der 4 Tangentenebenen, die durch die beiden Geraden eines dieser Paare an den zugehörigen einfach berührenden Kegel ψ oder χ gelegt werden, mit der Fläche. Sie bilden ebenfalls zwei Paare, die der conjugirten Kegelschnittschaar angehören. Man findet die Gebilde der Schaar selbst aus dem Complex der Gleichungen

$$(\sigma q - 2s)^2 = 4\psi$$
$$r = \sigma t.$$

Da erstere Gleichung immer einen Kegel darstellt, dessen Spitze in x, y, $z = 0$, so findet man analytisch die Geradenpaare der Schaar für solche Werthe von σ, für welche der Kegel in ein Ebenenpaar zerfällt. Wenn man die Bedingungen dafür entwickelt, so erhält man eine quadratische Gleichung für σ, deren Lösungen den beiden Geradenpaare der Schaar entsprechen.

Um die Fläche eindeutig auf einer Ebene abzubilden, bediene ich mich des Ebenenbüschels $r = \sigma t$ in Verbindung mit einer veränderlichen Tangentenebene des Kegels ψ.

Die Flächengleichung zerfällt in die Factoren:

$$\left.\begin{matrix}\sigma q - 2s + 2(B + \varrho C) = 0\\ \sigma q - 2s - 2(B + \varrho C) = 0\end{matrix}\right\}$$

und einer derselben in Verbindung mit

$$r - \sigma t = 0$$
$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$$

stellt die x als rationale Functionen 4ten Grades der ϱ, σ dar.

Seien $a_1 b_1$, $a_2 b_2$ die Paare des Büschels $q = \sigma t$; $c_1 d_1$, $c_2 d_2$ die des Büschels $r = \sigma t$, zu welchen als drittes Geradenpaar $A A_1$ die doppelt gerechnete Verbindungslinie A_1 der beiden Knotenpunkte mitzuzählen ist. Kommen ferner in der benutzten Kegelschnittschaar von ψ die Paare $A_1 b_2$, $c_2 a_1$, $d_1 b_1$ vor; so werden sich die Geraden d_1, c_2 als einfache Fundamentalpunkte, A_1 doppelt abbilden, so dass diese zusammenfallenden Punkte mit dem Doppelpunkt C in einer Geraden liegen. Diese stellt zugleich die Kegelspitze ψ, jenes zusammenfallende Punktepaar die Kegelspitze χ dar. Die Doppelgerade r, t ist wieder eine Curve 3ter Ordnung durch alle Ausnahmspunkte mit einem Doppelpunkt in dem zweiten Doppelpunkt t und die andere q, t wird durch den letzteren in Verbindung mit der dritten Dreiecksseite dargestellt. Die 4 Geraden, welche zu der Doppellinie q, t gehören, sind die Verbindungslinien des Doppelpunktes t mit d_1, c_2, A_1 und der Kegelschnitt durch alle Fundamentalpunkte mit Ausnahme eines der zusammenfallenden; die 4 der andern angehörigen sind d_1, c_2 und deren Verbindungslinien mit dem ersten Doppelpunkt. Die Kegelschnittschaaren der beiden Ebenenbüschel werden durch den Strahlbüschel, dessen Scheitel in C und den Curvenbüschel 3ter Ordnung durch alle Fundamentalpunkte und mit Doppelpunkt in t dargestellt.

Je nach Wahl der Kegelschnittschaar hat man 4 verschiedene Abbildungen, die sich dadurch von einander unterscheiden, dass sich immer 2 andere einander nicht schneidende Geraden der bevorzugten Doppellinie als Fundamentalpunkte abbilden. Je nachdem man den Kegel ψ oder χ bei der Abbildung gebraucht hat, werden sich noch die beiden Knotenpunkte in entgegengesetzter Weise abbilden.

Benutzt man zur Abbildung die beiden einfach berührenden Kegel, und sind

$$A_1 b_2, \quad c_2 a_1, \quad d_1 b_1$$
$$A_1 b_1, \quad c_2 a_2, \quad c_1 b_2$$

die Geradenpaare, welche in den verwendeten Kegelschnittschaaren auftreten, so werden sich die Geraden A_1, b_2, b_1, c_2 als einfache Fundamentalpunkte abbilden, so dass A_1, b_2 mit dem einen; A_1, b_1 mit dem andern Doppelpunkt in einer Geraden liegen. Diese beiden Geraden geben die 2 Knotenpunkte der Fläche. Die beiden Doppellinien werden sich in gleicher Weise auf die Bildebene übertragen lassen, nämlich als Kegelschnitte durch die beiden Doppelpunkte, durch b_1, b_2 oder A_1, c_2. Je nach Wahl der benutzten Kegelschnittschaaren hat man 4 Classen von Abbildungen, welche sich dadurch von einander unterscheiden, dass sich immer 2 einander nicht schneidende Geraden der Knotenpunkte in Verbindung mit denjenigen Geraden der andern Doppellinie als Fundamentalpunkte abbilden, welche keine jener beiden ersten trifft. Nimmt man zu Ausgangsebenen C und C'

die Ebenen zweier Geradenpaare, die eine gemeinsame Gerade besitzen, bei welchen aber nicht A_1 auftritt, so bilden sich die 5 die Knotenpunkte schneidenden Geraden als einfache Fundamentalpunkte ab. Dabei liegen a_1, b_1, A_1 und a_2, b_2, A_1 in einer Geraden, so dass jede derselben einen Knotenpunkt darstellt. Die eine Doppellinie wird ein Kegelschnitt durch a_1, b_1, a_2, b_2; die andere eine Gerade durch A_1 sein.

Ich erwähne noch einer Art Abbildung, zu der man gelangt, wenn man die Ebenen zweier Geradenpaare benutzt, in welchen die Gerade A_1 auftritt, z. B. die Paare $A_1 b_2$ und $b_2 c_1$. Es wird sich dann A_1 doppelt, b_1, c_2, c_1 einfach abbilden, so dass b_1 mit dem doppelt gerechneten A_1 in einer Geraden liegt. Diese stellt den einen, A_1 den andern Knotenpunkt dar. Die eine Doppellinie ist ein Kegelschnitt durch c_2, c_1 und das zusammenfallende Punktepaar A_1, die andere eine Gerade durch b_1. Solcher Abbildungen giebt es 4 Classen, welche sich dadurch von einander unterscheiden, dass sich immer eine andere der durch die Knotenpunkte gehenden 4 Geraden in Verbindung mit den 2 der andern Doppellinie angehörigen Geraden, die von ersterer nicht getroffen werden, als einfache Fundamentalpunkte abbilden.

IV.

Die Fläche besitzt noch 2 besondere Knotenpunkte, die nicht die Spitzen einfach berührender Kegel sind.

Eine solche Fläche wird durch die Gleichung dargestellt

$$(qr + pl)^2 = 4p^2 ss'.$$

Die beiden Doppellinien sind die Schnitte der Ebene p mit den Ebenen q und r, die beiden Knotenpunkte sind die Durchdringungspunkte der Schnittlinie von s und s' mit der Fläche $qr + pl = 0$. Die Ebenen s und s' berühren die Fläche längs Kegelschnitten ihrer Schnitte r mit der Fläche $qr + pl = 0$. Die 8 Geraden der Fläche theilen sich in 2 Gruppen zu 4, so dass jede Gruppe einer der Doppelgeraden zugeordnet ist. Die 4 Ebenen, welche durch jede derselben und die beiden Knotenpunkte gelegt werden können, schneiden 4 Geradenpaare aus der Fläche aus und je 2 kommen in den Kegelschnittschaaren der Ebenenbüschel $r = \sigma p$ und $q = \sigma p$ vor.

Ich lege ein Coordinatentetraeder so, dass 3 seiner Ecken in die Nebenecken des aus den 4 Rückkehrpunkten der Doppelcurve gebildeten vollständigen Vierecks fallen, und die vierte auf die Schnittlinie von $s = 0$, $s' = 0$ und zwar harmonisch zu den beiden Knotenpunkten und dem Schnitte mit $p = 0$. Die Gleichung $(qr + pl)^2 = 4p^2 ss'$ nimmt dann die Form an:

$$[(ay + bz)(ay - bz) + t(\alpha x + \gamma z + \delta t)]^2 = 4b^2 (a_1^2 x^2 - b_1^2 z^2)$$

und die in dem System $ss' + \lambda (qr + pl) + \lambda^2 p^2 = 0$ enthaltenen Kegel findet man, indem man die Determinante des Ausdrucks

$$a_1^2 x^2 - b_1^2 z^2 + \lambda (\alpha^2 y^2 - b^2 z^2) + \lambda t (\alpha x + \gamma z + \delta t) + \lambda^2 t^2 = 0$$

verschwinden lässt, d. i. aus der Gleichung

$$(b_1^2 + \lambda b^2) \left\{ \frac{\alpha^2 \lambda}{4} - a_1^2 \delta - a_1^2 \lambda \right\} - \frac{a_1^2 \gamma^2 \lambda}{4} = 0.$$

Es existiren daher 2 doppelt berührende Kegel und deren Spitzen folgen aus

$$\begin{aligned} 2x a_1^2 - \alpha \lambda t &= 0 \\ y &= 0 \\ 2z (b_1^2 + \lambda b^2) - \gamma \lambda t &= 0. \end{aligned}$$

Dieses sind die Gleichungen eines Kegelschnitts, welcher in der Ebene $y = 0$ liegt, durch die Kegelspitzen geht und die 3 in y liegenden Eckpunkte des Tetraeders enthält.

Alle Ebenen des Büschels $s = \sigma^2 s'$ schneiden Kegelschnitte aus der Fläche aus, welche sich aus dem Complex der Gleichungen

$$\begin{aligned} qr + pl - 2ps'\sigma &= 0 \\ s - \sigma^2 s' &= 0 \end{aligned}$$

bestimmen. Für unser Coordinatentetraeder lauten dieselben

$$\begin{aligned} (ay + bz)(ay - bz) + t(\alpha x + \gamma z + \delta t) - 2t\sigma (a_1 x + b_1 z) &= 0 \\ a_1 x - b_1 z - \sigma^2 (a_1 x + b_1 z) &= 0. \end{aligned}$$

So oft die Ebene $s = \sigma^2 s'$ die Fläche $qr + pl - 2ps'\sigma = 0$ tangirt, zerfällt der Kegelschnitt in ein Linienpaar und die zugehörigen Werthe von σ finden sich aus der biquadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha}{2} - \sigma a_1 & a_1 - \sigma a_1 \\ 0 & -b^2 & \frac{\gamma}{2} - \sigma b_1 & -(b_1 + b_1 \sigma^2) \\ \frac{\alpha}{2} - \sigma a_1 & \frac{\gamma}{2} - \sigma b_1 & \delta & 0 \\ a_1 - \sigma^2 a_1 & -(b_1 + b_1 \sigma^2) & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

welche in die beiden quadratischen:

$$\frac{\alpha}{2} b_1 (1 + \sigma^2) - 2 a_1 b_1 \sigma + \left(\frac{\gamma}{2} \pm b \sqrt{-\delta} \right) a_1 (1 - \sigma^2) = 0$$

zerfällt werden kann.

Die Ebenenbüschel $q = \sigma p$ und $r = \sigma p$ schneiden ebenfalls Kegelschnitte aus der Fläche. Für die des ersteren hat man den Complex der Gleichungen

$$\begin{aligned} (\sigma r + l)^2 - 4st &= 0 \\ q - \sigma p &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$[\sigma(ay - bz) + \alpha x + \gamma z + \delta t]^2 - 4(a_1^2 x^2 - b_1^2 z^2) = 0$$
$$ay + bz - \sigma t = 0.$$

Die einzigen Geradenpaare, welche in dieser Kegelschnittschaar auftreten, sind die, welche die beiden durch die Knotenpunkte und die Doppelgerade gelegten Ebenen aus der Fläche schneiden.

Die 4 Geraden des einen Knotenpunkts seien $a_1 b_1 a_2 b_2$, die des andern $c_1 d_1 c_2 d_2$, so dass die Paare $a_1 b_1$, $c_1 d_1$ der Doppellinie q, p und die Paare $a_2 b_2$, $c_2 d_2$ der andern r, p angehören. Ausserdem seien $a_1 c_2$, $b_1 d_2$, $a_2 c_1$, $b_2 d_1$ die Paare des Ebenenbüschels $s = \sigma^2 s'$.

Benutzt man bei der Abbildung der Ebenenbüschel $q = \sigma p$ und einen doppelt berührenden Kegel K, so zerfällt die Flächengleichung in die Factoren

$$l + \sigma r + 2\lambda p + 2(B + \varrho C) = 0$$
$$l + \sigma r + 2\lambda p - 2(B + \varrho C) = 0$$

und einer derselben in Verbindung mit $q - \sigma p = 0$ und

$$A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$$

liefert die eindeutige Abbildung. Sind $a_1 a_2$, $d_1 d_2$ die Paare der benutzten Kegelschnittschaar des Kegels K, so erhält man neben den beiden Doppelpunkten noch die Bilder der Geraden a_1 und d_1 als doppelte Fundamentalpunkte. Die beiden Doppellinien bilden sich in bekannter Weise ab, d. i. die eine (q, p) als Curve 3^{ter} Ordnung durch alle Ausnahmspunkte mit einem Doppelpunkt in einem Doppelpunkt, die andere (r, p) als Verbindungslinie der beiden Doppelpunkte nebst dem zweiten. Die 4 Geraden der letzteren sind die Verbindungen des ersten mit a_1, d_1 und die Kegelschnitte, welche durch beide Doppelpunkte, eines der zusammenfallenden Punktepaare und einen Punkt des andern gelegt werden können; und die 4 der erstern sind dann ausser a_1, d_1 die Verbindungslinien des zweiten Doppelpunkts mit a_1 und d. Die Kegelschnittschaaren der beiden Doppelgeraden werden der Strahlbüschel, dessen Scheitel der erste Doppelpunkt, und der Curvenbüschel 3^{ter} Ordnung, der durch alle Ausnahmspunkte einmal, durch den zweiten Doppelpunkt zweimal geht. Der Kegelschnittbüschel des Ebenenbüschels $s = \sigma^2 s'$ wird der Curvenbüschel 2^{ter} Ordnung durch die beiden Doppelpunkte und je einen der zusammenfallenden Punkte. Die beiden Gebilde, welche in einer Ebene liegen, treffen den einen Doppelpunkt unter Richtungen, welche sich zum Bild des Schnittpunktes jener Ebene mit der entsprechenden Doppelgeraden zusammensetzen, und die beiden Schnittpunkte mit dem Bild der andern Doppelgeraden sind die Abbildung des Schnittpunktes derselben mit dieser. Nun kommt es zweimal vor, dass die beiden Gebilde zusammenfallen, nämlich für die Schnitte der singulären Tangentenebenen s und s', welche die Fläche längs Kegelschnitten berühren. Es müssen daher

für diese sowohl jene beiden Tangentenrichtungen, als auch die beiden Schnittpunkte zusammenfallen. Die Bilder dieser beiden Kegelschnitte treffen daher den einen Doppelpunkt unter Richtungen, welche den beiden Rückkehrpunkten dieser Doppelgeraden entsprechen und berühren zugleich die Curve 3^{ter} Ordnung, welche die andere Doppelgerade abbildet, so dass die Berührungspunkte deren Rückkehrpunkte darstellen. Nach Wahl der Ebenenbüschel werden sich die beiden Doppellinien in entgegengesetzter Weise verhalten und in einer solchen Darstellung giebt es 4 Classen, welche sich dadurch von einander unterscheiden, dass sich immer andere 2 einander nicht schneidende Geraden einer Doppellinie als zusammenfallende Fundamentalpunkte abbilden.

Benutzt man die beiden doppelt berührenden Kegel bei der Abbildung und enthalten die dabei benutzten Kegelschnittschaaren die Paare

$$a_1 a_2,\ d_1 d_2 \text{ und } a_1 b_2,\ c_1 d_2$$

so werden sich die Geraden a_1 und d_2 als doppelte Fundamentalpunkte, und die beiden Doppelgeraden, die hier gleichberechtigt auftreten, als Kegelschnitte durch die Doppelpunkte und beziehungsweise je eins der zusammenfallenden Punktepaare abbilden. Man hat 4 verschiedene Classen dieser Abbildungen, welche sich dadurch von einander unterscheiden, dass sich immer andere 2 einander nicht schneidende Geraden, die nicht einer und derselben Doppellinie angehören, als zusammenfallende Fundamentalpunkte abbilden.

Benutzt man bei der Abbildung die beiden Ebenenbüschel $q - \sigma p = 0$ und $\varrho^2 s - s' = 0$, so zerfällt die Flächengleichung in die Factoren $\sigma r + l + 2\varrho s = 0$, $\sigma r + l - 2\varrho s = 0$ und die Darstellung der x als rationale Functionen der ϱ, σ folgt aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sigma r + l + 2\varrho s &= 0 \\ q - \sigma p &= 0 \\ s' - \varrho^2 s &= 0 . \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt, dass die Bilder ebener Schnitte Curven 4^{ter} Ordnung sind, welche die Ecken τ, ϱ und τ, σ des Coordinatendreiecks zu Doppelpunkten besitzen. Setzt man in denselben $\tau = 0$, so sind die Gleichungen erfüllt, wenn

$$\begin{aligned} &1)\quad \varrho = 0\ ,\ p = 0\ ,\ r = 0 \\ &2)\quad \sigma = 0\ ,\ s = 0 \\ &3)\quad s = 0\ ,\ p = 0\ ,\ r = 0 . \end{aligned}$$

Daraus folgt: der Doppelpunkt τ, ϱ ist das Bild der Doppelgeraden p, r; der Doppelpunkt τ, σ ist das Bild des in s liegenden Kegelschnitts; die Gerade τ ist das Bild des Schnittpunktes der beiden. Das Bild der andern Doppelgeraden muss dann eine Curve 3^{ter} Ordnung sein,

welche in der Ecke τ, σ einen Doppelpunkt besitzt. Nach den obigen Bezeichnungen kommen in den benutzten Kegelschnittschaaren die Geradenpaare

$$a_1, b_1 \; ; \; c_1, d_1$$
$$a_1, c_2 \; ; \; b_1, d_2 \; ; \; a_2, c_1 \; ; \; b_2, d_1$$

vor. Um den einen Knotenpunkt, welchem das Paar $a_1 b_1$ angehört, abzubilden, denke ich mir die Ebene desselben fest, d. i. σ constant, dagegen ϱ veränderlich. Es entsteht dann die vieldeutige Abbildung des Knotenpunktes als einer Geraden mit den festen Fundamentalpunkten a_1, b_1, welche mit der Ecke τ, σ auf einer Geraden liegen. Ebenso ist das Bild des zweiten Knotenpunktes eine Gerade mit den festen Fundamentalpunkten c_1, d_1. Die Verbindungslinien dieser vier Fundamentalpunkte mit dem andern Doppelpunkt τ, ϱ geben die vier letzten Geraden der Fläche.

Solcher Abbildungen giebt es zwei verschiedene Gruppen nach Wahl des Ebenenbüschels $\sigma q - p = 0$ oder $\sigma r - p = 0$, welche sich dadurch von einander unterscheiden, dass sich die beiden Doppelgeraden in entgegengesetzter Weise verhalten.

Ich benutze endlich bei der Abbildung den Ebenenbüschel $s = \sigma^2 s'$ und einen doppelt berührenden Kegel, so dass $a_1 a_2$, $d_1 d_2$ die Paare des letzteren und $a_1 c_2$, $b_1 d_2$, $a_2 c_1$, $b_2 d_1$ die des ersteren darstellen. Die Flächengleichung zerfällt in die Factoren $(B + \varrho C \pm \lambda p) + \sigma s' = 0$ und einer dieser in Verbindung mit $s - \sigma^2 s' = 0$ und $A + 2\varrho B + \varrho^2 C = 0$ liefert die eindeutige Abbildung. Die beiden Doppelpunkte der Abbildung sind die Bilder der Schnitte der Ebenen C und s'; ausserdem werden a_1, a_2, d_1, d_2 als einfache Fundamentalpunkte auftreten, so dass a_1, a_2 sowie d_1 und d_2 mit dem zweiten Doppelpunkt in einer Geraden liegen. Beide Geraden sind die Bilder der Knotenpunkte. Die beiden Doppelgeraden werden in der Abbildung zu Kegelschnitten durch die Doppelpunkte, durch a_1 und d_1 oder a_2 und d_2. Solcher Abbildungen giebt es 4 verschiedene Classen nach Wahl der Kegelschnittschaar eines der doppelt berührenden Kegel; sie unterscheiden sich dadurch von einander, dass sich immer 2 Geraden eines Knotenpunktes, welche verschiedenen Doppellinien angehören, als Fundamentalpunkte abbilden.

V.

Die Fläche besitzt noch 3 besondere Knotenpunkte, von welchen einer die Spitze eines einfach berührenden Kegels ist.

Lässt man in der Gleichung $(p^2 + \psi - \chi)^2 = 4p^2\psi$ oder

$$(p^2 - \psi + \chi)^2 = 4p^2\chi \text{ (III)}$$

den Kegel χ in ein Ebenenpaar zerfallen $\chi = qr$, so besitzt die Fläche

3 besondere Knotenpunkte, nämlich die Kegelspitze von ψ und die Durchdringungspunkte der Schnittlinie von q und r mit der Fläche $p^2 - \psi = 0$. Sie seien der Reihe nach bezeichnet mit k_1, k_2, k_3. Wenn die Doppelcurve in ein Linienpaar zerfallen soll, so muss die Ebene p die Fläche $\psi - qr = 0$ berühren. Liegt das Coordinatentetraeder so, dass die Ecke x, y, $z = 0$ in k_1 liegt, und die 3 andern in die Nebenecken des aus den 4 Rückkehrpunkten gebildeten vollständigen Vierecks fallen, so dass die Ebenen x, y durch den Schnitt der Doppelgeraden gehen, so schreibt sich die Flächengleichung:

$$\{t^2+x^2+y^2+z^2-(ax+bz+ct)(-ax+bz+c't)\}^2=4t^2(x^2+y^2+z^2).$$

Die Bedingung des Berührens wird erfüllt, wenn $b = 1$, und die Bedingung, dass die Spitze des Kegels ψ in der Fläche $p^2 - qr$ liegt, wenn $cc' = 1$. Mit Berücksichtigung dieses lässt sich jene Gleichung schreiben:

$$\{x^2(1+a^2)+y^2+t(xm+zn)\}^2 = 4t^2(x^2+y^2+z^2).$$

Hierin stellt $x^2(1+a^2)+y^2$ das Produkt zweier Ebenen dar, welche durch die beiden Doppelgeraden gehen. Ich will dieselben bezeichnen mit s_1 und s_2, sowie den linearen Factor $xm + zn$ mit l, dann kann die Flächengleichung in die Form gesetzt werden:

$$(s_1 \,.\, s_2 + t \,.\, l)^2 = 4t^2\psi.$$

Die Verbindungslinien von k_1 mit k_2 und k_3 sind in der Fläche liegende Geraden, längs welchen eine und dieselbe Tangentenebene statt hat. Dieselben gehen noch durch je eine der Doppelgeraden und die Ausdrücke s_1, s_2 gleich Null gesetzt, stellen die Gleichungen derselben dar. Die 3 Kegel, welche in den Knotenpunkten die Fläche ringsum berühren, werden von der Ebene der Doppelgeraden in 3 Kegelschnitten geschnitten, welche beziehungsweise mit denselben Buchstaben bezeichnet werden sollen. Dann berührt k_1 jede Doppelgerade; in den Berührungspunkten berühren beziehungsweise k_2 und k_3 und die 2 Schnittpunkte mit der andern Doppelgeraden mit dem zugehörigen Knotenpunkt verbunden geben noch 4 in der Fläche liegende Geraden. Die zu der Doppelgeraden s_1 gehörigen will ich mit a_1, b_1, die zu s_2 gehörigen mit a_2 und b_2 bezeichnen. Die Verbindungslinie k_1 mit k_2 sei A_1 und k_1 mit k_3 sei A_2. Der Ebenenbüschel $s_1 - \sigma t = 0$ enthält dann die Geradenpaare A_1A_1 und a_1b_1, der Büschel $s_2 - \sigma t = 0$ die Paare A_2A_2 und a_2b_2. Die Paare, welche in den Kegelschnittschaaren von ψ auftreten, sind A_1a_2, A_2b_1 sowie A_1b_2, A_2a_1 und die des Ebenenbüschels $q - \sigma r = 0$ sind A_1A_2, a_1a_2, b_1b_2.

Bedient man sich bei der Abbildung zunächst des Ebenenbüschels $s_1 - \sigma t = 0$ in Verbindung mit einer Kegelschnittschaar von ψ, so folgt die Darstellung der x als rationale Functionen vierten Grades zweier Parameter aus den Gleichungen:

$$\dots = 0 \quad -2B \dots -2C \dots =$$
$$\dots - \dots =$$
$$A \dots - 2\varphi\tau B - \varphi^2 C = \dots$$

die mittels der Veränderlichen τ linear gemacht werden kann. Man erhält wieder zwei Doppelpunkte: der eine τ, σ ist das Bild des in C liegenden Kegelschnitts, der andere τ, φ ist das Bild der Doppelgeraden $\dots = 0, \dots = 0$. Kommen in der ternären Kegelschnittschaar des Kegels v die Paare A_1, A_2; $\dots$ vor, so werden sich noch die Geraden A_1 und b_2 doppelt abbilden, so dass die zusammenfallenden Punkte A mit dem Doppelpunkt τ, σ in einer Geraden liegen, welche den Knotenpunkt $\dots$ darstellt. Die zusammenfallenden Punktepaare A_1 und b_1 sind die Bilder der zusammengehörigen Knotenpunkte. Die Doppelgerade $\dots = 0, \dots = 0$ wird durch die Curve 3^{ter} Ordnung dargestellt, welche durch alle Fundamentalpunkte geht und in τ, φ einen Doppelpunkt besitzt. Die Verbindungslinien des Punktes τ, φ mit A_1 und b_1 geben die Geraden a_1 und A_2, die Verbindungslinie von τ, σ mit b_1 ist die Gerade a_1 und der Kegelschnitt durch die Doppelpunkte, durch das Punktepaar b_1 und einen der Punkte A_1 ist die Gerade b_2. Die Kegelschnittschaar des Büschels $\dots - \sigma^2 = 0$ ist der Strahlbüschel, dessen Scheitel in τ, σ; die des Büschels $\dots - \sigma t = 0$ ist der Curvenbüschel 3^{ter} Ordnung, welcher durch alle Fundamentalpunkte geht und in τ, φ einen Doppelpunkt besitzt. Die Kegelschnittschaar des Büschels $q - \sigma r = 0$ endlich ist der Curvenbüschel 2^{ter} Ordnung durch die Doppelpunkte und je einen Punkt der zusammenfallenden Punktepaare. Unter letzterer Schaar finden sich zwei vor, welche das Bild der Doppelgeraden $\dots = 0, t = 0$ berühren. Die Berührungspunkte sind die Bilder der Rückkehrpunkte dieser Geraden und die Tangentenrichtungen in dem andern Doppelpunkt entsprechen den Abbildungen der Rückkehrpunkte der andern Doppelgeraden. Solcher Abbildungen giebt es 2 Gruppen nach Wahl des Ebenenbüschels und jede Gruppe enthält 2 Classen nach Wahl der Kegelschnittschaar von v. Die beiden Gruppen unterscheiden sich dadurch von einander, dass sich die beiden Doppelgeraden und mit ihnen die Geraden A_1 und A_2 entgegengesetzt abbilden und die Classen einer Gruppe dadurch, dass sich die beiden Geraden des Knotenpunktes, welcher nicht von A_1 oder A_2 geschnitten wird, als Punkt oder Gerade abbilden.

Bei Benutzung des Ebenenbüschels $q - \sigma^2 r = 0$ und des Kegels v zur Abbildung, folgt die rationale Darstellung der x aus den Gleichungen

$$\tau t - r\sigma - \tau B + \varrho C = 0$$
$$\tau^2 q - \sigma^2 r = 0$$
$$\tau^2 A + 2\varrho\tau B + \varrho^2 C = 0.$$

Sind $A_1 a_2$, $A_2 b_1$ die Geradenpaare der benutzten Kegelschnittschaar, so bilden sich A_1, A_2, a_2, b_1 als einfache Fundamentalpunkte ab, so dass A_1, a_2 und A_2, b_1 mit dem Doppelpunkt τ, ϱ in einer Geraden liegen, welche beide Geraden die Bilder der zusammengehörigen Knotenpunkte sind. Dann liegen noch A_1, A_2 mit dem Doppelpunkt τ, σ in einer Geraden, dem Bilde des letzten Doppelpunkts. Die 2 Doppelgeraden bilden sich als Kegelschnitte durch die Doppelpunkte und beziehungsweise a_2, A_2 oder A_1, b_1 ab. Die 2 letzten Geraden sind noch die Verbindungslinien von (τ, σ) mit a_2, b_1.

Hätte man sich der andern Kegelschnittschaar zur Abbildung bedient, so würden sich die Geraden b_2, a_1 als Fundamentalpunkte abgebildet haben.

Wählt man die Ebene r so, dass sie ein Geradenpaar aus der Fläche schneidet, was immer geschieht, sobald r die Fläche 2^{ter} Ordnung $p^2 - \psi = 0$ tangirt, so kann die Darstellung der x durch Functionen 3^{ter} Ordnung in ϱ, σ geleistet werden. Die Ebene r enthalte das Paar $a_1 a_2$, die Ebene C das Paar $A_1 a_2$. Dann bilden sich a_1, b_1, A_1 als einfache Fundamentalpunkte, dagegen A_2 doppelt ab, sodass die 3 ersteren, sowie das zusammenfallende Punktepaar A_1 mit A_2 in einer Geraden liegen. Letztere ist das Bild des Knotenpunktes k_1, erstere nebst dem zusammenfallenden Punktenpaar A_1 stellen die zusammengehörigen Knotenpunkte dar. Die Verbindungslinien von A_1 mit a_1 und b_1 sind die 2 letzten Geraden der Fläche. Die eine Doppelgerade ist der Kegelschnitt durch a_1, b_1 und das zusammenfallende Punktepaar, die andre ist eine Gerade durch A_2. Wählt man noch die Ebene q so, dass sie die Fläche 2^{ter} Ordnung $p^2 - \psi = 0$ tangirt, was noch immer möglich ist, so werden die Geraden a_1, b_1, a_2, b_2 in den Rückkehrpunkten die Doppelgeraden schneiden. Daraus folgt dann, dass die Bilder derselben in die Fundamentalpunkte a_1, b_1 sowie in die Schnittpunkte der Geraden $A_1 a_1$, $A_1 b_1$ mit dem Bild der andern Doppelgeraden fallen. Wenn man die Bedingungen entwickelt, dass q, r die Fläche $p^2 - \psi = 0$ tangirt, so erhält man die Gleichungen

$$0 = b^2 - c^2 + a^2, \quad 0 = b^2 - c'^2 + a^2,$$

welche daher immer erfüllt werden können. Solcher Abbildungen giebt es 2 Classen, welche sich durch das entgegengesetzte Verhalten der beiden zusammengehörigen Knotenpunkte unterscheiden.

Bedient man sich endlich bei der Abbildung der beiden Ebenenbüschel $s_2 - \sigma t = 0$ und $q - \varrho^2 r = 0$, so folgt die rationale Darstellung der x als Functionen vierten Grades in σ, ϱ aus den 3 Gleichungen:

$$s_1 \sigma + (l + 2t)\tau - 2\varrho r = 0$$
$$s_2 \tau - \sigma t = 0$$
$$q\tau^2 - \varrho^2 r = 0,$$

wo τ die dritte homogene Coordinate. Der Doppelpunkt τ, σ ist das Bild des in r liegenden Kegelschnitts, der andre τ, ϱ nebst der Geraden τ ist die Abbildung der Doppelgeraden $t = 0$, $s_1 = 0$. Da ausserdem A_2A_2, a_2b_2 und A_1A_2, a_1a_2, b_1b_2 die benutzten Geradenpaare sind, so werden sich a_2, b_2 als einfache Fundamentalpunkte, dagegen A_2 doppelt abbilden, sodass erstere sowie die zusammenfallenden Punkte A_2 mit dem Punkt (τ, σ) in einer Geraden liegen. Diese beiden Geraden sind die Bilder der zusammengehörigen Knotenpunkte und die beiden Punkte A_2 stellen den andern dar. Die Doppelgerade $s_2 = 0$, $t = 0$ wird wieder die Curve 3^{ter} Ordnung sein, welche durch alle Fundamentalpunkte geht und in τ, ϱ einen Doppelpunkt besitzt. Die Verbindungslinien des Punktes τ, ϱ mit a_1, b_1, A_2 geben die 3 letzten in der Fläche liegenden Geraden a_2, b_2, A_1. Die singulären Tangentenebenen q, r treffen die Fläche in den 4 Rückkehrpunkten. Daraus folgt, dass die Bilder der auf der Geraden $t = 0$, $s_1 = 0$ liegenden durch die Gerade τ und die Richtung der Geraden ϱ im Doppelpunkt ϱ, τ dargestellt werden. Die der andern Geraden $t = 0$, $s_2 = 0$ angehörigen sind dann der Schnitt ihres Bildes mit ϱ und ihre Tangentenrichtung im Doppelpunkt τ, σ.

Solcher Abbildungen giebt es 2 Classen nach Wahl des Ebenenbüschels; sie unterscheiden sich dadurch, dass sich die beiden Doppelgeraden und mit ihnen ihre zugehörigen Geraden in entgegengesetzter Weise abbilden.

VI.

Die Fläche besitzt 4 besondere Knotenpunkte.

Eine solche Fläche wird durch die Gleichung

$$(p^2 + qr - st)^2 = 4p^2qr$$

dargestellt. Wird das Coordinatentetraeder so gewählt, dass 3 seiner Ecken in die Nebenecken des aus den 4 Rückkehrpunkten gebildeten vollständigen Vierecks fallen und die vierte Ecke auf der Schnittlinie $q = 0$, $r = 0$ liegt und zwar harmonisch zu den beiden Knotenpunkten und dem Schnitte mit $p = 0$, so lässt sich diese Gleichung in die Form setzen:

$$\{p^2 + (x+y)(x-y) - (ax+bz+cp)(ax-bz+cp)\}^2 = 4p^2(x+y)(x-y).$$

Damit die Doppelcurve in ein Linienpaar zerfalle, muss die Ebene $p = 0$ die Fläche $qr - st = 0$ berühren. Dieses wird erfüllt, wenn $a = 1$; und $b^2z^2 - y^2 = 0$ ist dann das Produkt der Gleichungen der beiden Doppelgeraden. Ich will dasselbe bezeichnen mit $s_1 \,.\, s_2 = 0$. Wird in obiger Gleichung $a = 1$ gesetzt und geordnet, so entsteht

$$\{p\,(p - pc^2 - 2cx) + b^2z^2 - y^2\}^2 = 4p^2\,(x^2 - y^2).$$

Setzt man den linearen Factor $p - pc^2 - 2cx = l$ und kehrt zur früheren Bezeichnung zurück, so wird diese Gleichung:

$$(p \,.\, l + s_1 \,.\, s_2)^2 = 4p^2qr\,.$$

Die 4 Verbindungslinien der Knotenpunkte, welche in der Fläche liegen, sollen mit A_1, A_2, A_3, A_4 bezeichnet werden, sodass A_1A_3, A_1A_4, A_2A_3, A_2A_4 die 4 Geradenpaare der Fläche sind. Dann werden A_1 und A_2 die eine, A_3 und A_4 die andre Doppelgerade schneiden. Die 4 singulären Tangentenebenen, welche längs diesen Geraden die Fläche berühren, werden daher paarweise je eine Doppelgerade enthalten und in deren Schnittpunkt einen gemeinsamen Schnittpunkt besitzen. Die doppelt gerechneten Geraden A_1, A_2 sind dann die Paare, welche der Ebenenbüschel $s_1 - \sigma p = 0$ aus der Fläche schneidet, A_3 und A_4 die des andern $s_2 - \sigma p = 0$. Die Paare des Ebenenbüschels $q - \varrho r = 0$ sind A_1A_4, A_2A_3 und die des Büschels $s - \varrho t = 0$ sind A_1A_3, A_2A_4.

Benutzt man bei der Abbildung die Ebenenbüschel $q - \varrho^2 r = 0$ und $s_1 - \sigma p = 0$, so zerfällt die Flächengleichung in die Factoren $\tau l + \sigma s_2 + 2\varrho r = 0$ und $\tau l + \sigma s_2 - 2\varrho r = 0$ und einer derselben in Verbindung mit $\tau q^2 - \varrho^2 r = 0$ und $\tau s_1 - \sigma p = 0$ stellt die x als rationale Functionen vierten Grades in ϱ, σ, τ dar. Der Doppelpunkt σ, τ ist das Bild des in r liegenden Kegelschnitts, der andre ϱ, τ das Bild der Doppelgeraden $p = 0$, $s_2 = 0$. Die Geraden A_1, A_2 werden sich doppelt abbilden, sodass diese zusammenfallenden Punkte mit dem ersten Doppelpunkt beziehungsweise in einer Geraden liegen. Die doppelt gerechneten Fundamentalpunkte, sowie jene beiden Geraden stellen die Abbildungen der zusammengehörigen Knotenpunkte dar. Die beiden letzten liegen mit den Dreiecksseiten τ, σ harmonisch. Die Verbindungslinien von A_1 und A_2 mit dem Punkt τ, ϱ geben die Geraden A_4 und A_3. Die Doppellinie $p = 0$, $s_1 = 0$ ist die Curve 3^{ter} Ordnung durch alle Fundamentalpunkte mit Doppelpunkt in τ, ϱ. Die Kegelschnittschaar des Ebenenbüschels $q - \varrho^2 r = 0$ ist der Strahlbüschel, dessen Scheitel in τ, ϱ, sodass 2 in einer Ebene liegende Gebilde durch 2 Strahlen dargestellt werden, welche mit den Dreiecksseiten τ, ϱ harmonisch liegen. Letztere selbst sind die Bilder der Schnitte der singulären Tangentenebenen r, q und stellen zugleich die beiden Rückkehrpunkte der Doppelgeraden $p = 0$, $s_2 = 0$ dar. Die der andern fallen in den Schnittpunkt von ϱ mit der Curve 3^{ter} Ordnung und in die Ecke τ, σ des Coordinatendreiecks. Die Kegelschnittschaar des Büschels $s - \varrho^2 t = 0$ ist der Curvenbüschel 2^{ter} Ordnung durch die zusammenfallenden Punkte und die Doppelpunkte und die beiden Schaaren der Büschel $s_1 - \sigma p = 0$ und $s_2 - \sigma p = 0$ sind der Strahlbüschel, dessen Scheitel in die Ecke τ, σ und der Curvenbüschel 3^{ter} Ordnung durch alle Fundamentalpunkte mit gemeinsamem Doppelpunkt in der Ecke τ, ϱ.

Solcher Abbildungen giebt es 2 Gruppen nach Wahl des Ebenenbüschels einer Doppellinie und jede enthält 2 Classen nach Wahl des Ebenenbüschels eines Knotenpunktpaars. Die beiden Gruppen unterscheiden sich dadurch von einander, dass sich die Doppellinien und mit ihnen die zugehörigen Geraden entgegengesetzt abbilden und die Classen einer Gruppe durch entgegengesetztes Verhalten der Knotenpunktpaare.

Bedient man sich bei der Abbildung der beiden Ebenenbüschel $q - \varrho^2 r = 0$ und $s - \sigma^2 t = 0$, so folgt die eindeutige Darstellung der x aus den Gleichungen:

$$\begin{aligned} p + \varrho r + \sigma t &= 0 \\ q - \varrho^2 r &= 0 \\ s - \sigma^2 t &= 0 \end{aligned}$$

oder bei unserer Wahl des Coordinatensystems und wenn auch die Gleichungen homogen gemacht werden:

$$\begin{aligned} p\tau + \sigma\,(x - y) + \varrho\,(x - bz + cp) &= 0 \\ \tau^2\,(x + y) - \sigma^2\,(x - y) &= 0 \\ \tau^2\,(x + bz + cp) - \varrho^2\,(x - bz + cp) &= 0\,. \end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \mu x &= -\,b\,(\tau^2 + \sigma^2)\,(\tau^2 + \varrho^2 + 2\varrho\tau c) \\ \mu y &= \quad b\,(\tau^2 - \sigma^2)\,(\tau^2 + \varrho^2 + 2\varrho\tau c) \\ \mu z &= \quad (\tau^2 - \varrho^2)\,(\tau^2 + \sigma^2 - 2c\sigma\tau) \\ \mu p &= 2b\tau\,(\varrho + \sigma)\,(\tau^2 + \sigma\varrho)\,. \end{aligned}$$

Die beiden Doppelpunkte der Abbildung τ, ϱ und τ, σ sind die Bilder der in t und r liegenden Kegelschnitte. Die eine Doppelgerade, auf welcher sich diese beiden schneiden, wird durch die Dreiecksseite τ in Verbindung mit der Geraden $\varrho + \sigma = 0$ dargestellt und die andre durch den Kegelschnitt $\tau^2 + \sigma\varrho = 0$. Die beiden Knotenpunktepaare werden durch die Linienpaare $\tau^2 + \varrho^2 + 2\varrho\tau c = 0$ und $\tau^2 + \sigma^2 - 2c\sigma\tau = 0$ dargestellt. Zwei einfache Fundamentalpunkte sind die Schnittpunkte von $\varrho + \sigma = 0$ mit $\tau^2 + \varrho^2 + 2\varrho\tau c = 0$ und die zwei andern sind die Schnittpunkte desselben Linienpaares mit $\tau^2 + \varrho\sigma = 0$. Dieselben stellen die 4 auf der Fläche liegenden Geraden dar, sie liegen ausserdem noch auf dem Linienpaar $\tau^2 + \sigma^2 - 2c\sigma\tau = 0$. Die Benutzung von q und s zu Ausgangsebenen liefert dieselbe Abbildung; dagegen bei Benutzung der Ebenen q, t oder r, s werden sich die Doppelgeraden entgegengesetzt abbilden.*)

*) In einer weiteren Abhandlung werden die Fälle behandelt werden, in welchen die beiden Doppelgeraden der Fläche einander unendlich nahe rücken.

Berechnung der Menge von Primzahlen, welche innerhalb der ersten Hundert Millionen natürlicher Zahlen vorkommen.

Von Meissel in Iserlohn.

Die folgende Berechnung bildet die Fortsetzung der im II. Bde. gegenwärtiger Zeitschrift pag. 636 folgg. ausgeführten Berechnungen von Primzahlenmengen. Behalten die daselbst gebrauchten Zeichen ihre Bedeutung, so ergiebt sich für

$$m = 100\ 000\ 000$$

$$n + \mu = \varphi\sqrt{m} = 1\ 229$$

$$n = \varphi\sqrt[3]{m} = 90$$

$$\mu = 11\ 39$$

$$\varphi(m) = \Phi(m, 90) + 750\ 690 - \sum_{91}^{1229} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right).$$

Berechnung von $\Phi(m, 90)$.

a) Reduction von $\Phi(m, 90)$ auf $\Phi(m, 80)$ nach Formel 5.

Φ (215 982, 89) =	19 199
(216 919, 88) =	19 277
(218 818, 87) =	19 434
(222 717, 86) =	19 770
(225 733, 85) =	20 037
(227 790, 84) =	20 222
(230 946, 83) =	20 516
(232 018, 82) =	20 622
(237 529, 81) =	21 079
(238 663, 80) =	21 199
Summa =	201 355

a) $\Phi(m, 90) = \Phi(m, 80) - 201\ 355$

b) Reduction von $\Phi(m, 80)$ auf $\Phi(m, 70)$

Φ (244 498, 79) =	21 733
(249 376, 78) =	22 191
(251 889, 77) =	22 448
(257 069, 76) =	22 937
(261 096, 75) =	23 338
(263 852, 74) =	23 625
(268 096, 73) =	24 070
(272 479, 72) =	24 520
(278 551, 71) =	25 121
(283 286, 70) =	25 615
Summa =	235 598

b) $\Phi(m, 80) = \Phi(m, 70) - 235\ 598$

c) Reduction von $\Phi(m, 70)$ auf $\Phi(m, 60)$

Φ (286 532, 69) =	25 979
(288 184, 68) =	26 190
(296 735, 67) =	27 047
(302 114, 66) =	27 625
(315 457, 65) =	28 955
(319 488, 64) =	29 451
(321 543, 63) =	29 757
(325 732, 62) =	30 273
(341 296, 61) =	31 866
(353 356, 60) =	33 159
Summa =	290 302

c) $\Phi(m, 70) = \Phi(m, 60) - 290\ 302$

d) Reduction von $\Phi(m, 60)$ auf $\Phi(m, 50)$

Φ (355 871, 59) =	33 552
(361 010, 58) =	34 182
(369 003, 57) =	35 117
(371 747, 56) =	35 539
(380 228, 55) =	36 533
(389 105, 54) =	37 581
(398 406, 53) =	38 708
(414 937, 52) =	40 559
(418 410, 51) =	41 129
(429 184, 50) =	42 428
Summa =	375 328

d) $\Phi(m, 60) = \Phi(m, 50) - 375\ 328$

e) Reduction von $\Phi(m, 50)$ auf $\Phi(m, 40)$

Φ (436 681, 49) =	43 464
(440 528, 48) =	44 092
(448 430, 47) =	45 150
(473 933, 46) =	48 056
(502 512, 45) =	51 344
(507 614, 44) =	52 209
(518 134, 43) =	53 658
(523 560, 42) =	54 593
(552 486, 41) =	58 061
(558 659, 40) =	59 115
Summa =	509 742

e) $\Phi(m, 50) = \Phi(m, 40) - 509\ 742$

f) Reduction von $\Phi(m, 40)$ auf $\Phi(m, 30)$

Φ (578 034, 39) =	61 636
(598 802, 38) =	64 348
(613 496, 37) =	66 451
(636 942, 36) =	69 539
(662 251, 35) =	72 899
(671 140, 34) =	74 466
(719 424, 33) =	80 548
(729 927, 32) =	82 414
(763 358, 31) =	86 955
(787 401, 30) =	90 486
Summa =	749 742

f) $\Phi(m, 40) = \Phi(m, 30) - 749\ 742$

g) Reduction von $\Phi(m, 30)$ auf $\Phi(m, 20)$

Φ (884 955, 29) =	102 740
(917 431, 28) =	107 565
(934 579, 27) =	110 631
(970 873, 26) =	116 076
(990 099, 25) =	119 553
(1 030 927, 24) =	125 779
(1 123 595, 23) =	138 582
(1 204 819, 22) =	150 352
(1 265 822, 21) =	159 911
(1 369 863, 20) =	175 352
Summa =	1 306 541

g) $\Phi(m, 30) = \Phi(m, 20) - 1\ 306\ 541$

h) Reduction von $\Phi(m, 20)$ auf $\Phi(m, 10)$

Φ (1 408 450, 19) =	182 783
(1 492 537, 18) =	196 553
(1 639 344, 17) =	219 394
(1 694 915, 16) =	230 684
(1 886 792, 15) =	261 685
(2 127 659, 14) =	301 485
(2 325 581, 13) =	337 383
(2 439 024, 12) =	362 710
(2 702 702, 11) =	413 104
(3 225 806, 10) =	509 509
Summa =	3 015 290

h) $\Phi(m, 20) = \Phi(m, 10) - 3\ 015\ 290$

i) Reduction von $\Phi(m, 10)$ auf $\Phi(m, 5)$

$$\begin{aligned}\Phi(3\ 448\ 275, 9) &= 564\ 100\\ (4\ 347\ 826, 8) &= 743\ 582\\ (5\ 263\ 157, 7) &= 950\ 134\\ (5\ 882\ 352, 6) &= 1\ 128\ 285\\ (7\ 692\ 307, 5) &= 1\ 598\ 401\\ \text{Summa} &= 4\ 984\ 502\end{aligned}$$

$$\text{i)}\quad \Phi(m, 10) = \Phi(m, 5) - 4\ 984\ 502$$

Da

$$\Phi(m, 5) = 20\ 779\ 221$$

ist, so kann man mittelst a) bis i) folgenden Werth für $\Phi(m, 90)$ herleiten:

$$\Phi(m, 90) = 9\ 110\ 821.$$

Es bleibt nun noch übrig, $\sum_{91}^{1229} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right)$ *zu berechnen.*

Der leichteren Controle wegen mag diese Summe in Absätzen von je 30 Summanden gebildet werden. Man findet:

(91 — 120) =	482 750	(661 — 690) =	67 219
(121 — 150) =	367 270	(691 — 720) =	64 218
(151 — 180) =	294 706	(721 — 750) =	61 702
(181 — 210) =	246 891	(751 — 780) =	59 333
(211 — 240) =	211 080	(781 — 810) =	57 027
(241 — 270) =	186 053	(811 — 840) =	55 128
(271 — 300) =	164 605	(841 — 870) =	52 933
(301 — 330) =	147 949	(871 — 900) =	51 051
(331 — 360) =	134 643	(901 — 930) =	49 501
(361 — 390) =	123 110	(931 — 960) =	47 740
(391 — 420) =	114 466	(961 — 990) =	46 438
(421 — 450) =	105 838	(991 — 1020) =	44 900
(451 — 480) =	98 288	(1021 — 1050) =	43 492
(481 — 510) =	92 338	(1051 — 1080) =	42 164
(511 — 540) =	87 237	(1081 — 1110) =	41 196
(541 — 570) =	82 515	(1111 — 1140) =	40 135
(571 — 600) =	78 184	(1141 — 1170) =	39 157
(601 — 630) =	74 031	(1171 — 1200) =	38 293
(631 — 660) =	70 351	(1201 — 1229) =	36 119

$$\sum_{91}^{1229} \varphi\left(\frac{m}{p_s}\right) = 4\ 100\ 051$$

Folglich:

$$\varphi(m) = 5\ 761\ 460.$$

On the Deficiency of Certain Surfaces.

By A. Cayley.

If a given point or curve is to be an ordinary or singular point or curve on a surface of the order n, this imposes on the surface a certain number of conditions, which number may be termed the „Postulation"; thus „Postulation of a given curve *quà* i-tuple curve on a surface n" will denote the number of conditions to be satisfied by the surface in order that the given curve may be an i-tuple curve on the surface.

The „deficiency" (Flächengeschlecht) of a given surface of the order n is

$= \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)$ *less* deficiency-value of the several singularities viz. as shown by Dr. Noether, if the surface has a given i-tuple curve, the deficiency-value hereof is

= Postulation of the curve *quà* $(i-1)$ tuple curve on a surface $n-4$;

and if the surface has an i-conical point, the deficiency-value hereof is

= Postulation of the point *quà* $(i-2)$ conical point (on a surface $n-4$); viz. this is $= \frac{1}{6} i(i-1)(i-2)$, and is thus independent of the order of the surface.

I remark that if the tangent-cone at the i-conical point has δ double lines and $\varkappa$ cuspidal lines, then the deficiency-value is

$$= \tfrac{1}{6} i(i-1)(i-2) + (i-2)(n-i-1)(\delta + \varkappa).$$

In the case of a double or cuspidal curve i is $= 2$, and the deficiency-value is

= Postulation of given curve *quà* simple curve on a surface $n-4$;

and so for an ordinary conical point i is $= 2$, and the deficiency-value is $= 0$: results which were first obtained by Dr. Clebsch.

I found in this manner the expression for the deficiency of a surface n having a double and cuspidal curve and the other singularities considered in my „Memoir on the theory of Reciprocal surfaces" Phil. Trans. vol. 159 (1869); viz. this was

$D = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - (n-3)(b+c) + \frac{1}{2}(q+r) + 2t + \frac{7}{2}\beta + \frac{3}{2}\gamma + i - \frac{1}{8}\Theta,$

where we have

b, order of double curve,

q, class of D^{ic},

c, order of cuspidal curve,

r, class of D^{ic},

β, number of intersections of the two curves, stationary points on b,

γ, number of intersections, stationary points on c,

i, number of intersections, not stationary points on either curve,

Θ, number of certain singular points on c, the nature of wich I do not completely understand, and which is here taken to be $= 0$.

Before going further I remark that

Postulation of right line *quà* i-tuple on surface n

$$= \frac{1}{6} i(i+1) n - \frac{1}{6} i(i+1)(2i-5),$$
$$= \frac{1}{6} i(i+1)(3n-2i+5).$$

Whence if a surface n has a i-tuple right line, the deficiency-value hereof is

$$= \frac{1}{6} i(i-1)(3n-2i-5),$$

or we have

$$D = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - \frac{1}{6} i(i-1)(3n-2i-5)$$
$$= \frac{1}{6}(i-n+1)(i-n+2)(2i+n-3);$$

so that $D = 0$ if either $i = n-1$ or $i = n-2$; the former case is that of a scroll (skew surface) with a $(n-1)$ tuple right line the latter that of a surface with a $(n-2)$ tuple line: whence (as shown by Dr. Noether) such surface is rationally transformable into a plane.

For a surface of the order n with a i-conical point where the tangent cone has δ double lines and $\varkappa$ cuspidal lines, we have

$$D = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - \left\{\frac{1}{6} i(i-1)(i-2) + (i-2)(n-i-1)(\delta+\varkappa)\right\}$$
$$= \frac{1}{6}(n-i-1)\left\{n^2 + n(i-5) + i^2 - 4i + 6 - 6(i-2)(\delta+\varkappa)\right\}$$

viz. for $i = n-1$ this is $D = 0$ (in fact a surface n with a $(n-1)$ conical point is at once seen to be rationally transformable into a plane): and for $i = n$, that is for a cone of the order n, we have

$$D = -\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + (n-2)(\delta+\varkappa) - (n-3)(\delta+\varkappa),$$

where the last term $-(n-3)(\delta+\varkappa)$ is added because in the present case the surface has the δ double lines and the $\varkappa$ cuspidal lines.

The formula therefore gives

$$D = -\frac{1}{2}(n-1)(n-2) + \delta + \varkappa,$$

viz. this is equal to the deficiency of the plane sections *taken negatively*.

I find that the same property exists *first* in the case of a scroll (skew surface) having only a double curve; and *secondly* in the case of a torse (developable surface) having a cuspidal curve with the ordinary singularities; and this being so there can I think be no doubt but that it is true for any scroll or torse whatever — viz. that for any ruled surface whatever the deficiency is equal to that of the plane section taken negatively.

First for the scroll we have

$$D = \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - (n-3)b + \tfrac{1}{2}q + 2t,$$

which should be

$$= -\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2) + b.$$

Salmon's equations give in the case of a scroll

$$3t = (n-4)\{3b - n(n-2)\},$$
$$q = n(n-2)(n-5) - 2(n-6)b,$$

and with these values the relation is at once verified.

Secondly for the torse; changing the notation into that used for the singularities of the curve and torse, we have

$$D = \tfrac{1}{6}(r-1)(r-2)(r-3) - (r-3)(x+m) + \tfrac{1}{2}(q+r) + 2t + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{3}{2}\gamma + \alpha$$

which should be

$$= -\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) + h + \beta;$$

we have $q = r(n-3) - 3\alpha$, and substituting this value and expressing every thing in terms of r, m, n by means of the formula

$$x = \tfrac{1}{2}(r^2 - r - n - 3m),$$
$$\alpha = m - 3r + 3n,$$
$$\beta = n - 3r + 3m,$$
$$t = \tfrac{1}{6}\{r^3 - 3r^2 - 58r - 3r(n+3m) + 42n + 78m\},$$
$$\gamma = rm + 12r - 14m - 6n,$$
$$h = \tfrac{1}{2}(m^2 - 10m - 3n + 8r),$$

we have after all reductions

$$D = -\tfrac{1}{2}(m+n) + r - 1 = -\tfrac{1}{2}(m-1)(m-2) + h + \beta.$$

We have thus a class of surfaces of *negative deficiency*; viz. any rational transformation of a cone for which the plane section has a given (positive) deficiency produces such a surface: and I think it may be assumed conversely that a surface of negative deficiency is always the rational transformation of a cone for which the deficiency is equal to that of the surface taken with the reverse sign. As an instance take a quintic surface having a nodal conic and two 3-conical (cubiconical) points (this of course implies that the line joining the two cubiconical points is a line on the surface); the formula for the deficiency is ($n = 5$, $b = 2$, $q = 2$, $r = 0$, $t = 0$)

$$D = \tfrac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3) - (n-3)b + \tfrac{1}{2}q + 2t - 2$$

(viz. a term -1 for each of the cubiconical points)

$$= 4 - 4 + 1 \quad - 2, \quad = -1.$$

Such a surface can be obtained as the quadric inverse of a cubic cone; viz. taking for the vertex the point $x : y : z : \omega = \alpha : \beta : \gamma : \delta$ and the cone to pass thro' the point $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, the equation of the cone is

$$(\delta x - \alpha\omega, \quad \delta y - \beta\omega, \quad \delta z - \gamma\omega)^3 = 0$$

where $(\alpha, \beta, \gamma)^3 = 0$.

Taking Q a quadric function $(x, y, z)^2$, the transformation in question consists in the change of x, y, z, ω into $x\omega, y\omega, z\omega, Q$; viz. the new equation, rejecting the factor ω which divides out, is

$$\frac{1}{\omega}(\delta x\omega - \alpha Q, \quad \delta y\omega - \beta Q, \quad \delta z\omega - \gamma Q)^3 = 0$$

which is a quintic surface having the two cubiconical points $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ and $x : y : z : \omega = \alpha : \beta : \gamma : \frac{1}{\delta} Q_0$ (where Q_0 is the value of Q on writing therein α, β, γ in place of x, y, z): and having the nodal conic $\omega = 0$, $Q = 0$.

Cambridge, 5. Jan. 1871.

Notiz über die algebraischen Minimumsflächen.

Von C. F. Geiser in Zürich.

I.

Wenn auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem im Raume bezogen die Gleichung einer Fläche durch

$$u = 0$$

gegeben ist, wenn ferner zur Abkürzung

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u_1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = u_2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = u_3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{11} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u_{22} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = u_{33}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = u_{23} = u_{32} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = u_{31} = u_{13} \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = u_{12} = u_{21}$$

gesetzt wird, so bestimmt man in jedem Punkte der Fläche die beiden Hauptkrümmungsradien durch die Ausdrücke

$$r_1 = \frac{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}{\lambda_1} \quad , \quad r_2 = \frac{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}{\lambda_2} \, ,$$

wo λ_1 und λ_2 die Wurzeln der in λ quadratischen Gleichung

$$\begin{vmatrix} u_{11} - \lambda & u_{12} & u_{13} & u_1 \\ u_{21} & u_{22} - \lambda & u_{23} & u_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} - \lambda & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sind, und wo für die Quadratwurzeln in r_1 und r_2 ein und dasselbe Vorzeichen zu wählen ist*).

Wird diese Gleichung nach Potenzen von λ entwickelt und in der Form

$$T + \lambda U + \lambda^2 V = 0$$

geschrieben, so stellt, wenn nicht etwa $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$ ist,

$$U = 0$$

eine Fläche dar, die der Fläche $u = 0$ in denen ihrer Punkte begegnet,

*) Vergl. „Hesse, analyt. Geom. des Raumes". Erste Auflage. Seite 355.

für welche die Summe der Hauptkrümmungen, d. h. $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}$ verschwindet. Ist $u = 0$ eine Minimumsfläche, so muss also in allen ihren Punkten auch $U = 0$ sein.

Wird diese Bemerkung auf algebraische Flächen angewandt, indem man u als eine rationale und ganze Function n^{ten} Grades in x, y, z voraussetzt, so hat man zunächst u_1, u_2, u_3 als Functionen vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade, $u_{11}, u_{22}, u_{33}, u_{23}, u_{31}, u_{12}$ vom $(n-2)^{\text{ten}}$ Grade und da

$$-U = (u_{22}+u_{33})u_1^2 + (u_{33}+u_{11})u_2^2 + (u_{11}+u_{22})u_3^2 - 2u_{33}u_2u_3 - 2u_{31}u_3u_1 - 2u_{12}u_1u_2$$

ist, U als eine Function vom Grade $(3n-4)$ in den Coordinaten xyz. Wenn also $u = 0$ eine algebraische Minimumsfläche vom n^{ten} Grade ist, so zerfällt die zugehörige Fläche $(3n-4)^{\text{ten}}$ Grades $U = 0$ in $u = 0$ selbst und eine Fläche $v = 0$ vom Grade $(2n-4)$, derart, dass die Gleichung besteht:

$$u \,.\, v = U.$$

II.

Die Glieder n^{ten} Grades, welche in u vorkommen, bezeichne man in ihrer Gesammtheit mit $\mathfrak{u}$, so dass $\mathfrak{u}$ eine homogene Function n^{ten} Grades der Coordinaten ist. Werden dann die ersten und zweiten Differentialquotienten von $\mathfrak{u}$ nach x, y, z analog zu den Formeln in (1) mit $\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_3$; $\mathfrak{u}_{11}, \mathfrak{u}_{22}, \mathfrak{u}_{33}, \mathfrak{u}_{23}, \mathfrak{u}_{31}, \mathfrak{u}_{12}$, in die Betrachtung eingeführt, so erkennt man, dass jedes dieser $\mathfrak{u}$ aus dem entsprechenden u hervorgeht, indem man bei den u mit einem einzigen untern Index nur die Glieder $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades, bei denen mit zwei untern Indices nur die Glieder vom Grade $(n-2)$ berücksichtigt. Es folgt daraus, dass

$$-\mathfrak{U} = (\mathfrak{u}_{22}+\mathfrak{u}_{33})\mathfrak{u}_1^2 + (\mathfrak{u}_{33}+\mathfrak{u}_{11})\mathfrak{u}_2^2 + (\mathfrak{u}_{11}+\mathfrak{u}_{22})\mathfrak{u}_3^2 - 2\mathfrak{u}_{23}\mathfrak{u}_2\mathfrak{u}_3 - 2\mathfrak{u}_{31}\mathfrak{u}_3\mathfrak{u}_1 - 2\mathfrak{u}_{12}\mathfrak{u}_1\mathfrak{u}_2$$

eine homogene Function der Coordinaten ist und mit den Gliedern $(3n-4)^{\text{ten}}$ Grades des Ausdruckes $-U$ übereinstimmt.

Da nun für die Minimumsfläche $u = 0$ die Gleichung $U = u \,.\, v$ besteht, so muss auch

$$\mathfrak{U} = \mathfrak{u} \,.\, \mathfrak{v}$$

sein, wo $\mathfrak{v}$ einen homogenen Ausdruck $(2n-4)^{\text{ten}}$ Grades in x, y, z bedeutet. Es stellt aber

$$\mathfrak{u} = 0,$$

in demselben Coordinatensysteme wie $u = 0$ interpretirt, den Kegel dar, welcher von dem Anfangspunkt der Coordinaten nach dem Schnitte

der Fläche $u = 0$ mit der unendlich entfernten Ebene des Raumes gelegt werden kann; ist also $u = 0$ eine Minimumsfläche, so gilt das Nämliche auch für den Kegel $\mathfrak{u} = 0$.

III.

Ist $\mathfrak{u} = 0$ ein beliebiger irreductibler Kegel n^{ten} Grades, dessen Mittelpunkt im Anfangspunkt der Coordinaten liegt [und welcher nicht mit dem Kegel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ identisch ist], so kann nur in solchen seiner Punkte die Summe der Hauptkrümmungen verschwinden, für welche auch der zugehörige Ausdruck $\mathfrak{U}$ verschwindet. Es stellt aber $\mathfrak{U} = 0$ einen mit $\mathfrak{u} = 0$ conzentrischen Kegel vom Grade $(3n - 4)$ dar, so dass also $n(3n - 4)$ Kanten des Kegels n^{ten} Grades existiren, für deren Punkte die eben gestellte Bedingung erfüllt ist. Von diesen Kanten sind $3n(n - 2)$ durch die Wendekanten des Kegels $\mathfrak{u} = 0$ gegeben*), da für einen Punkt auf der Wendekante beide Hauptkrümmungsradien unendlich gross sind. Die übrigen $2n$ derselben werden durch folgende Betrachtung bestimmt:

Der Ausdruck $\mathfrak{U}$ ist der Coefficient von λ in der entwickelten Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{u}_{11} - \lambda & \mathfrak{u}_{12} & \mathfrak{u}_{13} & \mathfrak{u}_1 \\ \mathfrak{u}_{21} & \mathfrak{u}_{22} - \lambda & \mathfrak{u}_{23} & \mathfrak{u}_2 \\ \mathfrak{u}_{31} & \mathfrak{u}_{32} & \mathfrak{u}_{33} - \lambda & \mathfrak{u}_3 \\ \mathfrak{u}_1 & \mathfrak{u}_2 & \mathfrak{u}_3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Multiplicirt man die Elemente der letzten Verticalreihe mit $(n - 1)$, subtrahirt von ihr die erste Verticalreihe mit x multiplicirt, die zweite Verticalreihe mit y multiplicirt, die dritte Verticalreihe mit z multiplicirt, so erhält man unter Beachtung der Gleichungen

$$\begin{aligned} n\,\mathfrak{u} &= x\mathfrak{u}_1 + y\mathfrak{u}_2 + z\mathfrak{u}_3 \\ (n-1)\,\mathfrak{u}_1 &= x\mathfrak{u}_{11} + y\mathfrak{u}_{12} + z\mathfrak{u}_{13} \\ (n-1)\,\mathfrak{u}_2 &= x\mathfrak{u}_{21} + y\mathfrak{u}_{22} + z\mathfrak{u}_{23} \\ (n-1)\,\mathfrak{u}_3 &= x\mathfrak{u}_{31} + y\mathfrak{u}_{32} + z\mathfrak{u}_{33} \end{aligned}$$

folgende neue Form der Determinante:

$$(n-1)\,\Delta = \begin{vmatrix} \mathfrak{u}_{11} - \lambda & \mathfrak{u}_{12} & \mathfrak{u}_{13} & \lambda x \\ \mathfrak{u}_{21} & \mathfrak{u}_{22} - \lambda & \mathfrak{u}_{23} & \lambda y \\ \mathfrak{u}_{31} & \mathfrak{u}_{32} & \mathfrak{u}_{33} - \lambda & \lambda z \\ \mathfrak{u}_1 & \mathfrak{u}_2 & \mathfrak{u}_3 & -n\mathfrak{u} \end{vmatrix}.$$

*) Jede vorkommende Doppelkante des Kegels zählt dabei für sechs, jede Rückkehrkante für acht Wendekanten.

Multiplicirt man hier die letzte Horizontalreihe mit $(n-1)$ und subtrahirt von ihr die erste, zweite, dritte Horizontalreihe, denen man zuerst resp. die Factoren x, y, z beigegeben hat, so folgt

$$(n-1)^2\Delta = \begin{vmatrix} u_{11}-\lambda & u_{12} & u_{13} & \lambda x \\ u_{21} & u_{22}-\lambda & u_{23} & \lambda y \\ u_{31} & u_{32} & u_{33}-\lambda & \lambda z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z & n(n-1)u-\lambda(x^2+y^2+z^2) \end{vmatrix}$$

in welchem Ausdrucke die λ nur scheinbar bis zum vierten Grade ansteigen, da bei gehöriger Entwicklung die Coefficienten von λ^3 und λ^4 verschwinden müssen.

Setzt man unter Beachtung des letzterwähnten Umstandes gleichzeitig

$$u = 0 \qquad x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

und ordnet nach Potenzen von λ, so erhält man

$$(n-1)^2\,\Delta = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & x \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & y \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & z \\ x & y & z & 0 \end{vmatrix} . \lambda^2.$$

Da also in Δ kein nach λ lineares Glied vorkommt, so muss u für jeden Punkt verschwinden, der auf den Kegeln $u = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ gleichzeitig liegt. Damit sind die gesuchten $2n$ Kanten als Schnitte des gegebenen Kegels mit demjenigen ihm concentrischen Kegel hergestellt, der über dem unendlich entfernten imaginären Kreise des Raumes steht.

Soll nun ein algebraischer Kegel zugleich Minimumsfläche sein, so müssen seine sämmtlichen Kanten entweder als Wendekanten auftreten, oder nach den Punkten des unendlich entfernten imaginären Kreises gehen, d. h. er besteht aus Ebenen, die einen gemeinschaftlichen Punkt haben, und dem Kegel, der diesen Punkt mit dem genannten Kreise verbindet. [Dieser letztere Kegel ist bekanntlich eine Kugel mit dem Radius Null, welche also in gewissem Sinne als Minimumsfläche betrachtet werden kann und muss, was übrigens leicht direct zu verificiren ist].

In Rücksicht auf das Schlussresultat des § II. folgt jetzt unmittelbar der Satz:

Der Schnitt einer algebraischen Minimumsfläche mit der unendlich entfernten Ebene des Raumes kann keine andern Elemente enthalten, als den unendlich entfernten imaginären Kreis [*ein- oder mehrmals gelegt*] *und gerade Linien, die ebenfalls unter Umständen mehrfach auftreten.*

IV.

Dieselben Mittel, welche zum Beweise des eben angegebenen Theorems geführt haben, dienen auch zur Herleitung eines andern Satzes, der sich auf die vielfachen Punkte der algebraischen Minimumsflächen bezieht.

Hat die Fläche n^{ten} Grades $u = 0$, wo u eine Function n^{ten} Grades der rechtwinkligen Coordinaten x, y, z bedeutet, einen μfachen Punkt, welcher, was der Allgemeinheit keinen Abbruch thut, im Anfangspunkt der Coordinaten liegt, so sind die Glieder niederster Ordnung in u vom μ^{ten} Grade und geben gleich Null gesetzt die Gleichung

$$u_{(\mu)} = 0$$

des Tangentenkegels μ^{ten} Grades, der sich im μfachen Punkte der Fläche möglichst anschliesst. Bildet man nun nach I. den u zugehörigen Ausdruck U, so werden die in ihm enthaltenen Glieder niederster Ordnung ein homogenes Polynom $U_{(\mu)}$ vom Grade $3\mu - 4$ bilden. Zufolge der Minimumseigenschaft von $u = 0$ ist

$$U = u \,.\, v$$

wo v ein Polynom $(2n - 4)^{\text{ten}}$ Grades bedeutet, und diess Zerfallen zieht nach sich, dass auch

$$U_{(\mu)} = u_{(\mu)} \cdot v_{(\mu)}$$

sein muss, wo $v_{(\mu)}$ ein homogenes Polynom $(2\mu - 4)^{\text{ten}}$ Grades ist, d. h. der Kegel $u_{(\mu)}$ ist ein Minimumskegel. Mit andern Worten:

Der Tangentenkegel in einem vielfachen Punkte einer algebraischen Minimumsfläche zerfällt immer in Ebenen und denjenigen Kegel, welcher vom vielfachen Punkte aus nach dem imaginären unendlich entfernten Kreise des Raumes geht; dabei ist der Fall nicht ausgeschlossen, dass dieser Kegel oder die Ebenen mehrfach (auch Null mal) zu zählen sind.

Zürich, 6. Jan. 1870.

Ueber algebraische Differentialgleichungen erster Ordnung.*)

Von J. Rosanes in Breslau.

Im Folgenden ist der Versuch gemacht worden, mittelst algebraischer Betrachtungen die Frage zu behandeln, unter welchen Bedingungen das vollständige Integral einer Differentialgleichung von der Form:

$$A\,dx + B\,dy = 0,$$

wo A und B ganze Functionen von x und y sind, algebraisch ist.

Nachdem die Untersuchung der dem vollständigen Integral zukommenden Form ergeben hat, dass die linke Seite der Differentialgleichung durch Multiplication mit einer rationalen Function von x, y in ein exactes Differential muss verwandelt werden können, gehe ich auf die einfachste Forderung ein, nämlich die, dass der reciproke Werth des Multiplicators eine ganze Function sein soll, deren Dimension die höhere unter den Dimensionen von A und B um 1 übertrifft. Es resultirt für diesen Fall ein System von sehr einfachen Bedingungen, welche nothwendig sind. Es ist mir aber für jetzt nicht gelungen, zu ermitteln, in wieweit dieses System auch hinreichend sei, um die Erfüllung der gestellten Forderungen nach sich zu ziehen.

§ 1.

Wenn das vollständige Integral der Differentialgleichung

$$A\,dx + B\,dy = 0$$

algebraisch ist, so hat es die Gestalt:

$$J = a + b\alpha + c\beta + \cdots m\lambda = 0,$$

worin $\alpha, \beta, \ldots \lambda$ irgend welche Functionen der willkürlichen Constanten C, ferner $a, b, \ldots m$ ganze Functionen von x, y bedeuten. Bezeichnen wir durch Beifügung der Indices 1, 2 die partielle Differentiation nach x, y, so muss

$$J_1 B - J_2 A = K$$

*) Aus der (nicht veröffentlichten) Habilitationsschrift des Verfassers. Breslau. Ostern 1870.

für alle Werthesysteme x, y, C verschwinden, welche $J = 0$ befriedigen. Wenn K nicht identisch verschwindet (in diesem Falle wäre $J =$ Const. das complete Integral), so eliminire man die Function α aus der Gleichung $K = 0$ mit Hilfe von $J = 0$; dadurch erhält man eine Gleichung $J' = 0$, welche wieder von allen Werthesystemen x, y, C erfüllt wird, für die J verschwindet, welche aber höchstens noch die Functionen β, γ, ... λ von C enthält. Wenn J' identisch verschwindet, so ist

$$a + b \cdot \text{Const.} + c\beta + \cdots + m\lambda = 0$$

das vollständige Integral, wobei für C irgend ein Werth gesetzt werden kann; wenn J' aber nicht identisch verschwindet, so ist es durch J theilbar. Setzt man dann

$$J_1'B - J_2'A = K',$$

so ist K' (wenn es nicht identisch verschwindet und demzufolge $J =$ Const. das vollständige Integral ist) durch J theilbar. Dasselbe gilt von der linken Seite der Gleichung $J'' = 0$, welche entsteht, wenn man β aus $K' = 0$ mit Hilfe von $J' = 0$ eliminirt, u. s. f. Hierbei gelangt man zu einer rationalen Function von x, y, welche $=$ Const. gesetzt, das allgemeine Integral liefert; und zwar spätestens dann, wenn man die sämmtlichen Functionen α, β, ... λ von C eliminirt hat, weil man dann einen von C freien Ausdruck $J^{(\sigma)}$ erhält, welcher durch J theilbar sein soll, also identisch verschwindet.

Das vollständige Integral hat demnach, wenn es algebraisch sein soll, die Form

$$R = \text{Const.},$$

wo R eine rationale Function von x, y ist.

Verallgemeinerung. Besteht zwischen x, y, $\frac{dy}{dx}$ eine algebraische Gleichung, und ist ihr vollständiges Integral ebenfalls algebraisch, also wie oben von der Form $J = a + b\alpha + \cdots + m\lambda = 0$, so lässt es sich auch auf die Form

$$R(x, y, \text{Const.}) = 0$$

bringen, wo R eine ganze rationale Function der drei Argumente ist.

Beweis. Die Differentialgleichung sei:

$$f(dx, dy) = A_0 dy^n - A_1 dy^{n-1} dx + A_2 dy^{n-2} dx^2 - \cdots + (-1)^n A_n dx^n = 0$$

Alsdann verschwindet $f(J_1, -J_2) = K$ mit J. Durch Elimination von α aus $K = 0$ mittelst $J = 0$ gelangt man zu den Functionen J' und K', welche mit J verschwinden u. s. f., wie oben. Hierbei ergiebt sich sicher eine Gleichung von der Form $R(x, y, C) = 0$, welche das vollständige Integral vorstellt, wenn man C als willkürliche Constante betrachtet.

§ 2.

Der vorausgeschickte Satz beweist, dass, sobald $Adx + Bdy = 0$ nur algebraische Integrale besitzt, es eine rationale Function $\frac{Z}{N}$ von x, y geben muss, welche den Ausdruck

$$\frac{ZAdx + ZBdy}{N} \tag{1}$$

zu einem exacten Differentiale macht.

Die Einwirkung dieser Bedingung, welche offenbar für sich allein die Existenz eines vollständigen algebraischen Integrals noch nicht zur Folge hat (erst zwei Multiplicatoren $\frac{Z}{N}$ und $\frac{Z'}{N'}$ liefern das Integral $\frac{ZN'}{NZ'} = \text{Const.}$), auf die Gestalt der Integralfunction soll hier zunächst untersucht werden.

Man könnte auch nach bekannten Methoden den Ausdruck (1) unter der gemachten Voraussetzung integriren, die Unübersichtlichkeit des Verfahrens würde jedoch das Resultat für das Weitere schwer verwendbar machen.

Wenn der Ausdruck (1) ein vollständiges Differential bildet, so ergiebt sich sogleich, wenn wir

$$ZA = P, \qquad ZB = Q$$

setzen, die Bedingung:

$$N(P_2 - Q_1) = PN_2 - QN_1, \tag{2}$$

oder:

$$AN_2 - BN_1 = N\left\{A_2 - B_1 + \frac{AZ_2 - BZ_1}{Z}\right\}$$

und in anderer Form:

$$AZ_2 - BZ_1 = Z\left\{-A_2 + B_1 + \frac{AN_2 - BN_1}{N}\right\}.$$

Die Ausdrücke $\frac{AZ_2 - BZ_1}{Z}$, $\frac{AN_2 - BN_1}{N}$ sind ganz, d. h.:

Jeder irreductible Factor von Z oder N liefert, gleich Null gesetzt, ein particuläres Integral.

Es genügt für unseren Zweck, anzunehmen, dass N keine mehrfachen Factoren besitzt und von höherem Grade als P und Q ist.

Es seien nun E, F, G, ... die irreductibeln Factoren von N und

$$N = E \cdot E' = F \cdot F' = G \cdot G' = \cdots,$$

so dass

$$E' = \frac{N}{E}, \qquad F' = \frac{N}{F}, \qquad G' = \frac{N}{G}, \ldots;$$

dann ist:

$$\frac{P}{N_1} = \frac{Q}{N_2} + \frac{N(P_2 - Q_1)}{N_1 N_2},$$

folglich:

$$\frac{P}{N_1} = \frac{Q}{N_2}$$

für jedes Werthepaar x, y, wofür $N = 0$ wird. Es kann aber auch gezeigt werden, dass $\frac{P}{N_1} = \frac{Q}{N_2}$ für solche Werthepaare constant bleibt. Es ist nämlich zunächst:

$$(3) \qquad \frac{\partial \frac{P}{N_1}}{\partial x} + \frac{\partial \frac{P}{N_1}}{\partial y} \cdot \left[\frac{dy}{dx}\right]_{N=0} = \frac{N_2(N_1P_1 - PN_{11}) - N_1(N_1P_2 - PN_{12})}{N_1^2 N_2}.$$

Mit Hülfe des laut (2) identisch verschwindenden Ausdruckes

$$T = PN_2 - QN_1 - N(P_2 - Q_1)$$

folgern wir aber, dass der Zähler auf der rechten Seite in (3):

$$N_2(N_1P_1 - PN_{11}) - N_1(N_1P_2 - PN_{12})$$
$$= N_1T_1 - TN_{11} + N\{N_1(P_{12} - Q_{11}) - N_{11}(P_2 - Q_1)\},$$

d. h. gleich Null ist für die Werthepaare, welche $N(x, y) = 0$ machen, dass also $\frac{P}{N_1}$ für dieselben constant bleibt.

Die Anzahl der Werthe, welche $\left[\frac{P}{N_1}\right]_{N=0} = \left[\frac{Q}{N_2}\right]_{N=0}$ annehmen kann, hängt von der Zahl der irreductibeln Factoren E, F, G, ... ab, in welche sich $N = E \cdot F \cdot G, \ldots$ zerlegen lässt. Wir dürfen sonach setzen:

$$(4) \qquad \left[\frac{P}{E_1E'}\right]_{E=0} = \left[\frac{Q}{E_2E'}\right]_{E=0} = e, \quad \left[\frac{P}{F_1F'}\right]_{F=0} = \left[\frac{Q}{F_2F'}\right]_{F=0} = f, \text{ u. s. f.}$$

so dass

$$\left.\begin{matrix} P - eE_1E' \\ Q - eE_2E' \end{matrix}\right\}, \quad \left.\begin{matrix} P - fF_1F' \\ Q - fF_2F' \end{matrix}\right\}, \ldots$$

theilbar sind durch resp. E, F, ..., demnach

$$P - eE_1E' - fF_1F' - \ldots$$
$$Q - eE_2E' - fF_2F' - \ldots$$

theilbar durch $E \cdot F \ldots = N$, d. h. identisch Null, weil N von höherem Grade als P und Q ist. Mithin wird:

$$P = eE_1E' + fF_1F' + gG_1G' + \cdots,$$
$$Q = eE_2E' + fF_2F' + gG_2G' + \cdots,$$

und das Integral erhält die Form:

$$e \log E + f \log F + g \log G + \cdots = \text{Const.}$$

(Lassen wir die für N gemachten Einschränkungen fallen, so tritt im Integrale links noch eine rationale Function von x, y hinzu.)

Offenbar genügt es, zur Forderung des rationalen Multiplicators die hinzuzufügen, *dass die Zahlen e, f, g, ... sich wie ganze Zahlen verhalten.*

Ist diese Forderung erfüllt, so schreiben wir das Integral in der Form:

$$E^e \cdot F^f \cdot G^g \cdots = \text{Const.}$$

und denken uns darin e, f, g, ... bereits durch ganze Zahlen ersetzt.

Geometrisch gesprochen, repräsentirt diese Gleichung die Curven eines Büschels.

§ 3.

Gehen wir nun auf die einfachste Forderung ein, nämlich: *wenn A, B ganze Functionen n^{ter} Ordnung von x, y sind, so sollen die Bedingungen dafür gefunden werden, dass eine ganze Function $(n+1)^{\text{ster}}$ Ordnung N existirt, welche*

$$\frac{A\,dx + B\,dy}{N}$$

zu einem exacten Differential macht; so ergiebt sich unmittelbar, dass

$$N(A_2 - B_1) + N_1 B - N_2 A$$

identisch verschwinden muss. Dies giebt Bedingungen zwischen den Coefficienten von A, B, N, aus welchen die von N zu eliminiren wären.

Um diese Elimination zu umgehen, habe ich einen Weg eingeschlagen, welcher den Umstand zum Ausgangspunkte hat, dass man mit Hülfe der Formeln (4) die Grössen e, f, g, ... sowie die Glieder höchster Dimension von N im Voraus sehr einfach bestimmen kann. Dabei möge durch die Bezeichnung $\bar{N}$ angedeutet werden, dass die Glieder höchster Dimension zu nehmen sind; ebenso bei $\bar{A}$, $\bar{B}$ u. s. f.

Für $Z = 1$ liefern nämlich die Formeln (4):

$$\left[\frac{A}{E_1 E'}\right]_{E=0} = \left[\frac{B}{E_2 E'}\right]_{E=0} = c.$$

Da hier jedes Werthepaar benutzt werden kann, welches $E(x, y) = 0$ befriedigt, so wählen wir ein unendlich grosses Paar. Ist somit $x - \varepsilon y$ ein Factor von E, so wird:

$$c = \frac{\bar{A}(\varepsilon, 1)}{\bar{N}_1(\varepsilon, 1)} = \frac{\bar{B}(\varepsilon, 1)}{\bar{N}_2(\varepsilon, 1)}.$$

Da nun

$$\varepsilon \bar{N}_1(\varepsilon, 1) + \bar{N}_2(\varepsilon, 1) = (n+1)\,\bar{N}(\varepsilon, 1) = (n+1)\,\bar{E}(\varepsilon, 1).\bar{E}'(\varepsilon, 1) = 0$$

ist, so ergiebt sich:

$$\varepsilon \bar{A}(\varepsilon, 1) + \bar{B}(\varepsilon, 1) = 0. \tag{5}$$

Hiermit sind e, f, g, ... und $\bar{N}$ bestimmt, sobald die Gleichung (5) keine mehrfachen, und $\bar{A} = 0$, $\bar{B} = 0$ keine gemeinschaftlichen Wurzeln besitzen.

Zerlegt man nämlich $\frac{A}{xA+yB}$ und $\frac{B}{xA+yB}$ in ihre $(n+1)$ Partialbrüche von der Form resp. $\frac{a_\varkappa \alpha_\varkappa}{a_\varkappa x + b_\varkappa y}$ und $\frac{b_\varkappa \alpha_\varkappa}{a_\varkappa x + b_\varkappa y}$ $(\Sigma \alpha_\varkappa = 1)$, so zerfallen die Grössen $\alpha_\varkappa$ möglicherweise in Gruppen gleicher; die Werthe der $\alpha_\varkappa$ in den verschiedenen Gruppen sind resp. die Grössen $e, f, \ldots$, wobei jedoch jetzt $E, F, \ldots$ nicht mehr als irreductibel vorausgesetzt werden können. Gleichzeitig erhält man $\bar{E} = \Pi(a_\varkappa x + b_\varkappa y)$ über diejenigen Linearfactoren von $x\bar{A} + y\bar{B}$, welchen $\alpha_\varkappa = e$ entspricht, $\bar{F} = \Pi(a_\varkappa x + b_\varkappa y)$ über diejenigen, welchen $\alpha_\varkappa = f$ entspricht, u. s. f.

Sind die α sämmtlich von einander verschieden, so muss N das Produkt von $(n+1)$ linearen Functionen sein, und zwar von der Form

$$N = (a_1 x + b_1 y + c_1) \ldots (a_{n+1} x + b_{n+1} y + c_{n+1}).$$

Da

$$A = e E_1 E' + f F_1 F'' + \cdots, \qquad B = e E_2 E' + f F_2 F' + \cdots,$$

so verschwinden A und B für alle Paare (x, y), welche zwei Functionen $a_\varkappa x + b_\varkappa y + c_\varkappa$ annulliren, d. h., geometrisch gesprochen, $\frac{1}{2} n(n+1)$ Schnittpunkte der Linien $A = 0$, $B = 0$ bilden das System sämmtlicher Schnittpunkte von $n+1$ Geraden, deren unendlich ferne Punkte bekannt sind. Diese $(n+1)(n-1) = n^2 - 1$ Bedingungen sind nothwendig und hinreichend, sowie unabhängig von einander.

Verallgemeinert man dieses Verfahren für den Fall, dass N nicht gerade aus linearen Factoren bestehen soll, so findet man verschiedene Systeme von Bedingungen, die je nach der Zerlegung von N in Factoren (oder der Vertheilung der α in Gruppen von gleichen) besonders aufzustellen sind. Jedesmal aber kommt es auf Eliminationen an, deren Ergebniss nicht zu übersehen ist.

§ 4.

Es soll jetzt ein System von Bedingungen hergestellt werden, welche stets erfüllt sind, wenn die Function N der Forderung gemäss gefunden werden kann.

Die Werthepaare (x, y), welche A und B zugleich annulliren, erfüllen entweder zwei der Gleichungen

$$E = 0, \quad F = 0, \quad G = 0, \ldots,$$

oder die Gleichung $A_2 - B_1 = 0$, da der Ausdruck

$$N(A_2 - B_1) + BN_1 - AN_2$$

identisch verschwinden soll. (Dabei ist anzunehmen, dass $e, f, g, \ldots$ von einander verschieden sind, d. h. wenn etwa $e = f$, so sind die Factoren E, F in einen zu vereinigen.) Die Anzahl der Schnittpunkte der Linien $E = 0$, $F = 0$, $\ldots$ unter einander beträgt, wenn $e', f', g', \ldots$ die Grade von resp. $E, F, G, \ldots$ sind,

$$ef + eg + \cdots + fg + \cdots = \frac{(n+1)^2}{2} - \tfrac{1}{2}(e^2 + f^2 + \cdots)$$

und erreicht ihr Maximum $\frac{1}{2}(n+1) \cdot n$ für $e = f = g = \cdots = 1$. Von den Paaren, welche A und B annulliren, erfüllen also mindestens $\frac{1}{2} n(n-1)$ zugleich die Gleichung $A_2 - B_1 = 0$; dies giebt schon mindestens $\frac{1}{2} n(n-1)$ Bedingungsgleichungen.

Um weitere zu erlangen, führen wir die Functionen

$$A_2 - B_1 = \Delta, \qquad A_1 B_2 - A_2 B_1 = R$$

ein, deren erstere in einem Theile der Schnittpunkte von $A = 0$, $B = 0$ verschwindet. Eine einfache Verbindung dieser beiden Functionen nimmt in den übrigen Schnittpunkten charakteristische Werthe an.

Nehmen wir nämlich einen Schnittpunkt, welcher zugleich etwa die Ausdrücke E, F annullirt, so ist

$$A_1 = G \cdot H \ldots (e+f) E_1 F_1, \qquad B_1 = G \cdot H \ldots (e E_2 F_1 + f E_1 F_2),$$
$$A_2 = G \cdot H \ldots (e E_1 F_2 + f E_2 F_1), \quad B_2 = G \cdot H \ldots (e+f) E_2 F_2,$$

und somit haben unsere Functionen Δ und R daselbst die Werthe:

$$\Delta = G \cdot H \ldots (E_1 F_2 - E_2 F_1)(e-f),$$
$$R = -\{G \cdot H \ldots\}^2 (E_1 F_2 - E_2 F_1)^2 \cdot ef,$$

wie eine kleine Rechnung ergiebt. Daraus folgt sofort, dass für alle diese Paare

$$\frac{\Delta^2}{R} = -\frac{(e-f)^2}{ef}.$$

Wenn man alle Schnittpunkte durchgeht, so erhält man auf diese Art höchstens $\frac{1}{2} n(n+1)$, im Ganzen jedenfalls n^2 Bedingungen..

Diese Bedingungen sind jedesmal nach der vorauszusetzenden Zerlegung von N anders aufzustellen. Indess lehrt die folgende Betrachtung, dass sich die verschiedenen Systeme durch eines ersetzen lassen.

Die Zahlen e, f, ... waren definirt durch die Partialbruchentwickelung

$$\frac{A}{xA + yB} = \Sigma_\varkappa \frac{\alpha_\varkappa \alpha_\varkappa}{a_\varkappa x + b_\varkappa y}, \tag{5a}$$

indem die verschiedenen Werthe der $\alpha_\varkappa$ mit denen von e, f, ... übereinstimmen. Sind nun die $\alpha_\varkappa$ sämmtlich ungleich, so sind $n+1$ Zahlen e, f, ... vorhanden und gleich den $\alpha_\varkappa$. Für diesen Fall gilt in $\frac{1}{2} n(n-1)$ Schnittpunkten die Gleichung $\Delta = 0$ und in $\frac{1}{2} n(n+1)$ Schnittpunkten die Gleichung $\frac{\Delta^2}{R} = -\frac{(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)^2}{\alpha_\varkappa \alpha_\lambda}$. Es ist aber sofort klar, dass wir aus diesen n^2 Gleichungen, wenn wir unter den Zahlen $\alpha_\varkappa$ beliebig Gruppen von gleichen annehmen, genau die Systeme erhalten, welche den verschiedenen Fällen entsprechen. Mithin besteht ein System von stets nothwendigen Bedingungen, nämlich:

Unter den n^2 Schnittpunkten von $A = 0$ mit $B = 0$ müssen $\frac{1}{2} n (n-1)$ existiren, in welchen Δ verschwindet, in den übrigen $\frac{1}{2} n (n+1)$ hat die Function $\frac{\Delta^2}{R}$ die Werthe der Grössen

$$-\frac{(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)^2}{\alpha_\varkappa \alpha_\lambda} \quad \left(\varkappa = 1, 2, .. n+1;\ \lambda = 1, 2, .., n+1,\ \varkappa \gtrless \lambda\right)$$

in irgend einer Reihenfolge.

Es würde sich nun darum handeln, zu untersuchen, wie viele selbstständige Bedingungen dadurch repräsentirt werden, um zu erkennen, ob sie nicht bloss nothwendig, sondern auch hinreichend sind. Im folgenden Paragraphen werde ich eine Formel aufstellen, aus welcher hervorgeht, dass eine der Bedingungen immer eine Folge der anderen ist, wie nach § 3. auch erwartet werden musste.

§ 5.

Es sei $f(x)$ eine rationale Function von x, welche für keine anderen endlichen Werthe, als die von einander verschiedenen $x_1, x_2, .. x_\mu, ..$ unendlich gross wird. Bedeutet c_μ den Coefficienten von $(x - x_\mu)^{-1}$ in der Entwickelung von $f(x)$ nach steigenden Potenzen von $(x - x_\mu)$; ist ferner c der Coefficient von x^{-1} in der Entwickelung von $f(x)$ nach fallenden Potenzen von x, so findet die Beziehung statt:

$$c = \sum_\mu c_\mu .$$

Ist $F(x, y)$ eine rationale Function von x, y, und $\varphi(x, y) = 0$ eine die Variabeln verknüpfende algebraische Gleichung vom n^{ten} Grade in y; sind ferner $y', y'', \ldots y^{(n)}$ die zu x gehörenden n Werthe von y, dann ist

$$f(x) = F(x, y') + F(x, y'') + \cdots + F(x, y^{(n)})$$

eine rationale Function von x. Die von einander verschiedenen Werthepaare *mit endlichem* x, für welche $F(x, y) = \infty$ wird, seien $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, .. $(x_\mu y_\mu)$, ... Bezeichnen wir jetzt mit γ_μ den Coefficienten des Gliedes $(x - x_\mu)^{-1}$ in der Entwickelung von $F(x, y)$ nach steigenden Potenzen von $(x - x_\mu)$ (mit dem zugehörigen Werthe y_μ), dagegen mit $\gamma', \gamma'', \ldots$ die Coefficienten von x^{-1} in den n Entwickelungen von $F(x, y)$ nach fallenden Potenzen von x, so ist mit Beibehaltung der eingeführten Bezeichnung für die Function $f(x)$:

$$c = \sum_\mu \gamma_\mu .$$

Es ist aber

$$c = \gamma' + \gamma'' + \cdots ,$$

folglich

$$\sum_\mu \gamma_\mu = \gamma' + \gamma'' + \cdots \quad (6)$$

*) Diese Relation beweist Herr Weierstrass in seinen Vorlesungen über Abel'sche Functionen.

Wie bisher sollen A, B zwei ganze Functionen n^{ter} Dimension in x, y von der Eigenschaft bezeichnen, dass die Schnittpunkte $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, ... $(x_\mu y_\mu)$, ... von $A = 0$, $B = 0$ getrennt und im Endlichen liegen. Alsdann ist, wie bekannt, wenn $[P]_\mu$ das Resultat der Substitution von $x_\mu y_\mu$ für $x y$ in P bedeutet,

$$A = (x - x_1)\,[A_1]_1 + (y - y_1)\,[A_2]_1 + \{\text{höh. Pot.}\}$$
$$B = (x - x_1)\,[B_1]_1 + (y - y_1)\,[B_2]_1 + \{\text{höh. Pot.}\},$$

und wenn y als eine durch die Gleichung $A = 0$ definirte Function von x nach steigenden Potenzen von $(x - x_1)$ entwickelt wird:

$$y = y_1 - (x - x_1)\left[\frac{A_1}{A_2}\right]_1 + \{\text{höh. Pot.}\},$$

folglich nach Einführung dieses Werthes von y in B:

$$B \cdot [A_2]_1 = -(x - x_1)\,[R]_1 + \{\text{höh. Pot.}\}$$

und

$$\frac{1}{B} = -\frac{1}{x - x_1} \cdot \left[\frac{A_2}{R}\right]_1 + \{\text{posit. Pot.}\},$$

worin R, wie im Früheren, $A_1 B_2 - A_2 B_1$ bedeutet.

Führen wir jetzt eine beliebige Function $U(x, y)$ von $(n-1)^{\text{ter}}$ Dimension in x, y ein, so lässt sich, $A(x, y) = 0$ als zu Grunde liegend betrachtet, die Entwickelung des Ausdruckes $\frac{U(x, y)}{B(x, y)}$ nach steigenden Potenzen von $(x - x_1)$ angeben. Sie ist von der Form

$$\frac{U(x, y)}{B(x, y)} = -(x - x_1)^{-1} \cdot \left[\frac{UA_2}{R}\right]_1 + \{\text{posit. Pot.}\},$$

und zwar sind die Schnittpunkte von $A = 0$, $B = 0$ die einzigen endlichen Punkte, für welche $\frac{U}{B} = \infty$ wird.

Wenn daher die oben eingeführte Function

$$F(x, y) = \frac{U(x, y)}{B(x, y)}$$

gesetzt wird, so hat man:

$$\gamma_\mu = -\left[\frac{UA_2}{R}\right]_\mu.$$

Der Einfachheit wegen mögen die unendlich fernen Punkte von $A = 0$ beide Coordinaten unendlich gross haben, und zwar seien t', t'', ... $t^{(n)}$ die Werthe von $\frac{x}{y}$ in ihnen. Die vermöge $A = 0$ bestehenden Entwickelungen von $\frac{1}{y}$ nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ beginnen sonach folgendermassen:

$$\frac{t'}{x}+\cdots,\quad \frac{t''}{x}+\cdots,\quad \cdots,\quad \frac{t^{(n)}}{x}+\cdots$$

Nach der bereits eingeführten Bezeichnung haben wir jetzt:

$$B(x,y)=y^n\left\{B(t^\lambda)+\text{Pot. von } x^{-1}\right\}$$

$$U(x,y)=y^{n-1}\left\{U(t^\lambda)+\text{Pot. von } x^{-1}\right\},$$

folglich

$$\frac{U(x,y)}{B(x,y)}=x^{-1}\cdot t^{(\lambda)}\cdot\frac{U(t^{(\lambda)})}{B(t^{(\lambda)})}+\left\{\text{höh. Pot. von } x^{-1}\right\}$$

als Entwickelung von $\frac{U(x,y)}{B(x,y)}$ nach Potenzen von x^{-1}. ($\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{U}$ haben die alte Bedeutung, nur dass $y=1$ gesetzt ist.)

Mit Benutzung der Formel (6) ergiebt sich jetzt die Relation:

$$\sum_\mu\left[\frac{UA_2}{R}\right]_\mu=-\sum_\lambda t^{(\lambda)}\frac{U(t^{(\lambda)})}{B(t^{(\lambda)})}.$$

Die Summation erstreckt sich links über alle Schnittpunkte $(x_\mu\ y_\mu)$ von $A=0$, $B=0$, rechts über die Wurzeln $t^{(\lambda)}$ der Gleichung $\bar{A}(t)=0$. In analoger Weise ist, wenn $\tau^{(1)},\ \ldots\ \tau^{(n)}$ die Wurzeln der Gleichung $\bar{B}(\tau)=0$ bedeuten:

$$\sum_\mu\left[\frac{UB_1}{R}\right]_\mu=-\sum_\lambda\frac{U(\tau^{(\lambda)})}{\bar{A}(\tau^{(\lambda)})},$$

folglich:

(7)
$$\sum_\mu\left[\frac{U\Delta}{R}\right]_\mu=\sum_{\tau^{(\lambda)}}\frac{U(\tau^{(\lambda)})}{\bar{A}(\tau^{(\lambda)})}-\sum_{t^{(\lambda)}}t^{(\lambda)}\cdot\frac{U(t^{(\lambda)})}{\bar{B}(t^{(\lambda)})}$$

$$=\sum_{\tau^{(\lambda)}}\frac{\tau^{(\lambda)}\cdot U(\tau^{(\lambda)})}{\psi(\tau^{(\lambda)})}-\sum_{t^{(\lambda)}}\frac{t^{(\lambda)}\cdot U(t^{(\lambda)})}{\psi(t^{(\lambda)})},$$

worin $x\bar{A}(x)+\bar{B}(x)$ durch $\psi(x)$ bezeichnet ist.

Da nun in der rationalen Function von τ:

$$\frac{\tau\cdot\bar{U}(\tau)\cdot\bar{A}_1(\tau)}{\psi(\tau)\cdot\bar{A}(\tau)}$$

der Grad des Zählers um 2 kleiner ist, als der des Nenners, so besteht nach einem Satze über die Partialbruchentwickelung bekanntlich die Gleichung:

(8)
$$\sum_\lambda\frac{t_\lambda\bar{U}(t_\lambda)}{\psi(t_\lambda)}+\sum_\lambda\frac{\xi_\lambda\bar{U}(\xi_\lambda)\cdot\bar{A}_1(\xi_\lambda)}{\bar{A}(\xi_\lambda)\cdot\psi'(\xi_\lambda)}=0,$$

wo $\psi'(\xi)=\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}$ ist und die Summation rechts sich auf die Wurzeln ξ_λ der Gleichung $\psi(\xi)=0$ bezieht.

Mit Benutzung dieser Beziehung geht die Gleichung (7) über in

$$\sum_{\mu}\begin{bmatrix} U\Delta \\ R \end{bmatrix}_{\mu} = -\sum_{\lambda}\frac{\xi_\lambda \overline{U}(\xi_\lambda)}{\psi'(\xi_\lambda)}\cdot\left\{\frac{\overline{B}_1(\xi_\lambda)}{\overline{B}(\xi_\lambda)} - \frac{\overline{A}_1(\xi_\lambda)}{\overline{A}(\xi_\lambda)}\right\}$$

$$-\sum_{\lambda}\frac{\overline{U}(\xi_\lambda)}{\overline{A}(\xi_\lambda)\cdot\psi'(\xi_\lambda)}\cdot\{\xi_\lambda A_1(\xi_\lambda) + B_1(\xi_\lambda)\} = \sum_{\lambda}\frac{\overline{U}(\xi_\lambda)}{\overline{A}(\xi_\lambda)\cdot\psi'(\xi_\lambda)}\{\psi'(\xi_\lambda) - A(\xi_\lambda)\}$$

oder, da

$$\sum_{\lambda}\frac{U(\xi_\lambda)}{\psi'(\xi_\lambda)}$$

nach dem oben benutzten Satze über die Partialbruchentwickelung verschwindet:

$$(9)\qquad \sum_{\mu}\begin{bmatrix} U\Delta \\ R \end{bmatrix}_{\mu} = \sum_{\lambda}\frac{\overline{U}(\xi_\lambda)}{\overline{A}(\xi_\lambda)} = -\sum_{\lambda}\frac{\xi_\lambda \overline{U}(\xi_\lambda)}{\overline{B}(\xi_\lambda)}\,.$$

Diese Formel ist ein besonderer Fall der von Jacobi für die Schnittpunkte algebraischer Curven aufgestellten.*)

Für $U = \Delta$ treten links gerade dieselben Ausdrücke auf, wie im Formelsystem des § 4. Man erhält in der That für $U = \Delta$, wenn man bedenkt, dass

$$\begin{aligned}\overline{\Delta}(\xi) &= \overline{A}_2(\xi) - \overline{B}_1(\xi) = n\overline{A}(\xi) - \xi\overline{A}_1(\xi) - \overline{B}_1(\xi)\\ &= (n+1)\overline{A}(\xi) - \psi'(\xi)\end{aligned}$$

ist, aus (9):

$$\sum_{\mu}\begin{bmatrix} \Delta\Delta \\ R \end{bmatrix}_{\mu} = \sum_{\lambda}\frac{\overline{\Delta}(\xi_\lambda)}{\overline{A}(\xi_\lambda)} = \sum_{\lambda}\frac{(n+1)\overline{A}(\xi_\lambda) - \psi'(\xi_\lambda)}{\overline{A}(\xi_\lambda)} = (n+1)^2 - \sum_{\lambda}\frac{\psi'(\xi_\lambda)}{\overline{A}(\xi_\lambda)}.$$

Nun ist nach der in (5_a) eingeführten Bezeichnung:

$$\sum_{\lambda}\frac{\psi'(\xi_\lambda)}{\overline{A}(\xi_\lambda)} = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n+1}\frac{1}{\alpha_\varkappa} = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n+1}\alpha_\lambda\cdot\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n+1}\frac{1}{\alpha_\varkappa},$$

da $\Sigma\alpha_\lambda = 1$ ist. Folglich erhalten wir:

$$\sum_{\mu}\begin{bmatrix} \Delta\Delta \\ R \end{bmatrix}_{\mu} = (n+1)^2 - \left\{\sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n+1}\frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_\varkappa} + \sum\left(\frac{\alpha_\lambda}{\alpha_\varkappa} + \frac{\alpha_\varkappa}{\alpha_\lambda}\right)\right\},$$

wo jetzt unter dem zweiten Summationszeichen rechts $\varkappa$ und λ nur verschiedene Werthe annehmen dürfen. Daraus ergiebt sich unmittelbar:

$$\begin{aligned}\sum_{\mu}\begin{bmatrix} \Delta\Delta \\ R \end{bmatrix}_{\mu} &= (n+1)^2 - (n+1) - n(n+1) - \sum\frac{(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)^2}{\alpha_\varkappa\alpha_\lambda}\\ &= -\sum\frac{(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)^2}{\alpha_\varkappa\alpha_\lambda}, \qquad \begin{matrix}\varkappa = 1,\ldots n+1\\ \lambda = 1,\ldots n+1\end{matrix} \qquad \varkappa \gtrless \lambda\,.\end{aligned}$$

*) Crelle, Journ. f. Math. Bd. 14., p. 281 ff.

Diese bemerkenswerthe Relation, welche auf so natürliche Weise die Werthe von $\frac{\Delta . \Delta}{R}$ in den Schnittpunkten $A = 0$, $B = 0$ mit den Grössen $\frac{(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)^2}{\alpha_\varkappa \alpha_\lambda}$ in Verbindung setzt, genügt um darzuthun, dass die am Schlusse des § 5. aufgestellten Bedingungen sich auf höchstens $n^2 - 1$ reduciren, dass somit jedenfalls eine von den übrigen abhängt.

Breslau, Januar 1871.

Ueber die eindeutigen Raumtransformationen, insbesondere in ihrer Anwendung auf die Abbildung algebraischer Flächen.

Von Max Noether in Heidelberg.

Die hier vorliegenden Untersuchungen über eindeutige Raumtransformationen schliessen sich ihrem Inhalt nach an die Betrachtungen an, welche Herr Cremona über die ebenen Transformationen angestellt hat*). Das erweiterte Problem, zwischen zwei ebenen *Räumen* ein Punkt für Punkt eindeutiges Entsprechen herzustellen, bietet durch die Zufügung einer Dimension wesentlich neue Schwierigkeiten, die es nicht gestatten werden, dasselbe in seiner Allgemeinheit erschöpfend zu behandeln. Diese Schwierigkeiten beruhen hauptsächlich darauf, dass die Bedingungen, welchen die zur Transformation dienenden Flächen unterliegen, an sich schon sehr specieller Art sind, so dass sie sich einer allgemeinen Untersuchung entziehen. Auch existirt eine Reduction, welche der von mir**) für die ebenen Transformationen nachgewiesenen Reduction derselben auf eine Reihenfolge von Transformationen zweiter Ordnung analog wäre, hier im allgemeinen Falle nicht mehr. Ich werde mich daher nur mit einer specielleren Transformation näher beschäftigen, mit derjenigen von der dritten Ordnung, welche durch drei Gleichungen entsteht, die in den Coordinaten jedes der beiden auf einander bezogenen Räume linear sind. Diese Transformation ist immerhin noch allgemein genug, um durch ihre Specialisirungen zu einer unendlichen Mannigfaltigkeit von Transformationen Anlass zu geben, welche eine ähnlich übersichtliche Behandlung zulassen, wie die Cremona'schen, und welche zugleich dem besondern Zwecke dienen, den ich bei diesen Betrachtungen im Auge habe, nämlich bequeme Methoden zur Abbildung algebraischer Flächen zu liefern. Ich werde hierbei ausser den schon bekannten Abbildungen auf die weiterer Reihen von Flächen geführt.

*) Mem. dell' Acc. di Bologna, ser. 2, tom. 2 und tom. 5.

**) Diese Ann., Band 3, pag. 165 und Göttinger Nachrichten, Jahrgang 1870, Nr. 1.

Ein specieller Fall der hier erwähnten Transformation dritter Ordnung, in dem man einem Punkte des Raumes den Schnittpunkt seiner Polarebenen in Bezug auf einen Bündel von Flächen zweiter Ordnung entsprechen lässt, ist schon in mehreren geometrischen Untersuchungen benutzt worden; zuerst von Herrn Hesse*) bei Gelegenheit seiner Betrachtungen über die Doppeltangenten der Curven vierter Ordnung, dann von Steiner**) bei seiner vierten Erzeugungsweise der Flächen dritter Ordnung, und später u. A. von Herrn Geiser***), dessen hier anknüpfende geometrische Betrachtungen mit den vorliegenden verwandt sind. Man weist aber leicht nach, dass sich die allgemeinere Transformation nicht auf diese speciellere durch lineare Transformation zurückführen lässt. Dagegen hat schon Herr Cremona†) jene zur Erzeugung der Flächen dritter Ordnung benutzt, ohne indess die Theorie weiter zu verfolgen.

Nach Ausarbeitung der folgenden Abhandlung erhalte ich eine Arbeit von Herrn Cayley††) über denselben Gegenstand, „On the rational Transformation between two Spaces", die mit der meinigen den gleichen Ausgangspunkt, die drei bilinearen Gleichungen, besitzt und auch einige der specielleren Transformationen, § 2., § 3. und § 4., schon berührt. Weiterhin aber schlägt, während die Cayley'sche Abhandlung interessante numerische Angaben über die Bedingungen giebt, welchen die allgemeineren Transformationsflächen unterliegen, meine Arbeit, dem oben angegebenen Zwecke zufolge, eine andere Richtung ein.

§ 1.

Die allgemeine Transformation.

Es seien x_1, x_2, x_3, x_4 die homogenen Coordinaten der Punkte des Raumes X, y_1, y_2, y_3, y_4 die der Punkte des Raumes Y. Ein eindeutiges Entsprechen zwischen beiden Räumen wird dann durch Formeln vermittelt:

$$\varrho x_i = \varphi_i(y_1, y_2, y_3, y_4), \quad (i = 1, 2, 3, 4), \tag{1}$$

wo die φ_i ganze rationale Functionen r^{ter} Ordnung der Coordinaten y sind, wenn diese Formeln eine eindeutige Umkehrung zulassen:

*) Crelle's Journal, Band 49.
**) Ebenda, Band 53. und Monatsber. der Berl. Akad. 1856.
***) Crelle's Journal, Band 69.
†) Crelle's Journal, Band 68.
††) Proceedings of the London Mathem. Society, vol. III (1870).

$$\sigma y_k = \psi_k(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad (k = 1, 2, 3, 4), \tag{2}$$

wobei die ψ_k ganze Functionen s^{ter} Ordnung der x sein mögen. ϱ und σ sind Proportionalitätsfactoren.

Damit die Umkehrung (2) der Formeln (1) möglich ist, müssen die vier Flächen $\varphi_i = 0$ linear von einander unabhängig sein und je drei derselben dürfen sich nur in *einem* beweglichen Punkte schneiden; denn die 3fach unendliche Flächenschaar

$$\Sigma \alpha_i \varphi_i = 0$$

hat dann ebenfalls die Eigenschaft, dass sich je drei ihrer Flächen, wenn sie nicht einem Büschel angehören, in nur *einem* beweglichen Punkte schneiden, und zu einem beliebigen Punkte x gehört somit im Allgemeinen *ein* Punkt y, dessen Coordinaten sich rational durch die des entsprechenden Punktes x ausdrücken lassen. Die Flächen $\psi_k = 0$ haben alsdann dieselbe Eigenschaft, wie die $\varphi_i = 0$.

Die Flächen $\Sigma \alpha_i \varphi_i = 0$ und $\Sigma \beta_k \psi_k = 0$ haben dann, wie aus (1), (2) hervorgeht, die weitere Eigenschaft, dass ihre Coordinaten rational durch zwei Parameter ausdrückbar sind, d. h.*) ihr Flächen- und Curvengeschlecht sind gleich Null.

Den Ebenen $\Sigma \alpha_i x_i = 0$ des Raumes X entsprechen die Flächen $\Sigma \alpha_i \varphi_i = 0$ von Y, und den Ebenen $\Sigma \beta_k y_k = 0$ von Y die Flächen $\Sigma \beta_k \psi_k = 0$ von X. Daher ist die Ordnung s der Functionen ψ_k gleich der Ordnung der beweglichen Schnittcurve je zweier der Flächen φ_i; denn diese Ordnung ist gleich der Anzahl der Schnittpunkte von $\Sigma \beta_k \psi_k = 0$ mit einer beliebigen Geraden, $\Sigma \alpha_i x_i = \Sigma \alpha_i' x_i = 0$, also gleich der Anzahl der Schnittpunkte der Ebene $\Sigma \beta_k y_k = 0$ mit der beweglichen Schnittcurve $\Sigma \alpha_i \varphi_i = \Sigma \alpha_i' \varphi_i = 0$. Die Ordnung der Functionen ψ_k wird daher im Allgemeinen verschieden sein von der der Functionen φ_i. Die Ordnung der beweglichen Schnittcurve zweier Flächen ψ_k wird gleich r.

Die festen Punkte und Curven, welche die Flächen φ_i gemein haben müssen, wenn die für die Transformationsflächen angegebenen Bedingungen zu erfüllen sein sollen, bezeichne ich als das *Fundamentalsystem* oder als die *Fundamentalgebilde* des Raumes Y, und zwar als einfache, doppelte u. s. w. Gebilde, je nachdem die Flächen φ_i diese Gebilde als einfache, doppelte u. s. w. besitzen. Diesen Gebilden entsprechen im Raume X im Allgemeinen Gebilde von höheren Dimensionen und zwar, specielle Fälle ausgenommen, Flächen, welche das *Fundamentalflächensystem* des Raumes X constituiren. Für dieses Entsprechen gelten nun die folgenden Sätze, welche ich dem § 2. meines

*) S. diese Ann., Band 3, pag. 174.

Aufsatzes in diesen Ann., Bd. 2., für den vorliegenden Fall specialisirt, entnehme.

„Einem μfachen Fundamentalpunkte von Y entspricht im Raume X eine Fläche, deren Coordinaten sich als rationale Functionen μ^{ter} Ordnung zweier Parameter darstellen lassen, einem einfachen Fundamentalpunkte also eine Ebene von X."

„Einem jeden Punkte einer μfachen Fundamentalcurve C von Y entspricht im Raume X im Allgemeinen eine rationale Curve μ^{ter} Ordnung. Die C entsprechende Fläche von X wird durch die Bewegung dieser veränderlichen rationalen Curve erzeugt und hat ein mit dem Geschlecht von C übereinstimmendes Curvengeschlecht."

Diese Sätze können sich nur unter speciellen Bedingungen des Verschwindens der φ_i so modificiren, dass sich die Dimensionen der den Fundamentalgebilden entsprechenden Gebilde erniedrigen. Hiervon finden sich in § 5., (C) und (G) und am Schlusse des § 6. Beispiele.

Dieses Entsprechen ist folgendermassen zu verstehen:

Einer allgemeinen Fläche F von der Ordnung m im Raume Y entspricht in X Punkt für Punkt eindeutig eine Fläche Φ von der Ordnung ms, welche durch jedes νfache Fundamentalgebilde von X $m\nu$fach hindurchgeht. Wenn nun F ein Fundamentalgebilde von Y $k$fach besitzt, so zerfällt Φ in die $k$fach zu zählende, diesem Gebilde entsprechende Fläche von einer gewissen Ordnung α und in eine der F eigentlich entsprechende Fläche Φ' von der Ordnung $ms - k\alpha$.

Um das Fundamentalflächensystem von X zu erhalten, betrachte ich die Flächen r^{ter} Ordnung, $\Sigma\alpha_i\varphi_i = 0$, des Raumes Y, welchen, als bewegliche Flächen, die Ebenen $\Sigma\alpha_i x_i = 0$ von X entsprechen. Von den zu den Flächen $\Sigma\alpha_i\varphi_i = 0$ in X gehörenden Flächen der Ordnung rs, welche durch ein νfaches Fundamentalgebilde von X $r\nu$fach gehen, hat man daher $\Sigma\alpha_i x_i = 0$ abzutrennen, und der Rest giebt die Fundamentalflächen von X, jede einem μfachen Fundamentalgebilde von Y entsprechende Fläche μfach. In diesem Sinne hat also das Fundamentalflächensystem die Gleichung:

$$\Omega = \frac{\Sigma\alpha_i\varphi_i(\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4)}{\Sigma\alpha_i x_i} = 0,$$

eine Gleichung der Ordnung $rs - 1$. $\Omega = 0$ geht ebenfalls $r\nu$fach durch jedes νfache Fundamentalgebilde von X.

Es giebt noch einen andern Weg, um das Fundamentalflächensystem aufzustellen. Zu diesem Zwecke führe ich die folgenden, den §§ 5. und 6. des oben citirten Aufsatzes entnommenen Sätze über die Jacobi'sche Determinantenfläche D der vier Flächen ψ_i an:

„Die Jacobi'sche Fläche D der vier Flächen ψ_k enthält eine einem Fundamentalpunkte, resp. einer Fundamentalcurve von Y entsprechende Fläche zweifach, resp. einfach."

„$\overset{\Omega}{D} = 0$ stellt die Abbildung der Fundamentalgebilde des Raumes Y dar und giebt die einem μfachen Fundamentalpunkte, resp. einer μfachen Fundamentalcurve entsprechende Fläche $(\mu - 2)$fach, resp. $(\mu - 1)$fach."

Daher giebt die Determinantenfläche ebenfalls das Fundamentalflächensystem, zweifach oder einfach, je nachdem die Fundamentalfläche einem Punkte oder einer Curve entspricht, und sie enthält keine weiteren Flächen.

Ueber das Verhalten der Jacobi'schen Fläche der ψ_k in den Fundamentalgebilden des Raumes X habe ich (l. c. § 5.) den Satz bewiesen:

„Die Jacobi'sche Fläche hat die einfachen Fundamentalpunkte von X zu Doppelpunkten, die einfachen Fundamentalcurven von X zu dreifachen Curven."

Den allgemeineren Satz

„Die Jacobi'sche Fläche der ψ_k hat einen νfachen Fundamentalpunkt zum $(4\nu - 2)$fachen Punkt, eine νfache Fundamentalcurve zur $(4\nu - 1)$fachen Curve,"

beweist man entweder durch Bilden der höhern Differentialquotienten von D, oder man kann denselben auch auf den vorhergehenden Satz auf folgendem Wege zurückführen.

Man betrachte zwei eindeutige Transformationen

$$z_k = \vartheta_k(x)$$
$$y_k = \chi_k(z).$$

Bei der ersten sei der Punkt x' ein einfacher Fundamentalpunkt; die χ seien Flächen ν^{ter} Ordnung, welche durch die zur ersten Transformation gehörenden Fundamentalgebilde des Raumes Z nicht hindurchgehen. Bei der hieraus resultirenden eindeutigen Transformation

$$y_k = \psi_k(x)$$

tritt dann der Punkt x' als νfacher Fundamentalpunkt auf, und es ist

$$D = \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1}\frac{\partial y_2}{\partial x_2}\frac{\partial y_3}{\partial x_3}\frac{\partial y_4}{\partial x_4}$$
$$= \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial z_1}\frac{\partial y_2}{\partial z_2}\frac{\partial y_3}{\partial z_3}\frac{\partial y_4}{\partial z_4} \cdot \Sigma' \pm \frac{\partial z_1}{\partial x_1}\frac{\partial z_2}{\partial x_2}\frac{\partial z_3}{\partial x_3}\frac{\partial z_4}{\partial x_4}.$$

Der erste Factor zur Rechten, als Function der Ordnung $4\nu - 4$ der z, hat, in x ausgedrückt, den Punkt x' zum $(4\nu - 4)$fachen Punkte, der zweite Factor hat denselben zum Doppelpunkte, und für $D = 0$ wird x' also ein $(4\nu - 2)$facher Punkt. Ebenso folgt der andere Theil des Satzes.

Freilich lässt sich die Transformation (2) nicht im Allgemeinen auf die hier angegebenen zwei Transformationen zurückführen; aber der aus denselben gezogene Schluss bleibt richtig, weil die aus ihnen resultirende Transformation für Punkte in der Nähe des Punktes x', von denen allein die Art des Verschwindens der Determinante abhängt, keine weiteren Singularitäten zeigt.

Selbstverständlich gelten die in diesem §. für die Fundamentalgebilde von Y und die Fundamentalflächen von X gegebenen Entwicklungen auch für die Fundamentalgebilde von X und die Fundamentalflächen von Y.

§ 2.

Die Transformation dritter Ordnung.

Die bemerkenswertheste Raumtransformation ist die aus drei bilinearen Gleichungen entstehende Transformation dritter Ordnung, die ich, mit den aus ihr abgeleiteten Transformationen, in den folgenden §§ näher verfolgen will. Ich bezeichne dieselbe schlechtweg als die „Transformation dritter Ordnung", obgleich es, wie ich in §. 9. zeigen werde, noch weitere Transformationen dritter Ordnung giebt, deren Umkehrung ebenfalls von der dritten Ordnung wird und die sich trotzdem nicht auf jene zurückführen lassen.

Die drei bilinearen Gleichungen seien:

$$(1)\qquad \begin{cases} A \equiv \sum_{i,k} a_{ik} x_i y_k = 0 \\ B \equiv \sum_{i,k} b_{ik} x_i y_k = 0 \\ C \equiv \sum_{i,k} c_{ik} x_i y_k = 0, \end{cases} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4).$$

Ferner setze ich:

$$(2)\qquad \begin{cases} A_i = \dfrac{\partial A}{\partial x_i} = \sum_k a_{ik} y_k \quad , \quad B_i = \dfrac{\partial B}{\partial x_i} \quad , \quad C_i = \dfrac{\partial C}{\partial x_i}, \\ \mathsf{A}_k = \dfrac{\partial A}{\partial y_k} = \sum_i a_{ik} x_i \quad , \quad \mathsf{B}_k = \dfrac{\partial B}{\partial y_k} \quad , \quad \Gamma_k = \dfrac{\partial C}{\partial y_k}. \end{cases}$$

Die Transformation wird dann durch die Formeln gegeben:

$$(3)\qquad \varrho x_i = \frac{\partial R}{\partial \lambda_i} = \varphi_i \quad , \quad \sigma y_k = \frac{\partial \mathsf{P}}{\partial \mu_k} = \psi_k,$$

wo

$$(4)\qquad \begin{cases} R = \Sigma \pm \lambda_1 A_2 B_3 C_4, \\ \mathsf{P} = \Sigma \pm \mu_1 \mathsf{A}_1 \mathsf{B}_3 \Gamma_4. \end{cases}$$

Um die Fundamentalgebilde der Flächen dritter Ordnung φ_i zu bestimmen, bemerke ich, dass:

$$\Sigma \varphi_i A_i = 0 \quad , \quad \Sigma \varphi_i B_i = 0 \quad , \quad \Sigma \varphi_i C_i = 0.$$

Für die Punkte der Curve neunter Ordnung, in welcher sich $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = 0$ schneiden, ist daher

$$\varphi_3 A_3 + \varphi_4 A_4 = 0 \quad , \quad \varphi_3 B_3 + \varphi_4 B_4 = 0 \quad , \quad \varphi_3 C_3 + \varphi_4 C_4 = 0 ,$$

also entweder auch $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$, oder

$$A_3 = k A_4 \quad , \quad B_3 = k B_4 \quad , \quad C_3 = k C_4 .$$

Diese drei letztern Gleichungen sind die dreier projectivischer Ebenenbüschel, die eine Raumcurve dritter Ordnung erzeugen. Diese Curve bildet den beweglichen Schnitt von $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$; der übrige Schnitt, eine *Raumcurve sechster Ordnung* K, gehört auch $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ an und stellt das Fundamentalgebilde des Raumes Y dar.

Ebenso folgt, dass die Flächen dritter Ordnung ψ_k eine Raumcurve sechster Ordnung gemein haben, die Fundamentalcurve L des Raumes X.

Für die Fundamentalcurve K verschwinden also die Determinanten des Systems:

$$\begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{matrix} ,$$

oder man kann, mit Einführung von Parametern λ, μ, ν, setzen:

$$(5) \qquad \left| \begin{array}{l} \lambda A_1 + \mu B_1 + \nu C_1 = 0 \\ \lambda A_2 + \mu B_2 + \nu C_2 = 0 \\ \lambda A_3 + \mu B_3 + \nu C_3 = 0 \\ \lambda A_4 + \mu B_4 + \nu C_4 = 0 \end{array} \right.$$

Durch Elimination der y ergiebt sich hieraus eine Gleichung vierten Grades in λ, μ, ν, die Gleichung einer allgemeinen Curve vierter Ordnung, welcher die Curve K vermöge (5) Punkt für Punkt eindeutig entspricht. *Daher hat K das Geschlecht* 3.

Ferner sieht man, dass jedem Punkte dieser Curve eine *Gerade* von X entspricht; denn für einen Punkt y, welcher den Gleichungen (5) genügt, hat man

$$\lambda A + \mu B + \nu C = 0 ,$$

und von den Gleichungen (1) wird eine eine Folge der beiden andern.

Diese Geraden erzeugen die Fundamentalfläche des Raumes X, die, nach § 1., von der achten Ordnung wird und L zur dreifachen Curve hat. Um die Gleichung dieser windschiefen Fläche, $\Omega = 0$, zu erhalten, hat man die Werthe der $y_k = \frac{\partial P}{\partial u_k}$ in $R = 0$ einzuführen und den Factor $\Sigma \lambda_i x_i$ abzutrennen. So ergiebt sich, wenn man die Werthe der y_k zuerst in A_i substituirt:

$$\Omega \,.\, \Sigma\lambda_i x_i = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{11} & \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{12} & \mathsf{A}_2 & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & \mathsf{A}_3 & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & \mathsf{A}_1 & \mathsf{B}_4 & \Gamma_1 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_1 - \Sigma\lambda_i x_i & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{11} & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{12} & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} & \mathsf{B}_4 & \Gamma_1 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

oder:

$$(6) \qquad \Omega = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} & \mathsf{B}_1 & \Gamma_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} & \mathsf{B}_2 & \Gamma_2 \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} & \mathsf{B}_3 & \Gamma_3 \\ a_{11} & a_{21} & a_{34} & a_{11} & \mathsf{B}_4 & \Gamma_1 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 .$$

In diesem Ausdruck (6) hat man noch in den B_i, C_i die y_k durch die $\frac{\partial \mathsf{P}}{\partial \mu_k}$ zu ersetzen, um die Gleichung der Fundamentalfläche von X zu erhalten. Ferner zeigt die Symmetrie dieses Ausdrucks (6), dass er auch die Gleichung $\Theta = 0$ der Fundamentalfläche von Y liefert, wenn man nur in den B_k, Γ_k die x_i durch die $\frac{\partial R}{\partial \lambda_i}$ ersetzt.

Nach § 1. fällt hier die Jacobi'sche Fläche $D = 0$ der ψ_k mit der Fläche $\Omega = 0$ zusammen. In der That hat man:

$$\Sigma\mu_k y_k = \Sigma \pm \mu_1 \mathsf{A}_2 \mathsf{B}_3 \Gamma_4 \quad , \quad \Omega \,.\, \Sigma\lambda_i x_i = \Sigma \pm \lambda_1 A_2 B_3 C_4 ;$$

$$\Sigma\mu_k y_k \,.\, D = \Sigma \pm \mu_1 \mathsf{A}_2 \mathsf{B}_3 \Gamma_4 \,.\, \Sigma \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \frac{\partial y_4}{\partial x_4}$$

$$= \begin{vmatrix} \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_2} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_3} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_4} \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{vmatrix}$$

$$\Sigma\lambda_i x_i \,.\, \Sigma\mu_k y_k \,.\, D = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \Sigma\lambda_i x_i \\ \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_2} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_3} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_4} & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & 0 \\ \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_1} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_2} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_3} & \Sigma\mu_k \frac{\partial y_k}{\partial x_4} & -3\,\Sigma\mu_k y_k \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & 0 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & 0 \\ C_1 & C_2 & C_3 & C_4 & 0 \end{vmatrix} = 3\,\Sigma\mu_k y_k \,.\, \Sigma \pm \lambda_1 A_2 B_3 C_4$$

(7)
$$\begin{cases} \text{daher:} & \Omega = \frac{1}{3}\,\Sigma \pm \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}\frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}\frac{\partial\psi_3}{\partial x_3}\frac{\partial\psi_4}{\partial x_4} = \frac{1}{3}D \\ \text{und ebenso:} & \Theta = \frac{1}{3}\,\Sigma \pm \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1}\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2}\frac{\partial\varphi_3}{\partial y_3}\frac{\partial\varphi_4}{\partial y_4} = \frac{1}{3}\Delta\,. \end{cases}$$

Die Geraden, welche die Fläche $\Omega = 0$ erzeugen, schneiden die Curve L in je drei Punkten; denn durch die ihnen entsprechenden Punkte von K gehen je drei Gerade der Fläche $\Theta = 0$. Man erkennt auch geometrisch leicht, dass die dreipunktigen Sehnen einer Raumcurve sechster Ordnung, $L = 0$, deren Geschlecht $p = 3$ ist, eine Fläche achter Ordnung mit dreifacher Curve L erzeugen. Von einem beliebigen Punkte der Curve aus gehen nämlich drei Gerade, welche L in zwei weiteren Punkten schneiden, da sich von einem solchen Punkte aus L als Curve fünfter Ordnung, $p = 3$, also mit 3 Doppelpunkten, projicirt. Daher wird L dreifache Curve der Fläche. Ein durch eine Erzeugende a gehende Ebene schneidet aber die Fläche in einer ebenen Curve siebenter Ordnung; denn diese Curve hat in den 3 Punkten, in welchen L von a getroffen wird, Doppelpunkte, und sie kann a ausserdem nur noch in *einem* Punkte schneiden, in demjenigen Punkte, in welchem die in der Ebene liegende Verbindungslinie der beiden a benachbarten Erzeugenden die Gerade a trifft. Der betrachtete ebene Schnitt, und ebenso die Fläche, ist daher von der Ordnung 8.

Bei der vorliegenden Transformation entsprechen den Flächen m^{ter} Ordnung von Y, welche die Curve K zur μfachen Curve haben, im Raume X Flächen der Ordnung $3m - 8\mu$, welche L zur $(m - 3\mu)$ fachen Curve haben.

Den Geraden des Raumes Y entsprechen Raumcurven dritter Ordnung; und diese treffen die Curve L in 8 Punkten, da die Geraden die Fläche Θ in 8 Punkten schneiden. Allgemeiner entsprechen Curven m^{ter} Ordnung von Y, die μ Punkte mit K gemein haben, im Raume

X Curven der Ordnung $3m - \mu$, welche in $8m - 3\mu$ Punkten die Curve L treffen.

Um die Transformation geometrisch zu characterisiren, bemerke ich, dass die Raumcurve K die allgemeinste Curve ist, in welcher sich zwei Flächen dritter Ordnung, die eine Raumcurve dritter Ordnung gemein haben, noch schneiden können. Denn vermöge dieser Eigenschaft lässt sich, wenn $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ zwei solcher Flächen sind, $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 = 0$ in die unter (3), (4) gegebene Form setzen, und man kann zwei weitere Flächen $\varphi_3 = 0$, $\varphi_4 = 0$ bestimmen, deren Gleichungen die dort angegebene Form haben. Die Transformationsflächen sind dann, wenn K so bestimmt ist, die dreifach unendliche Schaar von Flächen dritter Ordnung, welche durch K hindurchgehen.

Die Entwicklungen dieses §. gehen in die von Herrn Hesse, Crelle Bd. 49, gegebenen über, wenn die Bedingungen

$$(8) \qquad a_{ik} = a_{ki} \quad , \quad b_{ik} = b_{ki} \quad , \quad c_{ik} = c_{ki}$$

erfüllt sind. Die Gleichungen (1) lassen sich dann als die der Polarebenen des Punktes y in Bezug auf die drei Flächen zweiter Ordnung

$$\Sigma a_{ik}x_ix_k = 0 \quad , \quad \Sigma b_{ik}x_ix_k = 0 \quad , \quad \Sigma c_{ik}x_ix_k = 0$$

auffassen, und die Curve L wird der Ort der Doppelpunkte der Kegelflächen des von diesen 3 Flächen erzeugten Bündels von Flächen zweiter Ordnung. Indess ist die Zurückführung des allgemeinen Falles auf diesen specielleren nicht möglich; denn dieselbe müsste durch eine lineare Transformation geschehen, die an der einen Reihe von Variabeln angebracht wird, und die Zahl der Bedingungen (8) beträgt 18, während eine lineare Transformation nur 15 willkürliche Constanten einführt. Dasselbe folgt daraus, dass die Hesse'sche Transformation nur auf eine 21fach unendliche Schaar von Curven sechster Ordnung, $p = 3$, führt, während die obige Definition eine 24fach unendliche Schaar von Curven K angiebt.

Die Transformation dritter Ordnung, wie ich sie hier gegeben habe, ist noch zu allgemein, um direct vielfache Anwendungen auf Flächenabbildungen zuzulassen. Die Anwendung auf die ebene Abbildung der Flächen dritter Ordnung ist schon von Herrn Cremona gemacht worden; als weitere Anwendung bezeichne ich die auf die Flächen sechster Ordnung, mit Doppelcurve K, welchen die Hyperboloide von X entsprechen, mit je 12 einfachen Fundamentalpunkten. Durch eine weitere Abbildung dieser Hyperboloide findet man dann die ebene Abbildung jener Flächen sechster Ordnung, und zwar entsprechen, bei der niedrigstmöglichen Abbildung, ihren ebenen Schnitten Curven fünfter Ordnung, mit 2 doppelten und 11 einfachen Fundamentalpunkten. Zu reicheren Anwendungen werden die Specialisirungen der Transformation, zu welchen ich mich jetzt wende, Anlass geben.

§ 3.

Die Transformationen zweiter Ordnung. Anwendungen.

Ich betrachte zunächst die einfachste der Transformationen, diejenige der zweiten Ordnung, welche die Eigenschaft hat, dass ihre Umkehrung wieder auf Functionen zweiter Ordnung führt. Den Ebenen des Raumes X sollen Hyperboloide des Raumes Y entsprechen, welche einen Kegelschnitt K und einen festen Punkt P gemein haben. Diese Hyperboloide bilden eine dreifach unendliche Schaar. Je drei derselben schneiden sich im Allgemeinen in *einem* beweglichen Punkte; denn seien A, B, C drei dieser Hyperboloide, welche nicht einem Büschel angehören; dann haben A und B, ferner A und C bewegliche Kegelschnitte gemein, welche sich, da sie beide auf A liegen, in zwei Punkten schneiden, von denen der eine, P, fest ist.

Es sei $y_4 = 0$ die Gleichung der Ebene E des Kegelschnitts K; der Punkt P sei durch $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ gegeben. Ferner sei $\varphi(y_1, y_2, y_3) = 0$ die Gleichung des Kegels (PK), der über K beschrieben ist und seinen Scheitel im Punkte P hat. Die Transformationsformeln werden dann:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= y_1 y_4 & \sigma y_1 &= x_1 x_4 \\ \varrho x_2 &= y_2 y_4 & \sigma y_2 &= x_2 x_4 \\ \varrho x_3 &= y_3 y_4 & \sigma y_3 &= x_3 x_4 \\ \varrho x_4 &= \varphi(y_1, y_2, y_3) & \sigma y_4 &= \varphi(x_1, x_2, x_3). \end{aligned}$$

Die Transformationsflächen des Raumes X bilden daher ebenfalls eine dreifach unendliche Schaar von Hyperboloiden, die einen Punkt P' $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ und einen Kegelschnitt K' $(x_4 = 0,\ \varphi(x) = 0)$ gemein haben.

Als Fundamentalflächen treten im Raume Y auf die Ebene E des Kegelschnitts K und der Kegel (PK), im Raume X die Ebene E' des Kegelschnitts K' und der Kegel $(P'K')$, der seinen Scheitel in P' hat und durch K' geht. Dabei entsprechen

dem Punkte P die Ebene E',
dem Punkte P' die Ebene E,
dem Kegelschnitt K der Kegel $(P'K')$,
dem Kegelschnitt K' der Kegel (PK),

und zwar den Punkten von K die Erzeugenden von $(P'K')$, den Punkten von K' die Erzeugenden von (PK).

Den Flächen m^{ter} Ordnung des einen Raumes, die den Fundamentalpunkt zum μfachen Punkt, den Fundamentalkegelschnitt zur νfachen Curve haben, entsprechen im andern Raume Flächen von der Ordnung $2n - \mu - 2\nu$, die den Fundamentalpunkt dieses Raumes zum $(n - 2\nu)$fachen Punkte, den Kegelschnitt zur $(n - \mu - \nu)$fachen

Curve haben. Insbesondere entsprechen sich die Ebenenschaaren durch P und P' gegenseitig, und die Transformation zwischen je zwei dieser Ebenen wird von der zweiten Ordnung.

Die Jacobi'sche Fläche besteht aus E^2 und (PK), resp. aus E'^2 und $(P'K')$. Die Transformation selbst ist, wie die analytische Darstellung zeigt, ein sehr specieller Fall der Transformation dritter Ordnung. Ein specieller Fall der Transformation zweiter Ordnung ist die durch „reciproke Radienvectoren", wobei der Fundamentalkegelschnitt der imaginäre Kugelkreis der unendlich fernen Ebene ist.

Ich mache eine Anwendung auf die Abbildung einer *Fläche vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt*, die von Herrn Clebsch, Crelle Bd. 69 und diese Annalen Bd. 3, pag. 60 behandelt worden ist. Die Gleichung der Fläche sei:

$$F \equiv U \cdot y_4^2 + M(y) \cdot y_4 \varphi(y) + \varphi^2(y) = 0$$

wobei

$$U = y_4 A(y) + \psi(y)$$

und $A(y)$ eine lineare, $\psi(y)$ eine quadratische Function von y_1, y_2, y_3, und $M(y)$ eine lineare Function von y_1, y_2, y_3, y_4 ist. Die Fläche geht durch P und hat K zum Doppelkegelschnitt. Ihr entspricht im Raume X die Fläche dritter Ordnung

$$\Phi \equiv \varphi(x) \cdot A(x) + x_4 \psi(x) + x_4^3 + x_4 M\{x_1 x_1 \ , \ x_2 x_4 \ , \ x_3 x_4 \ , \ \varphi(x)\} = 0,$$

welche durch K' hindurchgeht. Durch die ebene Abbildung von Φ ergiebt sich nun die von F. Dabei ist zu bemerken, dass auf Φ schon eine Gerade G eindeutig bekannt ist, nämlich die in der Ebene von K' liegende Gerade $x_4 = 0$, $A(x) = 0$. Die 16 Geraden von Φ, welche G nicht schneiden, und dadurch auch die 16 Geraden von F und die Abbildungen von Φ und F, erhält man also durch Lösung einer Gleichung fünften Grades und von 4 quadratischen Gleichungen. Dieser Zusammenhang ist ebenso schon von Herrn Geiser, Crelle Bd. 70, nachgewiesen worden.

Als weitere Anwendung bezeichne ich die Abbildung einer der von Herrn Kummer behandelten *Flächen vierter Ordnung* (Monatsberichte der Berliner Akad., 1863):

$$\varphi^2 + aA^4 + 4bA^3B + 6cA^2B^2 + 4dAB^3 + eB^4 = 0,$$

wobei φ eine Function zweiter Ordnung, die A, B lineare Functionen der Coordinaten sind, auf einer Kegelfläche dritter Ordnung, vom Geschlecht 1. Die Fläche hat zwei uniplanare Knotenpunkte, in denen sich die zwei Schalen der Fläche berühren, und der Ebenenbüschel $A + \lambda B = 0$ schneidet die Fläche in einer Kegelschnittschaar, eine Ebene in je zwei Kegelschnitten. 4 dieser Ebenen berühren die Fläche nach Kegelschnitten. Lässt man nun P unendlich nahe an K rücken und K mit einem dieser 4 Kegelschnitte zusammenfallen, während P

zugleich in einen der Knotenpunkte der Fläche fällt, so entspricht derselben durch die Transformation zweiter Ordnung ein Kegel dritter Ordnung.

Mit dieser Transformation behandelt man ferner die *Fläche fünfter Ordnung, F, mit Doppelkegelschnitt K und dreifachem Punkte P.* Die ebenen Schnitte von F bilden sich auf der Ebene ab durch Curven sechster Ordnung, mit 6 doppelten und 7 einfachen festen Punkten. Dem Punkt P entspricht eine ebene Curve dritter Ordnung, Q, durch die 6 ersteren Punkte a_i. Man legt sodann eine Curve sechster Ordnung, welche die a_i zu Doppelpunkten hat. Diese Curve schneidet Q in 6 weiteren Punkten, welche als einfache Fundamentalpunkte b_2 auftreten. Der siebente Fundamentalpunkt, c, kann beliebig angenommen werden. Dem Punkte c entspricht die Gerade von F, welche in der Ebene von K liegt, den Punkten b_i entsprechen 6 Gerade (PK) von F, und den Punkten a_i 6 Kegelschnitte von F, welche durch P gehen und K in je zwei Punkten treffen. Solcher Kegelschnitte giebt es 27 auf F, deren System mit dem der 27 Geraden einer Fläche dritter Ordnung identisch ist.

Ganz ähnlich geschieht die Abbildung einer Fläche sechster Ordnung mit dreifachem Kegelschnitt K und dreifachem Punkt P durch Functionen sechster Ordnung mit 6 doppelten und 6 einfachen Fundamentalpunkten, welch letztere auf einer durch die 6 ersteren Punkte gehenden Curve dritter Ordnung liegen.

§ 4.

Die Transformation der Ordnung zwei-drei mit ihren Ableitungen. Abbildung der Flächen n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$- oder $(n-2)$-facher Geraden.

Es giebt noch eine von der in § 3. betrachteten Art verschiedene Classe von Transformationsflächen zweiter Ordnung. Die *Hyperboloide*, welche eine Gerade und drei einfache Punkte gemein haben, bilden ebenfalls eine dreifach unendliche Schaar, und irgend drei der Flächen treffen sich noch in *einem* beweglichen Punkte; denn zwei derselben schneiden sich noch in einer Raumcurve dritter Ordnung, welche mit der festen Geraden 2 Punkte gemein hat und durch die 3 festen Punkte geht, und diese Curve trifft eine dritte der Flächen in einem weiteren Punkte. Diese Schaar kann daher zur Transformation dienen. Eine Betrachtung der in der Schaar enthaltenen zerfallenden Flächen ergiebt, dass die Transformationsflächen des entsprechenden Raumes *windschiefe Flächen dritter Ordnung* werden, mit fester Doppelgeraden und drei festen einfachen Geraden, welche jene schneiden.

Seien $y_1 = y_2 = 0$ die Fundamentalgerade g, und

1) $y_1 = y_3 = y_4 = 0$
2) $y_2 = y_3 = y_4 = 0$
3) $y_1 - y_2 = y_1 - y_3 = y_1 = 0$

die Fundamentalpunkte 1, 2, 3 des Raumes Y. Dann wird die Transformation:

$$\varrho x_1 = y_1 y_4 = \varphi_1 \qquad \sigma y_1 = x_1 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = \psi_1$$
$$\varrho x_2 = y_2 y_4 = \varphi_2 \qquad \sigma y_2 = x_2 (x_1 x_4 - x_2 x_3) = \psi_2$$
$$\varrho x_3 = y_1 (y_2 - y_3) = \varphi_3 \qquad \sigma y_3 = x_1 x_2 (x_1 - x_3) = \psi_3$$
$$\varrho x_4 = y_2 (y_1 - y_3) = \varphi_4 \qquad \sigma y_4 = x_1 x_2 (x_1 - x_2) = \psi_4 .$$

Die Doppelgerade G der Flächen ψ ist $x_1 = x_2 = 0$. Die drei einfachen Fundamentalgeraden der ψ, (1), (2), (3), sind:

(1) $x_1 = x_3 = 0$
(2) $x_2 = x_4 = 0$
(3) $x_1 - x_2 = x_4 - x_3 = 0$.

Als Fundamentalflächen von Y treten auf die Ebene E, $y_1 = 0$, welche durch die drei Punkte 1, 2, 3 geht, und die Ebenen $(g1)$, $(g2)$, $(g3)$ durch g und je einen der drei Punkte, nämlich $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$; als solche von X das Hyperboloid H oder $x_1 x_4 - x_2 x_3 = 0$, welches durch die drei Geraden (1), (2), (3) geht, und die Ebenen $(G1)$, $(G2)$, $(G3)$, oder $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_1 - x_2 = 0$, welche durch G und je eine der drei Geraden gehen. Und es entsprechen

die Ebenen $(G1)$, $(G2)$, $(G3)$ resp. den Punkten 1, 2, 3,
die Ebenen $(g1)$, $(g2)$, $(g3)$ resp. den Geraden (1), (2), (3),
das Hyperboloid H der Geraden g,
die Ebene E der Geraden G.

Den Punkten von g entsprechen die Erzeugenden von H, welche (1), (2), (3) schneiden, und den Punkten von G die Kegelschnitte der Ebene E, welche durch die Punkte 1, 2, 3 und den Schnittpunkt von E und g hindurchgehen.

Die Jacobi'sche Fläche von Y besteht aus den Ebenen E, $(g1)$, $(g2)$, $(g3)$, die von X aus H und $(G1)^2$, $(G2)^2$, $(G3)^2$.

Einer Fläche m^{ter} Ordnung von X, welche G zur μfachen und (1), (2), (3) zu je νfachen Geraden hat, entspricht im Raume Y eine Fläche der Ordnung $(2m - \mu - 3\nu)$, welche g zur $(m - 3\nu)$fachen Geraden, die Punkte 1, 2, 3 zu $(m - \mu - \nu)$fachen Knotenpunkten hat. Einer Fläche m^{ter} Ordnung von Y, welche g zur μfachen Geraden, 1, 2, 3 zu νfachen Knotenpunkten hat, entspricht in X einer Fläche der Ordnung $(3m - 2\mu - 3\nu)$, welche G zur $(2m - \mu - 3\nu)$fachen, (1), (2), (3) zu $(m - \mu - \nu)$fachen Geraden hat.

Insbesondere entspricht einer Fläche m^{ter} Ordnung in X, mit $(m-1)$facher Geraden G und einfachen Geraden (1), (2), (3), in Y eine Fläche $(m-2)^{ter}$ Ordnung, mit $(m-3)$facher Geraden g; und einer Fläche m^{ter} Ordnung in X, mit $(m-2)$facher Geraden G und einfachen Geraden (1), (2), (3), in Y eine Fläche $(m-1)^{ter}$ Ordnung, mit $(m-3)$facher Geraden g und einfachen Punkten in 1, 2, 3.

Die Ordnungen dieser beiden Flächen erniedrigen sich also, wenn man unsere Transformation der Ordnung zwei-drei auf sie anwendet; und es wird möglich, da diese Flächen eine genügende Anzahl von Geraden enthalten, welche man als Fundamentalgerade nehmen kann, die Transformation zwei-drei zu wiederholen und auf diese Weise die erstere Flächenart auf der Ebene, die zweite auf einem Hyperboloid eindeutig abzubilden.

Zu der in diesem § angegebenen Transformation füge ich noch die quadratische des § 3. hinzu, indem ich in der letztern den Fundamentalkegelschnitt in zwei sich schneidende Gerade zerfallen lasse. Aus diesen zwei *elementaren* Transformationen bilde ich eine ähnliche Reihenfolge, wie die der Cremona'schen Transformationen, welche die allgemeine ebene Transformation liefert. Die allgemeinste Raumtransformation, welche auf diesem Wege entsteht, ist die folgende:

„Den Ebenen von Y entspricht in X die dreifach unendliche Schaar von Flächen Ψ, der Ordnung $2r-s+1$, welche eine feste Gerade G zur $(2r-s)$fachen Geraden, ferner $3r-2s$ Gerade a_1, a_2, ... a_{3r-2s}, welche G, aber nicht einander schneiden, zu einfachen Geraden, und s feste Punkte α_1, α_2, ... α_s zu einfachen Punkten haben.

Bei dieser Transformation entspricht sodann den Ebenen von X im Raume Y die dreifach unendliche Schaar von Flächen Φ, der Ordnung $r+1$, welche eine feste Gerade g zur $r$fachen Geraden, ferner s feste Geraden β_1, β_2, ... β_s, welche g, aber nicht einander schneiden, zu einfachen Geraden, und $3r-2s$ feste Punkte b_1, b_2, ... b_{3r-2s} zu einfachen Punkten haben."

Denn die Flächen Ψ bilden in der That eine dreifach unendliche Schaar, weil eine Fläche der Ordnung $2r-s+1$ mit $(2r-s)$facher fester Gerade noch $3(2r-s+1)$ Constanten enthält und jede der Geraden a zwei, jeder der Punkte α eine weitere Constante absorbirt. Je drei der Flächen schneiden sich im Allgemeinen in *einem* beweglichen Punkte; denn zwei derselben schneiden sich, ausser G und den a, in einer Curve der Ordnung

$$(2r+1-s)^2-(2r-s)^2-(3r-2s)=r+1,$$

und diese Curve hat mit G r Punkte, mit den Geraden a je einen Punkt gemein und geht einfach durch die Punkte α; sie schneidet daher eine dritte der Flächen Ψ noch in

$$(r+1)(2r+1-s)-r(2r-s)-(3r-2s)-s$$

oder *einem* Punkte.

Daher können die Flächen Ψ zur Transformation dienen. Diese Transformation kann aber durch eine Reihenfolge von elementaren Transformationen ersetzt werden, da man auf diese Weise die Ordnung der den Ψ entsprechenden Flächen so lange erniedrigen kann, bis dieselbe der Einheit gleich wird. Denn ist die Anzahl der Fundamentalgeraden a gleich oder grösser als drei, so nimmt man G und drei der a als Fundamentalgerade der Flächen dritter Ordnung ψ einer Transformation zwei-drei, und die Ordnung der den Ψ entsprechenden Flächen Ψ' wird nach dem Obigen um 2 erniedrigt. Dabei entsprechen im Allgemeinen der Geraden durch G wieder Gerade von ähnlicher Art; und die Ψ' haben daher wohl s feste Punkte α', aber nur $3r-2s-3$ feste, die vielfache Gerade schneidende, Gerade a'. Wird nun die Anzahl der $a' < 3$, so macht man eine elementare Transformation der Ordnung zwei, indem man eine der Geraden a' und einen der Punkte α' benutzt; wodurch die Ordnung der entsprechenden Flächen Ψ'' um 1 kleiner wird, ebenso die Anzahl der festen Geraden und die der festen Punkte. Wird endlich die Anzahl der festen Geraden $= 0$, so ist die Anzahl der festen Punkte $= 3k$, und man muss noch k Transformationen der Ordnung drei-zwei machen, indem man immer drei der Punkte als Fundamentalpunkte der Flächen φ dieser Transformation annimmt; bei jeder derselben erniedrigt sich die Ordnung der transformirten Flächen um 1.

Aus der Betrachtung dieser successiven Transformationen und aus dem oben angeführten Verhalten der beweglichen Schnittcurven je zweier der Flächen Ψ folgt nun direct die Richtigkeit der oben angegebenen Umkehrung der Transformation $(2r-s+1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Man hat dabei nur zu bemerken, dass bei jeder der Transformationen dem Ebenenbüschel durch G wieder ein Ebenenbüschel durch die mehrfache Fundamentalgerade G' des entsprechenden Raumes, und Geraden durch G wiederum Gerade durch G', entsprechen, speciellen Ebenen dieses Büschels aber, wenn dieselben durch Gerade, resp. Punkte gehen, welche bei der Transformation benutzt werden, Punkte, resp. Gerade. Zu einem Ebenenbüschel durch G muss man noch eine Fläche Ω, von der Ordnung $2r-s$, welche G zur $(2r-s+1)$fachen Geraden, die Geraden a zu einfachen Geraden hat und durch die Punkte α geht, hinzufügen, um einen Büschel von Flächen Ψ zu erhalten, der dann die Abbildung des Ebenenbüschels durch g vorstellt. Die Fläche Ω ist daher die Abbildung der vielfachen Fundamentalgeraden g der Φ. Die Fläche Ω ist durch die genannten Bedingungen vollständig und eindeutig bestimmt. Sie wird erzeugt durch die rationalen Curven r^{ter} Ordnung, welche $(r-1)$ Punkte mit G, je

einen Punkt mit den Geraden a gemein und einfache Punkte in den α haben; denn solche Curven ergänzen sich mit den Geraden durch G zu Abbildungen von Geraden des Raumes Y.

Ebenso folgt, dass die Abbildung von G eine Fläche ω von der Ordnung r wird, die g als $(r-1)$fache Gerade, die s Geraden β zu einfachen Geraden hat und durch die $3r-2s$ Punkte b einfach geht. Auch diese Fläche ist durch diese Bedingungen vollständig und eindeutig bestimmt. Sie wird erzeugt durch die den Punkten von G entsprechenden, rationalen Curven der Ordnung $2r-s$, welche $2r-s-1$ Punkte mit g, je einen Punkt mit den Geraden β gemein, und einfache Punkte in den b haben.

Als weitere Fundamentalflächen der Transformation treten die Ebenen auf, welche man durch G und die Geraden a und Punkte α, und ebenso die Ebenen, welche man durch g und die Punkte b und Geraden β legen kann. Und zwar gelten für diese Gebilde die folgenden Beziehungen. Es entsprechen

die Ebenen (Ga_i) den Punkten b_i,
die Ebenen $(G\alpha_i)$ den Geraden β_i,
die Ebenen (gb_i) den Geraden a_i,
die Ebenen $(g\beta_i)$ den Punkten α_i,
die Fläche Ω der Geraden g,
die Fläche ω der Geraden G.

Diese Transformation werde nun auf die *Flächen* $(r+2)^{\text{ter}}$ *Ordnung* von X, $F=0$, welche G als *$r$fache Gerade*, die a als einfache Gerade, die Punkte α als Doppelpunkte besitzen, angewendet. Da diese Flächen noch $3r-2s+2$ nicht durch die α gehende Geradenpaare besitzen, so kann man $3r-2s$ dieser Geraden aus $3r-2s$ verschiedenen Paaren herausnehmen und die Transformationsflächen Ψ hindurchlegen. Diesen Flächen entsprechen dann im Raume Y *Hyperboloide* H, welche durch die $3r-2s$ Punkte b hindurchgehen, dagegen die Gerade g und die β nicht enthalten.

Diese Abbildung der Flächen F auf Hyperboloiden giebt sogleich die Eigenschaften derselben. So besteht der Schnitt von g mit H aus zwei Punkten, denen in X zwei Curven r^{ter} Ordnung entsprechen, welche aus F von Ω ausgeschnitten werden, und deren Kenntniss direct zur Abbildung von F geführt hätte. Diese Curven und die Fläche Ω sind die in meiner Abhandlung, diese Annalen, Bd. 3, pag. 180 ff. angegebenen. Bei der Abbildung sind die beiden Punkte, in welchen H von g getroffen wird, $r$fache, die Punkte des Schnittes der β mit H einfache, und ebenso die b einfache Fundamentalpunkte des Hyperboloids. Um auf die ebene Abbildung durch Functionen $(r+2)^{\text{ter}}$ Ordnung zu gelangen, projicirt man noch H von einem der Schnittpunkte von g und H aus auf eine Ebene.

Die oben entwickelte Transformation giebt die niedrigstmögliche ebene Abbildung der windschiefen *Flächen* n^{ter} *Ordnung mit* $(n-1)$ *facher Geraden*, $\Psi = 0$, wenn man $s = 0$ für $n = 2r+1$ und $s = 1$ für $n = 2r$ setzt. Die dreifach unendliche Schaar der Curven $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welche Schnitte einer Ebene E von Y mit den Flächen Φ sind, bildet dabei die ebenen Schnitte der E entsprechenden Fläche Ψ ab. Diese Abbildungen sind dann identisch mit den in § 7. der erwähnten Abhandlung gegebenen, wenn man nur noch, für $n = 2r$, den einen Fundamentalpunkt α der Transformationsflächen Ψ unendlich nahe an G heranrücken lässt.

§ 5.

Specialisirung der Transformation dritter Ordnung.

Ich gehe auf die allgemeine Transformation dritter Ordnung des § 2. zurück, um die Specialisirungen abzuleiten, welche durch das Zerfallen der Fundamentalcurve K, der Raumcurve sechster Ordnung, $p = 3$, eintreten. Diese speciellen Fälle, einzeln genommen oder zu einer Reihe von Transformationen mit einander verbunden, bieten eine reiche Quelle für Flächenabbildungen.

Eine Uebersicht über die hierbei möglichen Hauptfälle verschaffe ich mir auf folgendem Wege. Ich betrachte die durch § 2. gegebene Abbildung einer Fläche dritter Ordnung, φ, auf einer Ebene E von X. Dabei bildet sich die Curve K, durch welche φ geht, auf E ab durch den Schnitt dieser Ebene mit der Fundamentalfläche Ω [(6) oder (7) des § 2.], also durch eine Curve achter Ordnung mit 6 dreifachen Punkten. Indem man nun diese Curve auf alle möglichen Arten zerfallen lässt, ergeben sich auch die Singularitäten ihres Bildes, der Curve K. Um die Transformation durchzuführen, untersucht man sodann die Fläche Θ, welche durch die dreifachen Sehnen von K erzeugt wird. Der Schnitt von Θ mit einer Ebene von Y giebt das Bild der Fundamentalcurve L des Raumes X, und somit L selbst. So findet man folgende Transformationen:

(A) Die φ werden Flächen dritter Ordnung, welche eine Raumcurve Q fünfter Ordnung, $p = 2$, und eine Sehne G von Q gemein haben. Q ist der Schnitt einer Fläche zweiter und einer dritter Ordnung, die sich noch in einer Geraden treffen. Die Umkehrung ergiebt für den Raum X ein ganz ähnliches System von Transformationsflächen ψ, mit fester Curve q fünfter Ordnung, $p = 2$, und fester Sehne g von q. Der Sehne g entspricht das Hyperboloid durch Q, der Curve q die Fläche sechster Ordnung, mit Doppelcurve Q und dreifacher Geraden G, erzeugt durch die Sehnen von Q, welche G schneiden.

Ein weiteres Zerfallen von Q giebt Flächen φ, welche eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Species, und zwei ihrer Sehnen gemein haben. Diese bemerkenswerthe Transformation werde ich, mit ihren Ableitungen, in § 6. näher untersuchen; ebenso die weiteren hieher gehörigen speciellen Fälle.

(B) Die φ sind Flächen dritter Ordnung, welche eine Raumcurve Q, fünfter Ordnung $p = 1$, und eine Q in drei Punkten treffende Sehne G gemein haben. Die ψ werden sodann Flächen dritter Ordnung, mit gemeinschaftlicher Raumcurve vierter Ordnung erster Species q, und Kegelschnitt g, der q in 3 Punkten trifft. Auch diese Transformation soll in § 8. näher betrachtet werden.

Speciell kann Q in eine Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species, Q', und eine Sehne von Q' zerfallen. G bleibt dreipunktige Sehne von Q'. Dieser Fall ist zugleich in (A) enthalten.

(C) Die φ sind Flächen dritter Ordnung, welche eine rationale Raumcurve fünfter Ordnung, Q, und die vierpunktige Sehne G von Q gemein haben. Die Curve Q entsteht als theilweiser Schnitt zweier Flächen dritter Ordnung, welche eine Raumcurve dritter Ordnung und eine diese nicht schneidende Gerade $L = M = 0$ gemein haben; und die Transformationsformeln werden daher, wenn die A_i, B_i lineare Functionen sind:

$$\varrho \Sigma \lambda_i x_i = \Sigma \lambda_i \varphi_i = \begin{vmatrix} \lambda_1 & , & \lambda_2 & , & \lambda_3 & , & \lambda_4 \\ \alpha_1 L + \beta_1 M & , & \gamma_1 L + \delta_1 M & , & A_1 & , & B_1 \\ \alpha_2 L + \beta_2 M & , & \gamma_2 L + \delta_2 M & , & A_2 & , & B_2 \\ \alpha_3 L + \beta_3 M & , & \gamma_3 L + \delta_3 M & , & A_3 & , & B_3 \end{vmatrix}.$$

Dabei besteht der Büschel $\lambda_3 \varphi_3 + \lambda_4 \varphi_4 = 0$ aus windschiefen Flächen. Die Umkehrung führt auf ein ganz ähnliches System von Flächen ψ, mit festen Curven q, g. Der Curve q entspricht die Fläche achter Ordnung, mit 3facher Curve Q und 4facher Geraden G; der Geraden g, welche q in 4 Punkten trifft, entspricht nur wieder eine Gerade G, so dass hier einer der im § 1. berührten singulären Fälle eintritt.

(D) Die φ sind Flächen dritter Ordnung, mit gemeinschaftlicher Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species, Q, und Kegelschnitt G, welcher Q in 4 Punkten trifft. Auch im entsprechenden Raume liegt dann ein solches System von Flächen ψ, mit gemeinschaftlicher Raumcurve vierter Ordnung zweiter Species, q, und Kegelschnitt g, welcher q in 4 Punkten trifft. Der Curve q entspricht die Fläche sechster Ordnung mit Doppelcurve Q und dreifacher Curve G, erzeugt durch die Sehnen von Q, welche G treffen; dem Kegelschnitt g entspricht das Hyperboloid, welches man durch G legen kann; und ähnlich im Raume X.

(E) Die φ sind Flächen dritter Ordnung, welche eine Raumcurve dritter Ordnung und eine diese in drei Punkten treffende ebene Curve dritter Ordnung gemein haben. Die Umkehrung ergiebt Flächen dritter Ordnung, ψ, mit einem festen Doppelpunkt P und einer gemeinschaftlichen Raumcurve sechster Ordnung, $p = 1$, welche P zum dreifachen Punkte hat. Diese Transformation werde ich in § 7. entwickeln.

(F) Die φ sind Flächen dritter Ordnung, welche zwei Raumcurven dritter Ordnung Q, Q' gemein haben, die sich in vier Punkten treffen. Die ψ bilden dann ein ganz ähnliches System mit zwei Raumcurven dritter Ordnung q, q'. Der Curve q entspricht eine Fläche vierter Ordnung, mit zweifacher Curve Q, einfacher Curve Q', oder eine $F_4(Q^2, Q')$, der q' eine $F_4(Q, Q'^2)$, der Q eine $F_4(q^2, q')$, der Q' eine $F_4(q, q'^2)$.

(G) Ich führe noch die speciellste der Transformationen dritter Ordnung an. Die φ sind die Flächen dritter Ordnung, welche vier feste Punkte zu Doppelpunkten haben und daher die sechs Kanten des Tetraeders, das diese vier Punkte zu Ecken hat, enthalten. Die Gleichungen kann man in die Form bringen:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \frac{1}{y_1} : \frac{1}{y_2} : \frac{1}{y_3} : \frac{1}{y_4},$$

oder:

$$\begin{aligned} \varrho\, x_1 &= y_2 y_3 y_4, & \sigma\, y_1 &= x_2 x_3 x_4 \\ \varrho\, x_2 &= y_3 y_4 y_1, & \sigma\, y_2 &= x_3 x_4 x_1 \\ \varrho\, x_3 &= y_4 y_1 y_2, & \sigma\, y_3 &= x_4 x_1 x_2 \\ \varrho\, x_4 &= y_1 y_2 y_3, & \sigma\, y_4 &= x_1 x_2 x_3. \end{aligned}$$

Auch die ψ haben die vier Ecken eines Tetraeders zu Doppelpunkten und gehen sodann durch die sechs Kanten desselben. Den vier Ecken des einen Tetraeders entsprechen die vier ebenen Flächen des anderen Tetraeders, die Kanten entsprechen sich gegenseitig. Die Flächen schneiden sich noch in beweglichen Raumcurven dritter Ordnung, die durch die vier Ecken hindurchgehen. Die Jacobi'sche Fläche besteht aus den vier Ebenen des Tetraeders, die doppelt zu rechnen sind.

§ 6.

Die Transformation (A) mit ihren Ableitungen. Abbildung der Flächen $(2n+1)^{ter}$ Ordnung mit n facher Raumcurve vierter Ordnung erster Species.

Nimmt man bei der Transformation dritter Ordnung des § 2. an, dass im Raume Y ein Ebenenbüschel $y_1 + \lambda y_2 = 0$ existirt, dem im Raume X ebenfalls ein Ebenenbüschel $x_1 + \lambda x_2 = 0$ entspricht, so werden die drei bilinearen Gleichungen

$$-x_1y_2 + x_2y_1 = 0$$
$$\Sigma x_i A_i = 0, \qquad \Sigma x_i B_i = 0,$$

woraus

$$\varrho \Sigma \lambda_i x_i = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ -y_2 & y_1 & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{vmatrix}.$$

Dieses ist das in (A), § 5. angeführte System. Für die Fundamentalflächen giebt die Gleichung (6) des § 2.:

$$(A_3B_4 - A_4B_3)(\mathsf{A}_3\mathsf{B}_4 - \mathsf{A}_4\mathsf{B}_3) = 0.$$

Der erste Factor stellt das Hyperboloid dar, welches der Geraden $x_1 = x_2 = 0$ entspricht; der zweite Factor, wenn darin die x durch die y ausgedrückt werden, die in (A) erwähnte windschiefe Fläche sechster Ordnung.

Ich nehme jetzt weiter an, dass noch ein zweiter Ebenenbüschel in Y existirt, dem im Raume X ebenfalls ein Ebenenbüschel entspricht. Die bilinearen Gleichungen seien

$$-x_1y_2 + x_2y_1 = 0$$
$$-x_3y_4 + x_4y_3 = 0$$
$$\Sigma y_k A_k \equiv \Sigma x_i A_i = 0,$$

woraus

$$\varrho \Sigma \lambda_i x_i = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 \\ -y_2 & y_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -y_4 & y_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{vmatrix} = \Sigma \lambda_i \varphi_i$$

oder:

$$\varphi_1 = -y_1(y_3A_3 + y_4A_4) = -y_1H_1$$
$$\varphi_2 = -y_2(y_3A_3 + y_4A_4) = -y_2H_1$$
$$\varphi_3 = y_3(y_1A_1 + y_2A_2) = y_3H_2$$
$$\varphi_4 = y_4(y_1A_1 + y_2A_2) = y_4H_2$$

und ebenso

$$\psi_1 = x_1(x_3\mathsf{A}_3 + x_4\mathsf{A}_4) = x_1h_2$$
$$\psi_2 = x_2(x_3\mathsf{A}_3 + x_4\mathsf{A}_4) = x_2h_2$$
$$\psi_3 = -x_3(x_1\mathsf{A}_1 + x_2\mathsf{A}_2) = -x_3h_1$$
$$\psi_4 = -x_4(x_1\mathsf{A}_1 + x_2\mathsf{A}_2) = -x_4h_1$$

Die Transformationsflächen werden Flächen dritter Ordnung, welche eine Raumcurve vierter Ordnung erster Species und zwei ihrer Sehnen gemein haben. Je zwei dieser Flächen schneiden sich noch in einer Raumcurve dritter Ordnung, welche die Raumcurve vierter Ordnung in vier Punkten, die Sehnen in je zwei Punkten trifft

Es seien Q die Raumcurve vierter Ordnung, $H_1 = H_2 = 0$, G_1 $(y_3 = y_4 = 0)$ und G_2 $(y_1 = y_2 = 0)$ die beiden Sehnen von Q. Ebenso seien q $(h_1 = h_2 = 0)$, g_1 $(x_1 = x_2 = 0)$ und g_2 $(x_3 = x_4 = 0)$ die Raumcurve vierter Ordnung und die beiden Sehnen im Raume X. Die Gleichung (6) des § 2. giebt nun für die diesen Curven entsprechenden Fundamentalflächen:

$$(y_3 A_3 + y_4 A_4)(x_3 \mathsf{A}_3 + x_4 \mathsf{A}_4) = 0,$$

oder für den Raum Y:

$$(y_1 A_1 + y_2 A_2)(y_3 A_3 + y_4 A_4)(y_3 \mathsf{A}_3 + y_4 \mathsf{A}_4) = 0.$$

Die Gleichung $y_3 \mathsf{A}_3 + y_4 \mathsf{A}_4 = 0$, die identisch ist mit $y_1 \mathsf{A}_1 + y_2 \mathsf{A}_2 = 0$, stellt die windschiefe Fläche vierter Ordnung Ω dar, welche die Sehnen G_1, G_2 zu Doppelgeraden hat und durch die Curve Q hindurchgeht; sie wird erzeugt durch die Geraden, welche Q, G_1 und G_2 treffen und welche den Punkten der Curve q entsprechen. Ω selbst entspricht also der Curve q. Den Sehnen g_1 und g_2 entsprechen resp. die Hyperboloide H_1 und H_2, von denen H_1 durch G_1, H_2 durch G_2 geht. Ebenso entsprechen der Sehne G_1 das Hyperboloid h_1 durch q und g_1, der Sehne G_2 das Hyperboloid h_2 durch q und g_2, und der Curve Q die windschiefe Fläche ω, welche durch q geht und g_1, g_2 zu Doppelgeraden hat.

Den Punkten von g_1, resp. g_2 entsprechen die Sehnen von Q, welche G_1, resp. G_2 schneiden, den von G_1, resp. G_2 die Sehnen von q, welche g_1, resp. g_2 schneiden. Im Allgemeinen aber entsprechen sich die Sehnen von q und Q gegenseitig.

Diese Transformation liefert direct die bekannte Abbildung der Fläche fünfter Ordnung mit Doppelcurve vierter Ordnung, $F = 0$. Denn lässt man q mit dieser Curve zusammenfallen und legt g_1 und g_2 in zwei der Sehnen, welche auf F liegen, so entspricht dieser Fläche in Y eine Fläche dritter Ordnung, die Q enthält, und die sich nun weiter abbilden lässt.

Um aber diese Abbildungen auf die einfachste Weise zu geben, benutze ich eine weitere Transformation derselben Art, bei welcher auch dieselbe Curve Q, aber zwei von G_1, G_2 verschiedene Sehnen G_3, G_4 von Q die Fundamentalcurven für die Beziehung zwischen dem Raume Y und einem weiteren Raume Z sein sollen. Den Ebenen von Z sollen die Flächen dritter Ordnung entsprechen, welche durch Q, G_3, G_4 gehen. Den Sehnen G_3, G_4 entsprechen nun im Raume X wieder Sehnen g_3, g_4 von q, und den obenerwähnten Flächen, oder den Ebenen von Z, entsprechen daher in X Flächen fünfter Ordnung, welche die Curve q zur Doppelcurve und die vier Sehnen g_1, g_2, g_3, g_4 von q einfach enthalten.

Die Transformationsflächen Ψ von X, welche den Ebenen von Z

entsprechen, sind somit die dreifach unendliche Schaar von Flächen fünfter Ordnung, welche eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Species zur Doppelcurve und vier feste ihrer Sehnen zu einfachen Geraden haben. Je drei dieser Flächen schneiden sich im Allgemeinen in *einem* beweglichen Punkte.

Auch den Ebenen von X entspricht sodann in Z die dreifach unendliche Schaar von Flächen fünfter Ordnung, Φ, welche eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Species, Q', zur Doppelcurve und vier feste ihrer Sehnen, G_1', G_2', G_3', G_4', zu einfachen Geraden haben.

Um die Fundamentalflächen dieser Transformation (XZ) zu erhalten, hat man nur die beiden Transformationen (XY) und (YZ) zu betrachten. So ist die Fläche Ω' von Z, welche der Curve q entspricht, das Bild der Fläche Ω bei der Transformation (YZ), also eine Fläche achter Ordnung, die Q' zur dreifachen Curve und die vier Sehnen G' zu Doppelgeraden hat. Diese Fläche wird erzeugt durch die Curven, welche den Erzeugenden von Ω, den Geraden, die Q, G_1, G_2 treffen, entsprechen, also erzeugt durch die Kegelschnitte, welche Q' in drei Punkten, die vier Sehnen G' in je einem Punkte treffen. Ebenso ergiebt sich, dass den Sehnen g_1, g_2, g_3, g_4 der Curve q von X im Raume Z die Hyperboloide H_1', H_2', H_3', H_4' entsprechen, welche resp. durch G_1', G_2', G_3', G_4' und durch Q' gehen.

Aehnlich entsprechen den Sehnen G_1', G_2', G_3', G_4' die Hyperboloide h_1, h_2, h_3, h_4 in X, welche durch q und resp. g_1, g_2, g_3, g_4 gehen; und der Curve Q' entspricht eine Fläche achter Ordnung, ω', die q zur dreifachen Curve, die vier Sehnen g zu Doppelgeraden hat.

Noch bemerke ich, dass der von Herrn Lüroth, diese Annalen, Bd. 3, pag. 124 gegebene Satz, dass zwei Kegelschnitte existiren, welche eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Species in drei Punkten und fünf ihrer Sehnen in je einem Punkte treffen, direct daraus folgt, dass eine fünfte Sehne G' die Curve Q' in zwei Punkten trifft; denn diesen beiden Punkten entsprechen eben in X jene zwei Kegelschnitte.

Da jede Fläche fünfter Ordnung mit Doppelcurve vierter Ordnung, erster Species, $\Psi = 0$, sieben Sehnenpaare dieser Curve besitzt, so kann man vier der Sehnen aus vier Paaren herauswählen, und Ψ mittelst der hier angegebenen Transformation auf der Ebene abbilden. Die Bilder der ebenen Schnitte sind dann die Schnitte einer Ebene mit den Flächen Φ der Transformation (XZ), Curven fünfter Ordnung mit vier doppelten und vier einfachen Fundamentalpunkten; und das Bild der Doppelcurve ist der Schnitt der Ebene mit der Fläche Ω'. Die Betrachtung dieser Abbildung erscheint vortheilhafter, als die der möglichst niederen Abbildung.

Man kann nun die Reihe der Transformationen (XY), (YZ) auf gleiche Art weiter fortsetzen, indem man zuerst in Z wieder die Curve Q', dagegen zwei neue Sehnen G_5', G_6' als Fundamentalcurven einer Transformation (ZU) benutzt u. s. w. So ergiebt sich durch eine Verbindung von n dieser Transformationen die folgende *Transformation* $(2n+1)^{ter}$ *Ordnung*:

„Die den Ebenen eines Raumes W entsprechenden Transformationsflächen des Raumes X sind Flächen Ψ der Ordnung $2n+1$, welche eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Species, q, als $n$fache Curve und $2n$ feste Sehnen von q als einfache Gerade besitzen. Dabei entspricht auch den Sehnen von X in W eine ähnliche dreifach unendliche Schaar von Flächen Φ der Ordnung $2n+1$, mit fester $n$facher Raumcurve vierter Ordnung, erster Species Q und festen $2n$ Sehnen von Q als einfachen Geraden. Den Fundamentalgeraden des einen Raumes entsprechen die Hyperboloide, welche durch die Raumcurve und je eine der Sehnen im anderen Raume gehen; der Raumcurve vierter Ordnung des ersten Raumes entspricht im zweiten die Fläche der Ordnung $4n$, welche die Raumcurve desselben als $(2n-1)$fache Curve, die Sehnen zu Doppelgeraden hat, erzeugt durch die rationalen Raumcurven n^{ter} Ordnung, welche die Raumcurve vierter Ordnung in $2n-1$ Punkten, die $2n$ Sehnen in je einem Punkte treffen."

Daraus folgt zugleich der Satz: „Die Anzahl der rationalen Raumcurven n^{ter} Ordnung, welche eine Raumcurve vierter Ordnung, erster Species in $2n-1$ Punkten und $2n+1$ allgemeine ihrer Sehnen in je einem Punkte treffen, ist gleich zwei."

In dieser Transformation ist die *ebene Abbildung jeder Fläche* $(2n+1)^{ter}$ *Ordnung mit $n$facher Raumcurve vierter Ordnung, erster Species* enthalten; denn auf diesen Flächen liegen immer $2n+3$ Geradenpaare, welche von Hyperboloiden, die durch die Raumcurve gehen, ausgeschnitten werden, und man kann $2n$ Gerade aus $2n$ verschiedenen Paaren herauswählen und zur Transformation benutzen. Die ebenen Schnitte einer solchen Fläche bilden sich ab durch Curven $(2n+1)^{ter}$ Ordnung, mit vier $n$fachen und $2n$ einfachen Fundamentalpunkten. Durch eine Cremona'sche Transformation zweiter Ordnung erhält man sodann die niedrigste Abbildung durch Curven $(n+2)^{ter}$ Ordnung, mit einem $n$fachen und $2n+3$ einfachen Fundamentalpunkten. Auf der Fläche liegen 2^{2n+2} der erwähnten rationalen Raumcurven n^{ter} Ordnung.

Ich kehre zur Transformation (A) selbst zurück. Eine weitere Specialisirung derselben kann man dadurch eintreten lassen, dass man noch einem dritten Ebenenbüschel von Y einen Ebenenbüschel von X entsprechen lässt. Die drei bilinearen Gleichungen seien dann:

$$x_1 L_2 - x_2 L_1 = 0$$
$$x_3 M_2 - x_4 M_1 = 0$$
$$x_1 N_2 - x_2 N_1 + x_3 N_2 - x_4 N_1 = 0,$$

oder:

$$\varrho x_1 = L_1 (M_1 N_2 - M_2 N_1) = \varphi_1$$
$$\varrho x_2 = L_2 (M_1 N_2 - M_2 N_1) = \varphi_2$$
$$\varrho x_3 = M_1 (N_1 L_2 - N_2 L_1) = \varphi_3$$
$$\varrho x_4 = M_2 (N_1 L_2 - N_2 L_1) = \varphi_4,$$

wo die L, M, N lineare Functionen der y. Die Flächen φ enthalten dann eine Raumcurve dritter Ordnung Q und drei ihrer Sehnen G gemeinschaftlich. Die Flächen ψ in X enthalten ein ähnliches System q, g. Der Curve q entspricht das Hyperboloid durch die drei Geraden G, den Sehnen g die drei Hyperboloide durch Q und je zwei der Sehnen G.

Die speciellste der Transformationen (A) ergiebt sich durch ein Zerfallen von Q in drei Gerade, von denen zwei die G schneiden. Die φ werden dann Flächen dritter Ordnung, welche vier sich nicht schneidende Gerade G_1, G_2, G_3, G_4 und folglich auch die zwei Geraden G_1', G_2', welche diese vier Geraden treffen, gemein haben. Auch die ψ enthalten dann ein ähnliches System von vier Geraden g_i und den zwei Schnittgeraden g_i'. Die Transformation hat die Gleichungen:

$$\varrho x_1 = H_1 \Sigma l_i' y_i \,, \qquad \varrho x_3 = H_2 \Sigma l_i y_i \,,$$
$$\varrho x_2 = H_1 \Sigma m_i' y_i, \qquad \varrho x_4 = H_2 \Sigma m_i y_i,$$

wo

$$H_1 = \begin{vmatrix} l_1 y_1 + l_2 y_2, & m_1 y_1 + m_2 y_2 \\ l_3 y_3 + l_4 y_4, & m_3 y_3 + m_4 y_4 \end{vmatrix},$$

$$H_2 = \begin{vmatrix} l_1' y_1 + l_2' y_2, & m_1' y_1 + m_2' y_2 \\ l_3' y_3 + l_4' y_1, & m_3' y_3 + m_4' y_4 \end{vmatrix}.$$

Die Jacobi'sche Fläche von Y besteht aus den vier Hyperboloiden, welche durch je drei der Geraden G_i hindurchgehen und welche den Geraden g_i von X entsprechen. Die Geraden g' und G' entsprechen sich gegenseitig. Diese Transformation ist auch specieller Fall von (C), § 5.

§ 7.

Die Transformation (E). Abbildung zweier Flächenarten von der fünften und sechsten Ordnung.

Den Ebenen des Raumes X, die durch einen festen Punkt P derselben gehen, möge im Raume Y die zweifach unendliche Schaar von Hyperboloiden entsprechen, welche durch eine feste Raumcurve dritter Ordnung, Q, hindurchgehen. Der Geradenschaar durch P entspricht

alsdann die Schaar der Sehnen von Q, und eine beliebige weitere lineare Beziehung zwischen den Coordinaten der beiden Räume giebt sonach eine eindeutige Transformation zwischen denselben.

Sei P gegeben durch $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, und Q durch den Schnitt der Hyperboloide:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & A_1 & B_1 \\ \alpha_2 & A_2 & B_2 \\ \alpha_3 & A_3 & B_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Die angegebene Beziehung kann man dann durch die Gleichungen ausdrücken:

$$(1)\quad \begin{cases} A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 \equiv \mathsf{A}_1y_1 + \mathsf{A}_2y_2 + \mathsf{A}_3y_3 + \mathsf{A}_4y_4 = 0 \\ B_1x_1 + B_2x_2 + B_3x_3 \equiv \mathsf{B}_1y_1 + \mathsf{B}_2y_2 + \mathsf{B}_3y_3 + \mathsf{B}_4y_4 = 0, \\ y_1x_1 + y_2x_2 + y_3x_3 - y_4x_4 = 0 \end{cases}$$

woraus:

$$(2)\quad \begin{cases} \varrho x_1 = y_4(A_2B_3 - A_3B_2) = \varphi_1 \\ \varrho x_2 = y_4(A_3B_1 - A_1B_3) = \varphi_2 \\ \varrho x_3 = y_4(A_1B_2 - A_2B_1) = \varphi_3 \\ \varrho x_4 = y_1(A_2B_3 - A_3B_2) + y_2(A_3B_1 - A_1B_3) + y_3(A_1B_2 - A_2B_1) = \varphi \end{cases}$$

und

$$(3)\qquad \sigma \Sigma \mu_k y_k = \Sigma \pm \mu_1 x_2 \mathsf{A}_3 \mathsf{B}_4 = \Sigma \mu_k \psi_k.$$

Die Flächen dritter Ordnung φ gehen durch Q und durch die ebene Curve dritter Ordnung R hindurch, welche die Gleichungen $y_4 = 0$, $\varphi_4 = 0$ hat und welche die Curve Q in drei Punkten schneidet. Umgekehrt führt auch ein solches Fundamentalsystem auf Gleichungen der angegebenen Form.

Die Flächen ψ haben den Punkt P zum Doppelpunkt. Je zwei der Flächen schneiden sich noch in einer beweglichen Raumcurve dritter Ordnung, die durch P einfach geht. Die ψ enthalten daher als feste Curve eine Raumcurve sechster Ordnung, welche P zum dreifachen Punkte hat. Diese Fundamentalcurve q ist vom Geschlecht 1; denn nach den Formeln (5) des § 2. kann man sie eindeutig in eine ebene Curve dritter Ordnung transformiren.

Dem Punkte P entspricht die Ebene $E(y_4 = 0)$, welche durch R geht. Der Curve q entspricht daher noch die windschiefe Fläche sechster Ordnung, Ω, welche Q zur dreifachen, R zur einfachen Curve hat, erzeugt durch die Sehnen von Q, welche R schneiden. Nach (6), § 2. hat man für die Fundamentalflächen:

$$(4)\qquad \begin{aligned} &(A_2B_3 - A_3B_2)(\mathsf{A}_2\mathsf{B}_3 - \mathsf{A}_3\mathsf{B}_2) \\ &+ (A_3B_1 - A_1B_3)(\mathsf{A}_3\mathsf{B}_1 - \mathsf{A}_1\mathsf{B}_3) \\ &+ (A_1B_2 - A_2B_1)(\mathsf{A}_1\mathsf{B}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{B}_1) = 0 \end{aligned}$$

und hieraus, wenn man mittelst (2) die x durch die y ausdrückt und den Factor y_4^2 ausscheidet:

$$\Omega \equiv \sum_{i,j,h} p_{ij,h}\,\Phi_i\,\Phi_j\,\Phi_h = 0 \qquad (i,j,h = 1,2,3),$$

wobei

$$\Phi_1 = A_2B_3 - A_3B_2, \text{ u. s. w.}$$

$$p_{ij,1} = a_{i2}\,b_{j3} - a_{i3}\,b_{j2}, \text{ u. s. w.}$$

Wenn man aber in (4) mittelst (3) die y durch die x ausdrückt; ergiebt sich zuerst:

$$\omega \equiv x_1(\mathsf{A}_2\mathsf{B}_3 - \mathsf{A}_3\mathsf{B}_2) + x_2(\mathsf{A}_3\mathsf{B}_1 - \mathsf{A}_1\mathsf{B}_3) + x_3(\mathsf{A}_1\mathsf{B}_2 - \mathsf{A}_2\mathsf{B}_1) = 0,$$

eine Kegelfläche dritter Ordnung, die den Punkt P zum Scheitelpunkt hat und über der Curve sechster Ordnung q beschrieben ist. Dieser Kegel ω entspricht der Curve R. Endlich findet man die der Curve Q entsprechende Fundamentalfläche χ, wenn man in den Φ_i die y durch die x ausdrückt und den Factor x_i abtrennt. Diese Fläche χ muss noch, nach § 1., eine windschiefe Fläche fünfter Ordnung sein, welche q zur Doppelcurve hat und erzeugt wird durch die Geraden, welche q in drei Punkten treffen. Diese Fläche hat dann P zum dreifachen Punkte und ihre Gleichung ist:

$$\chi \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & B_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & B_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & B_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & 0 \\ \mathsf{B}_1 & \mathsf{B}_2 & \mathsf{B}_3 & \mathsf{B}_4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Als eine Anwendung dieser Transformation führe ich die ebene Abbildung einer Fläche F von der sechsten Ordnung, welche q zur Doppelcurve, den Punkt P zum dreifachen Punkte hat, an. Dieser Fläche entspricht in Y eine Fläche f von der dritten Ordnung, die durch R geht. Bildet man nun f und somit auch F auf der Ebene ab, so werden die Bilder der ebenen Schnitte von F Curven sechster Ordnung S, mit sechs doppelten Fundamentalpunkten a und sechs einfachen Fundamentalpunkten b, welche auf der Ebene eine willkürliche Lage haben. Eine nähere Betrachtung zeigt, dass auf der Bildebene dann immer drei Punkte c liegen, welche eine zweifach unendliche Schaar von Curven S, die durch die drei Punkte c gehen, zulassen, den Bildern der durch P gehenden ebenen Schnitte von F. Die b und c entsprechen den neun Punkten, in welchen f von der Raumcurve dritter Ordnung Q geschnitten wird. Man legt durch die a zwei Curven dritter Ordnung, die sich noch in drei Punkten d schneiden. Sodann legt man zwei Curven sechster Ordnung, welche die a zu Doppelpunkten haben und durch die d gehen. Diese Curven schneiden sich noch in neun Punkten, von denen man sechs für die b nimmt.

Die drei anderen sind dann die c. Die Fläche besitzt sechs Gerade, welche dreipunktige Sehnen von q sind, und ein System von 27 Kegelschnitten, welches dem Geradensystem einer Fläche dritter Ordnung analog ist.

Von einem specielleren Falle der vorliegenden Transformation (E), in welchem einem Ebenenbüschel von Y wieder ein Ebenenbüschel von X entspricht, habe ich schon in meiner Arbeit, diese Annalen, Bd. 3, pag. 205, eine Anwendung auf eine Abbildungsaufgabe gemacht. Bei dieser Transformation zerfällt die ebene Curve dritter Ordnung, R, in einen Kegelschnitt K, der Q in drei Punkten trifft, und in eine Gerade G, welche in der Ebene von K liegt und Q nicht schneidet. Auch q zerfällt dann in eine Raumcurve fünfter Ordnung, q', welche den Punkt P zum dreifachen Punkte und das Geschlecht 0 hat, und in eine nicht durch P gehende Sehne G' von q'. Es entspricht dabei der Geraden G' das Hyperboloid durch Q und K, der Curve q' die windschiefe Fläche vierter Ordnung, mit Doppelcurve Q und einfacher Geraden G, erzeugt durch die Sehnen von Q, welche G schneiden, dem Punkte P die Ebene durch K und G; ferner der Geraden G der Kegel zweiter Ordnung, welcher seinen Scheitel in P hat und über q' beschrieben ist, dem Kegelschnitt K die Ebene durch P und G' und endlich der Raumcurve dritter Ordnung, Q, die windschiefe Fläche fünfter Ordnung, mit Doppelcurve q', Doppelgeraden G' und dreifachem Punkte P, erzeugt durch die Sehnen von q', welche G' schneiden.

Diese Transformation liefert direct die Abbildung einer Fläche F fünfter Ordnung mit dreifachem Punkte P und Doppelcurve q', deren, zugleich mit ihrem Geradensystem, Herr Clebsch, diese Annalen, Bd. 3, pag. 75 Anmerk., Erwähnung thut. Der Fläche F entspricht in Y eine Fläche f von der vierten Ordnung, die durch Q geht und K als Doppelcurve enthält. Das Geradensystem von F ist sodann dasselbe, wie das ihrer Bilder, der zehn Geraden von f, welche K und Q in je einem Punkte treffen. Benutzt man eine der Geraden von F zur Transformation als Gerade G', so entspricht der Fläche F in X ein Hyperboloid durch K.

§. 8.

Die Transformation (B). Abbildung der Flächen sechster Ordnung mit Doppelcurve fünfter Ordnung vom Geschlecht 1.

Ich gehe hier aus von der dreifach unendlichen Schaar der Transformationsflächen ψ des Raumes X, Flächen dritter Ordnung mit fester Raumcurve vierter Ordnung, erster Species, q, und festem Kegelschnitt k, der q in drei Punkten trifft.

Es ist nachzuweisen, dass die Transformationsflächen φ des Raumes Y Flächen dritter Ordnung werden, mit fester Raumcurve fünfter

Ordnung vom Geschlecht 1, Q, und fester Geraden G, die Q in drei Punkten trifft.

Nun giebt es unter den Flächen ψ eine einfach unendliche Schaar, welche in die k enthaltende Ebene E und in den durch q gehenden Flächenbüschel zweiter Ordnung zerfällt und welche einem Ebenenbüschel von Y entspricht, woraus folgt, dass in Y eine Fundamentalgerade G, die Axe des Ebenenbüschels, liegt, welcher die Ebene E entspricht. Weiter muss daher in Y noch eine Fundamentalcurve fünfter Ordnung Q liegen, deren Punkten die Sehnen von q entsprechen, welche k schneiden. Diese Sehnen erzeugen eine Fläche ω von der Ordnung 7, welche q zur dreifachen, k zur doppelten Curve besitzt und welche das Curvengeschlecht 1 hat. Daher hat auch Q das Geschlecht 1. Da sich ferner die Ebene E und die Fläche ω ausser k in noch drei Geraden schneiden, so muss auch die Gerade G die Curve Q in drei Punkten treffen, womit die oben angegebene Umkehrung der Transformation erwiesen ist. Ganz ähnlich kann man auch von den Flächen φ zu den Flächen ψ übergehen.

Die den Punkten von q entsprechenden dreipunktigen Sehnen von Q erzeugen eine Fläche Ω von der Ordnung 5, mit Doppelcurve Q und einfacher Geraden G. Die den Punkten von k entsprechenden Sehnen von Q, welche G schneiden, erzeugen eine Fläche Θ von der dritten Ordnung, welche Q zur einfachen Curve, G zur Doppelgeraden hat. Es entsprechen sich G und E, Q und ω, k und Θ, q und Ω.

Zur Anwendung dieser Transformation untersuche ich die ebene Abbildung einer *Fläche F von der sechsten Ordnung*, welche die *Raumcurve fünfter Ordnung mit $p = 1$, Q*, zur *Doppelcurve* hat. Diese Fläche hat das Flächengeschlecht 0, da man durch die Curve Q keine Fläche zweiter Ordnung legen kann.

Durch die Transformation dieses § entspricht der Fläche F im Raume X eine Fläche f von der vierten Ordnung, welche den Kegelschnitt k zur Doppelcurve hat. Die ebene Abbildung der Fläche f gibt somit auch die von F.

Man kann aber die Abbildung dadurch noch einfacher gestalten, dass man auch die Sehne G von Q benutzt. Denn die windschiefe Fläche Ω, erzeugt durch die dreipunktigen Sehnen von Q, schneidet die Fläche F noch in einer Curve zehnter Ordnung, welche, da diese Sehnen ausser Q die Fläche F nicht mehr treffen, in zehn der Sehnen zerfällt. Wählt man daher eine dieser zehn auf F liegenden Geraden heraus und lässt G mit derselben zusammenfallen, so wird der Fläche F durch die vorliegende Transformation in X eine Fläche Φ von der dritten Ordnung, welche durch den Kegelschnitt k einfach geht, eindeutig entsprechen.

Die ebene *Abbildung* der Fläche F verlangt also, wie die von f

oder Φ, die Lösung einer Gleichung fünften Grades und vier quadratischer Gleichungen; um die Eigenschaften der Fläche kennen zu lernen, hat man ausserdem noch eine Gleichung zehnten Grades zu lösen.

Den 16 Geraden der Fläche f entsprechend, ergiebt sich für F:

Auf der Fläche F liegen 16 Kegelschnitte, welche mit der Raumcurve Q je fünf Punkte gemein haben. Die Combination dieser Kegelschnitte ist identisch mit der der 16 Geraden der Fläche f. Sie verhalten sich gleichmässig gegen die 10 Geraden von F, die sie nicht treffen. Die Flächen dritter Ordnung, welche durch die Curve Q und einen dieser Kegelschnitte gehen, schneiden aus F eine einfach unendliche Schaar rationaler Curven sechster Ordnung (die eine fünfpunktige Sehne besitzen) aus.

Ich gehe nun von einer ebenen Abbildung der Fläche Φ aus. Den ebenen Schnitten von Φ möge auf der Bildebene die Schaar der Curven dritter Ordnung entsprechen, welche sechs feste Punkte a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 und c gemein haben. Dabei sei das Bild des Kegelschnittes k der Fläche Φ eine Curve dritter Ordnung, welche c zum Doppelpunkte, die fünf Punkte a_i zu einfachen Punkten hat.

Den ebenen Schnitten der Fläche F entsprechen die Schnitte der Fläche Φ mit den Flächen ψ von der dritten Ordnung, welche durch k und die Raumcurve vierter Ordnung, erster Species q gehen, die Φ ausserhalb k in noch neun Punkten trifft, den Bildern der neun weiteren Geraden von F. Diesen Schnitten von Φ mit den ψ entsprechen auf der Bildebene Curven sechster Ordnung, welche die fünf Punkte a_i zu Doppelpunkten, den Punkt c zum einfachen Punkte haben und welche ebenfalls noch durch neun feste Punkte b_i der Ebene gehen müssen.

Daher sind die Bilder der *ebenen Schnitte* der Fläche F *Curven sechster Ordnung, welche fünf doppelte und zehn einfache Fundamentalpunkte besitzen.*

Damit diese Curven eine dreifach unendliche Schaar bilden, muss die Lage der Fundamentalpunkte noch einer Bedingung unterliegen. Nun weiss man, dass die den b_i entsprechenden neun Punkte von Φ ausgeschnitten werden von einer Raumcurve vierter Ordnung, erster Species, welche drei Punkte mit dem Kegelschnitt k gemein hat, oder sie sind der Schnitt von Φ mit zwei Hyperboloiden, welche durch drei feste Punkte von k gehen. Auf der Bildebene entspricht aber dem Kegelschnitt k eine Curve S von der dritten Ordnung, die c zum Doppelpunkt, die a_i zu einfachen Punkten hat. Man legt daher in dieser Ebene zwei Curven R von der sechsten Ordnung, welche die Punkte a_i und c zu Doppelpunkten haben und durch drei feste Punkte λ_1, λ_2, λ_3 der Curve S hindurchgehen. Diese beiden Curven R schnei-

den sich dann noch in neun Punkten b_i, welche man mit c als einfache Fundamentalpunkte der Abbildung von F annehmen kann.

Ausserdem ergiebt die Betrachtung der zerfallenden ebenen Schnitte der Fläche F, dass die 15 Punkte a_i, b_i, c auf einer Curve vierter Ordnung liegen, dass man ferner eine Curve fünfter Ordnung legen kann, welche drei der a_i zu Doppelpunkten hat und durch die beiden übrigen a_i, die b_i und c geht, und dass man endlich eine Curve sechster Ordnung legen kann, welche einen der Punkte a_i zum dreifachen Punkte, die übrigen a_i zu Doppelpunkten, die b_i und c zu einfachen Punkten hat.

Die Abbildung durch die Methode der eindeutigen Raumtransformationen liefert auf diese Weise direct die Schnittpunktsysteme, welche unter den Fundamentalpunkten der Abbildung im Allgemeinen auftreten werden. Um auch nachträglich einzusehen, dass das für die Abbildung der Fläche F angegebene Schnittpunktsystem eine dreifach unendliche Schaar von Curven giebt, gebrauche ich das Abel'sche Theorem (s. Clebsch, Crelle, Bd. 63), indem ich die vier endlichen Integrale einführe, welche sich auf eine der oben genannten Curven R beziehen.

Diese Curve R' von der sechsten Ordnung hat die fünf Punkte a_i und den Punkt c zu Doppelpunkten und ist vom Geschlecht $p = 4$. Die vier auf R' sich beziehenden endlichen Integrale seien, wenn die Coordinaten des Punktes u_i die obere Grenze derselben bilden, mit u_k^i $(k = 1, 2, 3, 4)$ bezeichnet; die Integrale in Bezug auf die beiden in a_i oder c vereinigt liegenden Punkte zusammen mit A_k^i oder C_k. Man habe dann für den Schnitt einer Curve r^{ter} Ordnung mit R':

$$\sum_{i=1}^{i=6r} u_k^i = r j_k \quad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Hieraus folgt für den Schnitt der Curve R' mit der oben bezeichneten Curve S, wenn man S noch durch einen beliebigen festen Punkt l von R' legt:

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{i=5} A_k^i + 2 C_k + l_k + \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_k^i = 3 j_k.$$

Die drei Punkte λ_i sind durch diese vier Gleichungen (1) bestimmt als Schnitt von R' mit einer Curve S von der dritten Ordnung, welche c zum Doppelpunkte, die a_i und den Punkt l zu einfachen Punkten hat.

Ferner folgt für den Schnitt von R' mit einer weiteren Curve R'' von der sechsten Ordnung, welche die a_i und c zu Doppelpunkten hat und durch die drei Punkte λ_i von R' geht:

$$(2) \qquad 2 \sum_{i=1}^{i=5} A_k^i + 2 C_k + \sum_{i=1}^{i=3} \lambda_k^i + \sum_{i=1}^{i=9} b_k^i = 6 j_k.$$

Die neun Punkte b_i sind die Punkte, in denen sich die beiden Curven

R' und R'' ausser den a_i, c und λ_i noch schneiden. Wenn man noch fünf der b_i willkürlich auf R' annimmt, bestimmen die vier Gleichungen (2) die vier übrigen b_i.

Die zu bestimmenden Curven sind die Curven R von der sechsten Ordnung, welche in den a_i Doppelpunkte besitzen und durch c und die b_i einfach gehen. Damit nun eine zweifach unendliche Schaar solcher Curven R, die mit R' nicht zusammenfallen, existirt, muss es möglich sein, diese Curven R noch durch zwei ganz beliebige Punkte v_i von R' zu legen, ohne dass R mit R' zusammenfällt; d. h. aus den vier Gleichungen, welche dann für den Schnitt von R und R' gelten:

$$(3) \qquad 2\sum_{i=1}^{i=5} A_k^i + C_k + \sum_{i=1}^{i=9} b_k^i + \sum_{i=1}^{i=2} v_k^i + \sum_{i=1}^{i=3} w_k^i = 6\, j_k,$$

müssen sich bei beliebigen Punkten v_1, v_2 drei Punkte w_1, w_2, w_3 eindeutig ergeben. Nun folgt aus (1), (2), (3):

$$(4) \qquad \sum_{i=1}^{i=5} A_k^i + C_k + l_k + \sum_{i=1}^{i=2} v_k^i + \sum_{i=1}^{i=3} w_k^i = 3\, j_k,$$

welche vier Gleichungen in der That eine eindeutige Lösung für die drei Punkte w_i zulassen. Die Punkte w_i sind nach (4) der Schnitt von R' mit einer Curve dritter Ordnung, welche durch die fünf Punkte a_i und die beiden Punkte c und l, sowie durch die beiden Punkte v_1, v_2 hindurchzulegen ist.

Durch eine Specialisirung der Lage der Punkte v_1, v_2 erhält man auch hier die oben angegebenen zerfallenden Curven der Schaar.

Die hier gefundene zweifach unendliche Schaar von Curven R giebt, mit R' verbunden, die dreifach unendliche Schaar von Curven, welche zur Abbildung dienen können.

Die Abbildung der Doppelcurve Q der Fläche F wird eine hyperelliptische Curve fünfzehnter Ordnung, $p = 11$, welche die a_i zu fünffachen, c und die b_i zu dreifachen, die drei Punkte λ_i von S zu einfachen Punkten hat.

§ 9.

Transformationen, welche sich nicht auf solche der dritten Ordnung zurückführen lassen.

Den Bedingungen des § 1., welchen die Transformationsflächen unterliegen, kann auf eine unendliche Mannigfaltigkeit von Arten genügt werden, von denen ich nur noch eine hervorheben will. Ich betrachte eine Schaar von Transformationsflächen n^{ter} Ordnung φ, die einen festen $(n-1)$ fachen Knotenpunkt P besitzen und von denen sich je zwei Flächen in einer beweglichen ebenen Curve n^{ter} Ordnung mit $(n-1)$ fachem Punkte P schneiden. Diese Flächen haben daher als feste Fundamentalcurve eine Curve von der $n(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung,

die als Schnitt einer Fläche φ mit einer Fläche Φ von der $(n-1)^{\text{ten}}$ Ordnung, welche den Punkt P zum $(n-2)$ fachen Knotenpunkt hat, erhalten wird. Die Gleichung der Flächenschaar ist somit von der Form:

$$\alpha\varphi + A\Phi = 0,$$

wo $A = 0$ die Gleichung einer durch P gehenden Ebene ist.

Diese Gleichungsform zeigt, dass die Flächenschaar eine dreifach unendliche ist. Ferner schneiden sich je drei der Flächen im Allgemeinen in nur einem beweglichen Punkte; denn eine solche Fläche wird von zwei anderen in zwei ebenen durch P gehenden Schnittcurven getroffen, und die Schnittlinie der Ebenen dieser beiden Curven trifft die Fläche ausser P in nur einem Punkte. Daher wird die Transformation eine eindeutige.

Um diese Transformation analytisch darzustellen, sei $y_1 = y_2 = y_3 = 0$ der Punkt P; mit $f_\mu(y)$ sei eine in y_1, y_2, y_3 homogene Function μ^{ter} Ordnung bezeichnet. Man hat dann:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= y_1 \Phi(y), \\ \varrho x_2 &= y_2 \Phi(y), \\ \varrho x_3 &= y_3 \Phi(y), \\ \varrho x_4 &= \varphi(y), \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= y_4 \Phi_{n-2}(y) + \Phi_{n-1}(y), \\ \varphi(y) &= y_4 \varphi_{n-1}(y) + \varphi_n(y). \end{aligned}$$

Die Umkehrung dieser Transformation ergiebt ein ähnliches System:

$$\begin{aligned} \sigma y_1 &= x_1 \Psi(x) \\ \sigma y_2 &= x_2 \Psi(x) \\ \sigma y_3 &= x_3 \Psi(x) \\ \sigma y_4 &= \psi(x), \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{aligned} \Psi(x) &= \varphi_{n-1}(x) - x_4 \Phi_{n-2}(x) \\ \psi(x) &= x_1 \Phi_{n-1}(x) - \varphi_n(x). \end{aligned}$$

Die Flächen des Raumes X haben den Punkt $P'(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ zum Doppelpunkte, die Curve $\Psi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ zur Fundamentalcurve.

Dabei entspricht dem Punkte P' die Fläche $\Phi(y) = 0$. Der Curve $\Psi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ entspricht der Kegel $2(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung, welchen man vom Punkte P aus über der Curve $\Phi(y) = 0$, $\varphi(y) = 0$ beschreiben kann und welcher die Gleichung hat:

$$\varphi_{n-1}(y)\,\Phi_{n-1}(y) - \varphi_n(y)\,\Phi_{n-2}(y) = 0;$$

und ebenso entspricht dem Punkte P die Fläche $\Psi(x) = 0$ und der

Curve $\Phi(y) = 0$, $\varphi(y) = 0$ der über $\Psi(x) = 0$, $\psi(x) = 0$ von P' aus beschriebene Kegel:

$$\varphi_{n-1}(x)\,\Phi_{n-1}(x) - \varphi_n(x)\,\Phi_{n-2}(x) = 0.$$

Ein schon betrachteter specieller Fall dieser Transformation ist der in § 3. behandelte. Dagegen ist diese Transformation für $n = 3$ gänzlich verschieden von der des § 2. und nur der besondere Fall für $n = 3$, in dem die Fläche $\varphi(y) = 0$ in ein Hyperboloid und eine Ebene, die beide durch P gehen, zerfallen, kann auf zwei successive Transformationen des § 2. zurückgeführt werden; auch habe ich von diesem Falle schon Math. Ann. Bd. 3, pag. 199 Gebrauch gemacht.

Mannheim, den 31. Dec. 1870.

Ueber die Entwickelung einer Function nach Quadraten und Produkten der Fourier-Bessel'schen Functionen.*)

Von Carl Neumann in Leipzig.

In meiner Schrift über die Bessel'schen Functionen **) ist neben den Bessel'schen *Transcendenten* $J^n(z)$ eine gewisse *neue Function* $O^n(z)$ in die Untersuchung eingeführt worden. Die Function $J^n(z)$ wird bekanntlich definirt durch die unendliche Reihe:

$$(1) \qquad J^n(z) = \frac{z^n}{2^n \Pi n}\left(1 - \frac{z^2}{2.2n+2} + \frac{z^4}{2.4.2n+2.2n+4} - \cdots\right),$$

wo $\Pi n = 1.2.3 \ldots n$, und $\Pi 0 = 1$ ist. Andererseits ist unter $O^n(z)$ eine ganze rationale Function von $\frac{1}{z}$ zu verstehen, welche, je nachdem n gerade oder ungerade ist, ihren Ausdruck findet durch eine der beiden (bei einem gewissen Gliede von selber abbrechenden) Formeln:

$$(2) \qquad O^n(z) = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{n^2}{z^2} + \frac{n^2(n^2-2^2)}{z^4} + \frac{n^2(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{z^6} + \cdots\right)$$

(gerades n),

$$O^n(z) = \frac{n}{z^2}\left(1 + \frac{n^2-1^2}{z^2} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{z^4} + \frac{(n^2-1^2)(n^2-3^2)(n^2-5^2)}{z^6} + \cdots\right)$$

(ungerades n).

Eine andere und einfachere Darstellungsart ergiebt sich (vgl. die citirte Schrift p. 15) für diese Functionen $O^n(z)$, wenn man die vorstehenden Ausdrücke in *umgekehrter* Weise (nach steigenden statt nach fallenden Potenzen von z) ordnet. Man findet alsdann für *jedes beliebige* n (gleichgültig, ob n gerade oder ungerade ist) die Formel:

$$(3) \qquad \varepsilon_n O^n(z) = \frac{2^n \Pi n}{z^{n+1}}\left(1 + \frac{z^2}{2.2n-2} + \frac{z^4}{2.4.2n-2.2n-4} + \cdots\cdots \text{fin.}\right)$$

wo unter ε_n eine Zahl zu verstehen ist, welche den Werth 1 hat für $n = 0$, den Werth 2 für $n > 0$. Indessen leidet diese Formel an der

*) Wiederholt aus den Berichten der Kgl. Sächsischen Gesellschaft d. Wiss. Jahrgang 1869, Seite 221.

**) Im Verlag von Teubner, Leipzig 1867.

Unbequemlichkeit, dass sie nicht von selber abbricht, des *Abbruchs aber bedarf* (was angedeutet sein soll durch das zugesetzte fin.). Die Function $O^n(z)$ ist nämlich, zufolge ihrer ursprünglichen Definition (2), eine *ganze rationale Function von* $\frac{1}{z}$, *welche verschwindet für* $\frac{1}{z} = 0$. Und die Glieder der Formel (3) sind nur so weit fortzusetzen, als es mit diesem Charakter der Function verträglich. Das *letzte* in die Parenthese jener Formel noch aufzunehmende Glied lautet daher, je nachdem n gerade oder ungerade ist, entweder

$$\frac{z^n}{2 \cdot 4 \ldots n \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 4 \ldots n} \quad \text{(gerades } n\text{)},$$

oder:

$$\frac{z^{n-1}}{2 \cdot 4 \ldots n-1 \cdot 2n - 2 \cdot 2n - 4 \ldots n+1} \quad \text{(ungerades } n\text{)},$$

Mit Bezug auf diese Functionen sind von mir*) folgende Sätze aufgestellt worden:

I. Satz. *Sind x, y complexe, der Bedingung mod $x <$ mod y unterworfene Variable, so kann der Bruch* $\frac{1}{y-x}$ *in folgende Reihe entwickelt werden:*

$$(4_a) \qquad \frac{1}{y-x} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n J^n(x)\, O^n(y).$$

Diese Entwickelung nämlich wird jederzeit gültig, d. i. convergent und gleichwerthig mit dem gegebenen Bruche sein, so lange mod $x <$ mod y bleibt.

II. Satz. *Repräsentirt R eine reelle Constante, und $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig und stetig ist, so lange mod $z < R$ bleibt, so wird jederzeit eine Entwickelung existiren:*

$$(4_b) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n J^n(z),$$

welche gültig ist für jeden der Bedingung mod $z < R$ entsprechenden Werth von z. — Die constanten Coefficienten α_n dieser Entwickelung finden ihre Bestimmung durch die Formel:

$$\alpha_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_{(r)} f(z)\, O^n(z)\, dz,$$

die Integration positiv hinerstreckt längs irgend einer Kreislinie, deren Mittelpunkt bei $z = 0$ liegt, und deren Radius r kleiner als R ist.

In diesen Sätzen ist unter ε_n eine Zahl zu verstehen, welche für $n = 0$ den Werth 1, hingegen für $n > 0$ den Werth 2 besitzt.

Vor einiger Zeit ist von Lommel**) die Vermuthung ausge-

*) l. c. pag. 32 und 34.

**) Studien über die Bessel'schen Functionen von Dr. E. Lommel. Verlag von Teubner. Leipzig 1868, Seite 50.

sprochen worden, dass für eine *gerade* Function $f(z)$ wohl auch eine Entwickelung nach den *Quadraten* der Bessel'schen Functionen möglich sein dürfte. Die so angeregte Frage gab Veranlassung zu der nachfolgenden Untersuchung, und wird durch diese Untersuchung dahin beantwortet werden, dass eine solche nach den Quadraten der Bessel'schen Functionen fortschreitende Entwickelung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varkappa_n [J^n(z)]^2$$

jederzeit existiren muss, falls nur die zu entwickelnde Function $f(z)$ innerhalb eines um den Punkt $z = 0$ beschriebenen Kreises den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit, und daneben der Bedingung $f(z) = f(-z)$ Genüge leistet. Zugleich auch wird die allgemeine Methode dargelegt werden, nach welcher bei einer derartigen Entwickelung die Coefficienten $\varkappa_n$ zu bestimmen sind.

§ 1.

Die Entwickelung einer geraden Potenz.

Ist von einer Function $f(z)$ bekannt, dass sie auf der z-Ebene allenthalben eindeutig und stetig ist, und ferner bekannt, dass sie längs irgend einer (beliebig kurzen) Linie verschwindet, so folgt daraus bekanntlich, dass sie auf der z-Ebene *allenthalben* verschwindet. Den eben genannten Voraussetzungen wird aber entsprochen, wenn man für $f(z)$ folgenden Ausdruck nimmt:

$$f(z) = [J^n(z)]^2 - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} J^{2n}(2z\sin\omega)\,d\omega.$$

Denn dass diese Function auf der z-Ebene allenthalben eindeutig und stetig ist, folgt aus den Eigenschaften der Bessel'schen Transcendenten; und andererseits ist bekannt (vgl. meine schon citirte Schrift, S. 70), dass sie verschwindet für *reelle* Werthe von z, also verschwindet *längs der reellen Achse*. Somit ergiebt sich, dass diese Function auf der z-Ebene *allenthalben* verschwindet. Also:

III. Satz. *Für jeden beliebigen Werth der complexen Variablen z findet die Formel statt:*

$$[J^n(z)]^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} J^{2n}(2z\sin\omega)\,d\omega. \tag{5}$$

Dabei ist indessen vorausgesetzt, dass n eine ganze Zahl ist.

Unter Anwendung dieses Satzes wird es nun leicht sein, jede der Potenzen

$$z^0,\ z^2,\ z^4,\ \ldots\ z^{2\nu},\ \ldots\ldots$$

nach den Quadraten der Bessel'schen Functionen zu entwickeln. Wir setzen zuvörderst:

$$z^{2p} = C \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (2z \sin\omega)^{2p} \, d\omega, \tag{6}$$

und erhalten alsdann zur Bestimmung der Constanten C die Gleichung

$$1 = C \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (2 \sin\omega)^{2p} \, d\omega,$$

und hieraus durch Ausführung der Integration:

$$1 = C \cdot \frac{\Pi 2p}{\Pi p \,.\, \Pi p},$$

mithin:

$$C = \frac{\Pi p \,.\, \Pi p}{\Pi 2p},$$

wo (wie schon früher) $\Pi n = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots n$, und $\Pi 0 = 1$ sein soll. Somit geht die Formel (6) über in:

$$z^{2p} = \frac{\Pi p \,.\, \Pi p}{\Pi 2p} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (2z \sin\omega)^{2p} \, d\omega. \tag{7}$$

Versteht man unter ζ eine complexe Variable, so wird ζ^{2p} eine Function von ζ sein, welche auf der ζ-Ebene, mit Ausnahme der unendlich fernen Punkte, überall eindeutig und stetig ist, und welche also, zufolge eines bereits erwähnten Satzes (4_b), für jeden endlichen Werth von ζ darstellbar ist durch eine nach den Bessel'schen Functionen fortschreitende Entwickelung:

$$\zeta^{2p} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_n J^n(\zeta).$$

Addirt man die beiden Formeln, welche bei Anwendung dieser Entwickelung für $(+\zeta)^{2p}$ und $(-\zeta)^{2p}$ sich ergeben, und beachtet man, dass die Bessel'sche Function $J^n(\zeta)$ gerade oder ungerade ist, je nachdem ihr n gerade oder ungerade, so ergiebt sich:

$$\zeta^{2p} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_{2n} J^{2n}(\zeta). \tag{8}$$

Diese Entwickelung ist gültig für jeden endlichen Werth von ζ. Sie kann daher sofort in Anwendung gebracht werden auf den Werth $\zeta = 2z \sin\omega$, und liefert alsdann:

$$(2z \sin\omega)^{2p} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_{2n} J^{2n}(2z \sin\omega).$$

Hierdurch aber gewinnt die Formel (7) folgende Gestalt:

$$z^{2p} = \frac{\Pi p \,.\, \Pi p}{\Pi 2p} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_{2n} J^{2n}(2z \sin\omega) \right\} d\omega,$$

also mit Rücksicht auf (5) folgende:

$$(9) \qquad z^{2p} = \frac{\Pi p \,.\, \Pi p}{\Pi 2p} \sum_{n=0}^{n=\infty} \alpha_{2n} [J^n(z)]^2.$$

Aus (8) und (9) ergiebt sich daher folgendes Resultat:

IV. Satz. *Versteht man unter p eine der Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots \infty$, so kann die Potenz z^{2p} in eine nach den Quadraten der Bessel'schen Functionen fortschreitende Reihe entwickelt werden, welche gültig bleibt für jeden endlichen Werth von z.*

Bezeichnet man die Entwickelung der Potenz z^{2p} nach den Bessel'schen Functionen selber mit

$$z^{2p} = \alpha_0 J^0(z) + \alpha_2 J^2(z) + \alpha_4 J^4(z) + \cdots\cdots$$

so wird ihre nach den Quadraten der Bessel'schen Functionen fortlaufende Entwickelung folgendermassen lauten:

$$(10) \quad z^{2p} = \frac{\Pi p \,.\, \Pi p}{\Pi 2p} \left(\alpha_0 [J^0(z)]^2 + \alpha_2 [J^1(z)]^2 + \alpha_4 [J^2(z)]^2 + \cdots\cdots\right).$$

Die Coefficienten der letzteren Entwickelung sind also proportional mit denen der ersteren, nämlich von diesen nur verschieden durch den gemeinschaftlichen Factor $\frac{\Pi p \,.\, \Pi p}{\Pi 2p}$.

Die Entwickelungen von $z^0, z^2, z^4, z^6, \ldots$ nach den Bessel'schen Transcendenten wurden bekanntlich schon von Schlömilch aufgestellt. Sie lauten (vgl. meine Schrift über die Bessel'schen Functionen Seite 39) folgendermassen:

$$\begin{aligned}
1 &= J^0(z) + 2\Sigma J^{2q}(z), \\
z^2 &= \quad 2\Sigma 4q^2 J^{2q}(z), \\
(10_a) \quad z^4 &= \quad 2\Sigma 4q^2 (4q^2 - 2^2) J^{2q}(z), \\
z^6 &= \quad 2\Sigma 4q^2 (4q^2 - 2^2)(4q^2 - 4^2) J^{2q}(z), \\
z^8 &= \quad 2\Sigma 4q^2 (4q^2 - 2^2)(4q^2 - 4^2)(4q^2 - 6^2) J^{2q}(z), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

wo die Summationen Σ hinzuerstrecken sind über die Zahlen $q = 1, 2, 3, 4, \ldots \infty$. Hieraus nun ergeben sich, mit Hülfe des eben erhaltenen Satzes, augenblicklich die Entwickelungen dieser Potenzen nach den *Quadraten* der Bessel'schen Functionen. Man findet:

$$\begin{aligned}
1 &= [J^0(z)]^2 + 2\Sigma [J^q(z)]^2, \\
z^2 &= \quad \tfrac{1}{2} \cdot 2\Sigma 4q^2 [J^q(z)]^2, \\
(10_b) \quad z^4 &= \quad \tfrac{1.2}{3.4} \cdot 2\Sigma 4q^2 (4q^2 - 2^2) [J^q(z)]^2, \\
z^6 &= \quad \tfrac{1.2.3}{4.5.6} \cdot 2\Sigma 4q^2 (4q^2 - 2^2)(4q^2 - 4^2) [J^q(z)]^2, \\
z^8 &= \quad \tfrac{1.2.3.4}{5.6.7.8} \cdot 2\Sigma 4q^2 (4q^2 - 2^2)(4q^2 - 4^2)(4q^2 - 6^2) [J^q(z)]^2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

wo wiederum $q = 1, 2, 3, 4, \ldots \infty$ diejenigen Zahlen sind, über welche die Summationen Σ hinzuerstrecken sind. Alle diese Entwickelungen $(10^{a,b})$ sind gültig für jeden endlichen Werth von z, gültig für sämmtliche Punkte der z-Ebene.

Eine Function $f(z)$, welche innerhalb eines um den Punkt $z = 0$ beschriebenen Kreises eindeutig, stetig und gerade bleibt, ist bekanntlich innerhalb dieses Kreises darstellbar durch eine nach den geraden Potenzen von z fortschreitende Reihe. Zufolge des Satzes (10) wird nun jedes Glied dieser Reihe entwickelbar sein nach den $[J^n(z)]^2$; und in solcher Weise wird sich für die Function $f(z)$ eine ebenfalls nach der $[J^n(z)]^2$ fortschreitende Reihe ergeben. Im folgenden Paragraphen werden wir das Gebiet festzustellen suchen, innerhalb dessen eine solche Reihenentwickelung *gültig*, d. i. convergent und gleichwerthig mit $f(z)$ ist.

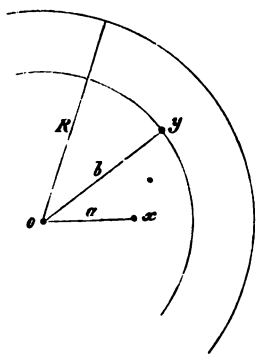
§ 2.

Die Entwickelung einer geraden Function.

Auf der z-Ebene sei ein Kreis beschrieben um den Punkt 0 (d. i. $z = 0$), mit dem Radius R; und $f(z)$ sei eine gegebene Function, welche für alle der Bedingung

$$\text{mod } z < R \tag{11}$$

entsprechenden Werthe von z *eindeutig, stetig und gerade* ist. Das Verhalten der Function in den *Randpunkten* der Kreisfläche (R), d. i. für mod $z = R$ wird also als unbekannt betrachtet.



Unter den unendlich vielen der Bedingung (11) genügenden Punkten z werde irgend ein *bestimmter* Punkt ausgewählt. Dieser mag mit x und sein Abstand vom Mittelpunkte mit a bezeichnet werden. Ferner mag *dem Punkte x entsprechend* ein Hülfskreis construirt werden, der concentrisch ist mit dem gegebenen Kreise und *dessen Radius b an den Punkt x gebunden ist durch die Relation:*

$$b = \frac{R + \text{mod } x}{2} = \frac{R + a}{2}. \tag{12}$$

Die auf der Peripherie des Hülfskreises befindlichen Punkte mögen mit y bezeichnet werden; und diesen Bezeichnungen entsprechend mag gesetzt werden:

$$\begin{aligned} x &= a e^{i\alpha} = a \cos\alpha + i a \sin\alpha, \\ y &= b e^{i\beta} = b \cos\beta + i b \sin\beta. \end{aligned} \tag{13}$$

Zufolge eines bekannten Cauchy'schen Theorems kann der Werth der gegebenen Function f in dem betrachteten Punkte x dargestellt werden durch das Integral*)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(b)} \frac{f(y)\,dy}{y-x},$$

die Integration positiv hinerstreckt längs der Peripherie des Hülfskreises (b). Da $a < b$, d. i. mod $x <$ mod y, mithin

$$\frac{1}{y-x} = \frac{1}{y} + \frac{x}{y^2} + \frac{x^2}{y^3} + \cdots\cdots$$

ist, so kann die Formel (14) so dargestellt werden:

$$(15) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(b)} \left(\frac{f(y)}{y} + \frac{x f(y)}{y^2} + \frac{x^2 f(y)}{y^3} + \cdots\right) dy.$$

Die Function f ist innerhalb des gegebenen Kreises *gerade*; daher hat $f(y)$ an je zwei diametral entgegengesetzten Stellen der Kreislinie (b) einerlei Werth; folglich wird das längs jener Kreislinie (b) hinerstreckte Integral:

$$\int_{(b)} \frac{f(y)\,dy}{y^n}$$

für jedes *gerade* n verschwinden. Auf der rechten Seite der Formel (15) werden daher alle diejenigen Glieder verschwinden, deren Nenner mit *geraden* Potenzen von y behaftet sind. Somit ergiebt sich:

$$(16) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(b)} \left(\frac{f(y)}{y} + \frac{x^2 f(y)}{y^3} + \frac{x^4 f(y)}{y^5} + \cdots\right) dy,$$

oder, was dasselbe ist:

$$(17) \qquad f(x) = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + \cdots, \qquad C_{2p} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(b)} \frac{f(y)\,dy}{y^{2p+1}}.$$

Diese Reihe (16) oder (17) wird also für den betrachteten Punkt x *gültig*, d. i. *convergent und gleichwerthig mit* $f(x)$ *sein.*

Wir gehen über zur Untersuchung der dieser Reihe zugehörigen Modulreihe. Zufolge (17) ist:

$$C_{2p}\,x^{2p} = \frac{x^{2p}}{2\pi i}\int_{(b)} \frac{f(y)\,dy}{y^{2p+1}},$$

oder, wenn für x, y die Werthe (13) substituirt werden:

*) Die über die gegebene Function $f(z)$ zu Grunde gelegten Voraussetzungen beschränken sich durchweg auf diejenigen Punkte z, für welche mod $z < R$ ist. Die Beschaffenheit derjenigen Werthe, welche $f(z)$ für mod $z = R$ besitzt, ist also völlig unbekannt. Eine Verlegung der in (14) vorhandenen Integrationscurve von der Peripherie des Hülfskreises (b) zur Peripherie des gegebenen Kreises (R) würde daher *unzulässig* sein.

$$C_{2p}\,x^{2p} = \frac{a^{2p}}{2\pi\,.\,b^{2p}}\,e^{2pi\alpha}\int_{(b)} f(y)\,e^{-2pi\beta}\,d\beta\,,$$

Da der Modul von $e^{2pi\alpha}$ den Werth 1 besitzt, so ergiebt sich hieraus sofort:

$$\mathrm{mod}\,(C_{2p}\,x^{2p}) = \frac{a^{2p}}{2\pi\,.\,b^{2p}}\cdot\mathrm{mod}\left(\int_{(b)} f(y)\,e^{-2pi\beta}\,d\beta\right).$$

Mit Hülfe des bekannten Satzes, dass der Modul einer Summe kleiner ist als die Summe der Moduln:

$$\mathrm{mod}\,(u+v+w+\cdots) < \mathrm{mod}\,u + \mathrm{mod}\,v + \mathrm{mod}\,w + \cdots,$$

ergiebt sich nun weiter:

$$\mathrm{mod}\,(C_{2p}\,x^{2p}) < \frac{a^{2p}}{2\pi b^{2p}}\int_{(b)} \mathrm{mod}\left(f(y)\,.\,e^{-2pi\beta}\right)d\beta\,,$$

oder, weil der Modul von $e^{-2pi\beta}$ den Werth 1 hat:

$$\mathrm{mod}\,(C_{2p}\,x^{2p}) < \frac{a^{2p}}{2\pi b^{2p}}\int_{(b)} \mathrm{mod}\,f(y)\,.\,d\beta.$$

Versteht man nun unter B eine gewisse, dem Hülfskreise (b) zugehörige Constante, nämlich den grössten Werth, welchen $\mathrm{mod}\,f(y)$ längs der Peripherie dieses Kreises besitzt, so wird die rechte Seite der vorstehenden Formel, wenn man $\mathrm{mod}\,f(y)$ durch jene Constante B ersetzt, noch weiter vergrössert werden. Um so mehr also wird:

$$\mathrm{mod}\,(C_{2p}\,x^{2p}) < \frac{a^{2p}}{2\pi b^{2p}}\int_{(b)} B\,d\beta,$$

oder, weil $\int_{(b)} B\,d\beta = 2\pi B$ ist:

$$\mathrm{mod}\,(C_{2p}\,x^{2p}) < B\left(\frac{a}{b}\right)^{2p}.$$

Somit erhalten wir für $p = 0, 1, 2, \ldots$ die Formeln:

$$\mathrm{mod}\,(C_0) < B,$$
$$\mathrm{mod}\,(C_2x^2) < B\left(\frac{a}{b}\right)^2,$$
$$\mathrm{mod}\,(C_4x^4) < B\left(\frac{a}{b}\right)^4,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Hieraus aber ergiebt sich (weil zufolge der Construction des Hülfskreises $a < b$ ist) augenblicklich, dass die der Reihe (17) zugehörige Modulreihe:

(18) $\quad \mathrm{mod}\,(C_0) + \mathrm{mod}\,(C_2x^2) + \mathrm{mod}\,(C_4x^4) + \cdots\cdots$

convergent ist.

Da der Punkt x ein *beliebiger* war unter den unendlich vielen der Bedingung $\mathrm{mod}\,z < R$ entsprechenden Punkten z, so werden die in

Betreff der Reihen (17) und (18) erhaltenen Resultate gültig sein für alle jene Punkte. Sind x, x' irgend zwei von jenen Punkten, und (b), (b') die denselben zugehörigen Hülfskreise, so ergeben sich auf dem hier eingeschlagenen Wege für $f(x)$ und $f(x')$ Entwickelungen, deren Coefficienten scheinbar von einander *verschieden* sind. Denn nach (17) erhalten wir:

$$f(x) = C_0 + C_2 x^2 + C_4 x^4 + \cdots, \qquad C_{2p} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(b)} \frac{f(y)\,dy}{y^{2p+1}},$$

und andererseits:

$$f(x') = C_0' + C_2' x'^2 + C_4' x'^4 + \cdots, \qquad C_{2p}' = \frac{1}{2\pi i}\int_{(b')} \frac{f(y')\,dy'}{y'^{2p+1}}.$$

Aus den über die gegebene Function $f(z)$ gemachten Voraussetzungen ergiebt sich aber leicht, dass der Werth des Integrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,dz}{z^{2p+1}}$$

ein und derselbe ist, gleichgültig, ob man die Integration über die Peripherie von (b), oder über die von (b'), oder auch über die Peripherie irgend eines anderen um den Punkt $z = 0$ beschriebenen Kreises, dessen Radius kleiner als R ist, hinlaufen lässt.

Die gegebene Function $f(z)$ ist also darstellbar durch eine mit gewissen constanten Coefficienten C behaftete Reihenentwickelung:

$$f(z) = \sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p} z^{2p}, \tag{19}$$

welche gültig [*d. i. convergent und gleichwerthig mit $f(z)$*] *ist für jeden der Bedingung* $\operatorname{mod} z < R$ *entsprechenden Werth von z. Und die dieser Reihe zugehörige Modulreihe*

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \operatorname{mod}(C_{2p} z^{2p}) \tag{20}$$

ist für jedes der genannten Bedingung entsprechende z ebenfalls convergent.

Wir werden durchweg festhalten an der Voraussetzung:

$$\operatorname{mod} z < R. \tag{21}$$

Wie klein die Differenz zwischen $\operatorname{mod} z$ und R aber auch sein mag, immer wird sich eine positive reelle Grösse ε angeben lassen von solcher Kleinheit, dass der mit $\sqrt{1+\varepsilon}$ multiplicirte $\operatorname{mod} z$ ebenfalls noch kleiner als R ist, also eine Grösse ε, welche der Bedingung genügt:

$$\operatorname{mod}(z\sqrt{1+\varepsilon}) < R. \tag{22}$$

Denkt man sich aber das ε in solcher Weise gewählt, so wird die Reihe (20) convergent bleiben, wenn man in ihr z mit $z\sqrt{1+\varepsilon}$ vertauscht. Mit anderen Worten: Die Reihe

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \text{mod } \{C_{2p}(z\sqrt{1+\varepsilon})^{2p}\}$$

wird *convergent* sein zufolge der über z und ε gemachten Voraussetzungen (21) und (22). Auch liegt zu Tage, dass die Glieder dieser Reihe durchweg reell und positiv sind. Multiplicirt man aber die Glieder einer derartigen Reihe mit irgend welchen positiven reellen Grössen, welche nicht ins Unendliche anwachsen, so wird bekanntlich die so entstehende neue Reihe wiederum convergent sein. Demzufolge wird die Reihe:

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \lambda_{2p} \cdot \text{mod } \{C_{2p}(z\sqrt{1+\varepsilon})^{2p}\},$$

d. i.:

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \text{mod } \{\lambda_{2p} C_{2p}(z\sqrt{1+\varepsilon})^{2p}\} \tag{23}$$

convergent sein, sobald man unter

$$\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4, \ldots \lambda_{2p}, \ldots$$

eine Reihe positiver reeller Grössen versteht, welche durchweg endlich bleiben.

Dieser Anforderung wird entsprochen, wenn man jene Grössen durch die Formel bestimmt:

$$\lambda_{2p} = \frac{2^{2p} \cdot \Pi p \cdot \Pi p}{(1+\varepsilon)^p \cdot \Pi 2p}, \tag{24}$$

d. i. durch die Formeln:

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_{2p} = \frac{(2.4.6 \ldots 2p)^2}{1.2.3 \ldots 2p} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon)^p} = \frac{2.4.6 \ldots 2p}{1.3.5 \ldots 2p-1} \cdot \frac{1}{(1+\varepsilon)^p},$$

oder, was dasselbe ist, durch die Formeln:

$$\lambda_0 = 1, \qquad \lambda_{2p} = \frac{1+\frac{1}{1}}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1+\frac{1}{3}}{1+\varepsilon} \cdot \frac{1+\frac{1}{5}}{1+\varepsilon} \cdot \ldots \cdot \frac{1+\frac{1}{2p-1}}{1+\varepsilon}.$$

Alsdann nämlich wird:

$$\begin{aligned}
\lambda_0 &= 1, \\
\lambda_2 &= \mu_1, \\
\lambda_4 &= \mu_1 \cdot \mu_3, \\
\lambda_6 &= \mu_1 \cdot \mu_3 \cdot \mu_5, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
\lambda_{2p} &= \mu_1 \cdot \mu_3 \cdot \mu_5 \cdots \mu_{2p-1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \qquad \text{wo:} \quad \mu_{2n-1} = \frac{1+\frac{1}{2n-1}}{1+\varepsilon}.$$

Dabei soll unter ε die früher [bei (22)] eingeführte Grösse verstanden werden.

Denkt man sich nämlich eine Zahl p gewählt von solcher Höhe, dass der Bruch $\frac{1}{2p-1}$ *noch kleiner* als jenes ε ist, so wird die Reihe

$$\mu_1, \mu_3, \mu_5, \ldots \mu_{2p-1}, \ldots$$

zu Anfang aus *unächten*, aber von μ_{2p-1} ab aus lauter *ächten* Brüchen bestehen. Und demgemäss werden die Grössen

$$\lambda_0, \lambda_2, \lambda_4, \ldots \lambda_{2p}, \ldots$$

zu Anfang *wachsen*, aber von λ_{2p} *fortwährend abnehmen*; sie werden daher *durchweg endlich* bleiben. Die bei Einsetzung dieser Grössen λ_{2p} (24) in die Formel (23) entstehende Reihe

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \mod \left\{ \frac{2^{2p} \cdot \Pi p \cdot \Pi p}{(1+\varepsilon)^p \cdot \Pi 2p} C_{2p} \left(z \sqrt{1+\varepsilon}\right)^{2p} \right\}$$

wird also *convergent* sein. Diese Reihe kann, weil $(1+\varepsilon)^p$ gegen $\left(\sqrt{1+\varepsilon}\right)^{2p}$ sich forthebt, einfacher so dargestellt werden:

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \mod \left\{ \frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p} C_{2p} (2z)^{2p} \right\}.$$

Aus ihrer Convergenz aber folgt sofort, dass die Reihe

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p} C_{2p} (2z)^{2p} \tag{25}$$

ebenfalls convergent ist. Denn es ist ein bekannter Satz, dass eine gegebene Reihe jederzeit convergiren muss, wenn feststeht, dass die ihr entsprechende Modulreihe convergirt. — Da das ε in der Reihe (25) nicht mehr enthalten ist, so bestehen die zum Beweise ihrer Convergenz erforderlich gewesenen Voraussetzungen, abgesehen von der früher festgestellten Bedeutung der Coefficienten C_{2p}, lediglich darin, dass mod $z < R$ ist, oder (was dasselbe ist) darin, dass mod $(2z) < 2R$ ist. Setzt man also ζ an Stelle von $2z$, so ergiebt sich, im Anschluss an die früher in (19) und (20) notirten Ergebnisse, folgendes Resultat:

Ist ζ eine complexe, der Bedingung mod $\zeta < 2R$ *unterworfene Variable, so wird die Reihe*

$$\sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p} C_{2p} \zeta^{2p} \tag{26}$$

convergent, ihr Werth also eine stetige Function von ζ sein. — Diese Function mag hinfort mit $\Phi(\zeta)$ bezeichnet werden. Aus ihrer Definition durch die vorstehende Reihe erkennt man übrigens sofort, dass sie nicht nur stetig, sondern auch eindeutig und gerade ist.

Aus den eben genannten Eigenschaften der Function

$$\Phi(\zeta) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p} C_{2p} \zeta^{2p} \tag{27_a}$$

ergiebt sich nun [unter Anwendung eines früher in (4_b) erwähnten Satzes] sofort, dass sie darstellbar ist durch eine nach den Bessel'schen Functionen fortschreitende Reihe:

$$\Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_n J^n(\zeta),$$

und dass diese Reihe *gültig* ist für sämmtliche der Bedingung mod $\zeta < 2R$ entsprechenden Werthe von ζ. Bildet man die zuletzt hingestellte Formel successive für $\Phi(+\zeta)$ und $\Phi(-\zeta)$, und beachtet man, dass die Function Φ gerade ist und dass andererseits die Function J^n gerade oder ungerade ist, je nachdem ihr n gerade oder ungerade, so ergiebt sich durch Addition dieser beiden Formeln sofort:

$$(27_b) \qquad \Phi(\zeta) = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_{2n} J^{2n}(\zeta).$$

Der für ζ genannten Bedingung

$$\text{mod}\, \zeta < 2R$$

wird offenbar Genüge geschehen, wenn man $\zeta = 2z \sin\omega$ macht, vorausgesetzt, dass man unter ω einen *reellen* Winkel, andrerseits unter z die früher betrachtete, der Bedingung

$$\text{mod}\, z < R$$

unterworfene complexe Variable versteht. Somit ergeben sich aus $(27_a, {}_b)$ die Formeln:

$$(28_a) \qquad \Phi(2z \sin\omega) = \sum_{p=0}^{p=\infty} \frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p} C_{2p} (2z \sin\omega)^{2p}$$

$$(28_b) \qquad \Phi(2z \sin\omega) = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_{2n} J^{2n}(2z \sin\omega),$$

gültig für jedes reelle ω und für jedes der Bedingung mod $z < R$ entsprechende z. Hieraus ergeben sich, wenn man mit $d\omega$ multiplicirt, und nach ω zwischen den Grenzen $0 \ldots \pi$ integrirt, die weiteren Formeln:

$$(29_a) \qquad \int_0^\pi \Phi(2z \sin\omega)\, d\omega = \sum_{p=0}^{p=\infty} \left\{ \frac{\Pi p \cdot \Pi p}{\Pi 2p} C_{2p} z^{2p} \int_0^\pi (2 \sin\omega)^{2p}\, d\omega \right\},$$

$$(29_b) \qquad \int_0^\pi \Phi(2z \sin\omega)\, d\omega = \sum_{p=0}^{p=\infty} \left\{ K_{2n} \int_0^\pi J^{2n}(2z \sin\omega)\, d\omega \right\},$$

wiederum gültig für jedes der Bedingung mod $z < R$ entsprechende z.

Beachtet man nun, dass

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi (2 \sin\omega)^{2p}\, d\omega = \frac{\Pi 2p}{\Pi p \cdot \Pi p},$$

und ferner, dass nach einem schon früher benutzten Satz (5)

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi J^{2n}(2z \sin\omega)\, d\omega = [J^n(z)]^2$$

ist, so nehmen die Formeln $(29_a, {}_b)$ folgende Gestalt an:

$$(30_a) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(2z \sin \omega)\, d\omega = \sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p} z^{2p},$$

$$(30_b) \qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(2z \sin \omega)\, d\omega = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_{2n} [J^n(z)]^2 .$$

Hieraus folgt sofort die Gleichung:

$$(31) \qquad \sum_{p=0}^{p=\infty} C_{2p} z^{2p} = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_{2n} [J^n(z)]^2,$$

und zwar die Gültigkeit derselben für jedes der Bedingung mod $z < R$ Genüge leistende z. Diese Gleichung aber endlich gewinnt bei Rückblick auf (19) folgende Gestalt:

$$(32) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} K_{2n} [J^n(z)]^2.$$

Bezeichnen wir schliesslich die Constanten K_0, K_2, K_4, ... K_{2n}, ... einfacher mit $\varkappa_0$, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, ... $\varkappa_n$, ..., so können wir das durch die Formel (32) erhaltene Resultat folgendermassen ausdrücken:

V. Satz. *Repräsentirt R eine reelle Constante, und $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig, stetig und gerade ist, so lange mod $z < R$ bleibt, so wird jederzeit eine Entwicklung existiren:*

$$(33) \qquad f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varkappa_n [J^n(z)]^2,$$

welche gültig ist für alle der Bedingung mod $z < R$ entsprechenden Werthe von z.

Um eine allgemeine Methode zur Bestimmung der *constanten Coefficienten* $\varkappa$ zu erhalten, werden zunächst einige vorbereitende Untersuchungen erforderlich sein.

§ 3.

Die Darstellung gerader Functionen durch ein gewisses Integral.

Auf der z-Ebene sei um den Punkt $z = 0$ ein Kreis beschrieben mit dem Radius R. Ferner sei $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig und stetig ist, solange

$$\text{mod } z < R$$

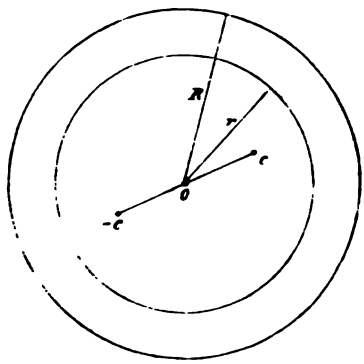
bleibt. Das Verhalten der Function in den *Rand*punkten der Kreisfläche, d. i. für mod $z = R$, wird also als unbekannt betrachtet.

Ferner sei $z = c$ ein beliebig gewählter fester Punkt innerhalb der Kreisfläche (R), genauer ausgedrückt ein Punkt, welcher der Bedingung Genüge leistet:

$$\text{mod } c < R.$$

Diesem Punkte c entsprechend construiren wir eine zweite Kreisfläche, die mit der gegebenen concentrisch ist, und deren Radius r der Bedingung unterworfen sein soll:

$$\text{mod } c < r < R.$$



Die gegebene Function $f(z)$ wird alsdann eindeutig und stetig sein in *sämmtlichen* zur Kreisfläche (r) gehörigen Punkten. Zugleich wird der feste Punkt c innerhalb dieser Fläche sich befinden, und von ihrem Rande durch irgend welchen (wenn auch beliebig kleinen) Zwischenraum getrennt sein. Nach einem bekannten Cauchy'schen Satz wird sich daher der Werth der gegebenen Function f im Puncte c folgendermassen darstellen lassen:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}^{\cdot}\frac{f(z)\,dz}{z-c}.$$

Die Integration positiv erstreckt über die Peripherie der Kreisfläche (r). Eine Formel, die mit dieser in Bezug auf den Punkt c aufgestellten analog ist, muss offenbar auch gelten für jeden andern innerhalb der Kreisfläche (r), nicht hart am Rande derselben befindlichen Punkt, muss also z. B. auch gelten für den Punkt $-c$. In der That wird:

$$f(-c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}^{\cdot}\frac{f(z)\,dz}{z+c}.$$

Durch Addition dieser beiden Formeln folgt:

$$\frac{f(c)+f(-c)}{2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}^{\cdot}\frac{f(z)\,z\,dz}{z^2-c^2}. \tag{34}$$

Lässt man nun zu den über die Function f gemachten Voraussetzungen noch *die* hinzutreten, dass f eine *gerade* Function ist, so wird $f(c)=f(-c)$, folglich die linke Seite der eben erhaltenen Formel identisch mit $f(c)$. Somit ergiebt sich der Satz:

VI. Satz. *Repräsentirt R eine reelle Constante, und repräsentirt $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange mod $z < R$ bleibt, so wird der Werth dieser Function für jedes der Bedingung mod $c < R$ entsprechende Argument c dargestellt werden können durch folgendes Integral:*

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)}^{\cdot}\frac{f(z)\cdot z\,dz}{z^2-c^2}, \tag{35}$$

die Integration positiv hinerstreckt um irgend eine Kreisperipherie, deren Mittelpunkt in $z = 0$ liegt, und deren Radius r der Bedingung Genüge leistet mod $c < r < R$.

Es mag noch bemerkt werden, dass man zu der Formel (34) auch durch eine Untersuchung gelangen kann, welche ausgeht von der Betrachtung des Integrales

$$\int \frac{F(z) \cdot dz}{z^2 - c^2}.$$

Wählt man ferner an Stelle dieses Integrales das allgemeinere Integral

$$\int \frac{F(z)\, dz}{z^n - c^n},$$

so erhält man an Stelle der Formel (34) eine allgemeinere Formel, welche sich auf die n Eckpunkte eines regulären Polygones bezieht, und das arithmetische Mittel derjenigen n Werthe angiebt, welche eine gegebene Function in diesen n Punkten besitzt.

Was nun den eben erhaltenen Satz (35) anbelangt, so wird unsere Aufgabe, eine gerade Function nach den Quadraten der Bessel'schen Functionen zu entwickeln, durch diesen Satz reducirt auf die Auffindung einer derartigen Entwickelung für den Bruch $\frac{1}{z^2 - c^2}$. Und diese letzte Aufgabe wird den Gegenstand des folgenden Paragraphen ausmachen.

§ 4.

Die Entwickelung des Ausdruckes $(y^2 - x^2)^{-2}$.

Es seien x und y zwei beliebige complexe Grössen; und zwar mag y als *fest*, hingegen x als *veränderlich* betrachtet werden. Der Ausdruck

$$\frac{1}{y^2 - x^2} \tag{36}$$

repräsentirt alsdann eine Function von x, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange x der Bedingung

$$\text{mod } x < \text{mod } y \tag{37}$$

unterworfen bleibt, und für welche also [zufolge des Satzes (33)] eine Entwickelung existiren muss:

$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varkappa_n [J^n(x)]^2, \tag{38}$$

die gültig ist für jedes beliebige der Bedingung (37) *entsprechende* x. Offenbar werden die Coefficienten $\varkappa_n$ dieser Entwicklung abhängig sein von y; sie mögen demgemäss bezeichnet werden durch $\varepsilon_n \Omega^n(y)$, wo unter ε_n [ebenso wie früher in (3)] eine Zahl verstanden werden soll, welche für $n = 0$ den Werth 1, für $n > 0$ den Werth 2 besitzt. Bei

Anwendung dieser Bezeichnung nimmt die Entwicklung (38) folgende Gestalt an:

$$(39_a) \qquad \frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \Omega^n(y)[J^n(x)]^2,$$

oder (was dasselbe ist) folgende Gestalt:

$$(39_b) \qquad \frac{1}{y^2 - x^2} = \Omega^0(y)[J^0(x)]^2 + 2\sum_{q=1}^{q=\infty} \Omega^q(y)[J^q(x)]^2,$$

Nachdem in solcher Weise die *Existenz und Gültigkeit* der Entwicklung (38) oder $(39_{a,b})$ für irgend zwei der Bedingung (37) entsprechende Grössen x, y constatirt ist, handelt es sich nunmehr um die Untersuchung und Bestimmung der in dieser Entwicklung auftretenden unbekannten Functionen $\Omega^n(y)$.

Wir bemerken zuvörderst, dass in Folge der festgesetzten Bedingung (37) die Gleichung stattfindet:

$$(40) \qquad \frac{1}{y^2 - x^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{x^2}{y^4} + \frac{x^4}{y^6} + \frac{x^6}{y^8} + \cdots\cdots,$$

und ferner, dass [zufolge (10_b)] für x^0, x^2, x^4, x^6, ... folgende Entwicklungen benutzt werden können:

$$\begin{aligned}
1 &= [J^0(x)]^2 + 2\sum_{q=1}^{q=\infty} [J^q(x)]^2, \\
x^2 &= \frac{1}{2} 2\sum_{q=1}^{q=\infty} 4q^2[J^q(x)]^2, \\
x^4 &= \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4} 2\sum_{q=1}^{q=\infty} 4q^2(4q^2 - 2^2)[J^q(x)]^2, \\
x^6 &= \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6} 2\sum_{q=1}^{q=\infty} 4q^2(4q^2 - 2^2)(4q^2 - 4^2)[J^q(x)]^2, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \qquad (41)$$

Multiplicirt man diese Formeln (41) der Reihe nach mit $\frac{1}{y^2}$, $\frac{1}{y^4}$, $\frac{1}{y^6}$, $\frac{1}{y^8}$, ..., und addirt, so erhält man *linker* Hand den Ausdruck (40), d. i. den Bruch $\frac{1}{y^2 - x^2}$, und *rechter* Hand eine nach den Bessel'schen Functionen fortlaufende Entwicklung. Die in dieser Entwicklung als Coefficienten von $[J^0(x)]^2$ und $[J^q(x)]^2$ auftretenden Ausdrücke sind also die gesuchten Functionen, nämlich diejenigen Functionen, welche in $(39_{a,b})$ mit $\Omega^0(y)$ und $2\Omega^q(y)$ bezeichnet worden sind. Dabei ist unter q jede Zahl der Reihe 1, 2, 3, 4, ... ∞, *nicht aber* die Zahl 0 zu verstehen. Somit finden wir:

(42) $\Omega^0(y) = \frac{1}{y^2}$; — und andrerseits für $q = 1, 2, 3, \ldots \infty$:

$$(43) \quad \Omega^q(y) = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{2}\frac{4q^2}{y^4} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\frac{4q^2(4q^2 - 2^2)}{y^6} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}\frac{4q^2(4q^2 - 2^2)(4q^2 - 4^2)}{y^8} + \cdots$$

Hieraus ergeben sich, um einige Beispiele anzuführen, folgende Formeln (wir vertauschen dabei den Buchstaben y mit z):

44)
$$\Omega^0(z) = \frac{1}{z^2}, \qquad = \frac{1}{z^2},$$
$$\Omega^1(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{4}{z^4}, \qquad = \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z^4},$$
$$\Omega^2(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{16}{z^4} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\frac{16\cdot 12}{z^6}, \qquad = \frac{1}{z^2} + \frac{8}{z^4} + \frac{32}{z^6},$$
$$\Omega^3(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{36}{z^4} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\frac{36\cdot 32}{z^6} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}\frac{36\cdot 32\cdot 20}{z^8} = \frac{1}{z^2} + \frac{18}{z^4} + \frac{192}{z^6} + \frac{1152}{z^8},$$
. . . . . .

Die Functionen $\Omega^n(z)$ sind also *ganze rationale Functionen von* $\frac{1}{z^2}$.

Auch bemerkt man, dass die Formel (42) als specieller Fall schon mitenthalten ist in der Formel (43), dass also die Functionen $\Omega^n(z)$, alle ohne Ausnahme, ihren Ausdruck finden durch die *eine* Formel*):

45)
$$\Omega^n(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2}\frac{4n^2}{z^4} + \frac{1\cdot 2}{3\cdot 4}\frac{4n^2(4n^2-2^2)}{z^6} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{4\cdot 5\cdot 6}\frac{4n^2(4n^2-2^2)(4n^2-4^2)}{z^8} + \cdots\cdots,$$

wo mithin unter n jede beliebige Zahl der Reihe $0, 1, 2, 3, \ldots \infty$ zu verstehen ist. Wir gelangen daher zu folgendem Resultat:

VII. Satz. *Der aus irgend zwei complexen Grössen x und y gebildete Bruch* $\frac{1}{y^2 - x^2}$ *kann, unter Anwendung der Bessel'schen Functionen J^n und unter gleichzeitiger Anwendung gewisser anderer Functionen Ω^n, die ihren Ausdruck finden durch die Formeln* (44), (45), *in folgende Reihe entwickelt werden:*

(46)
$$\frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \Omega^n(y)\,[J^n(x)]^2.$$

Diese Entwicklung ist gültig für jedes der Bedingung mod $x <$ mod y entsprechende Werthsystem von x, y. Dabei ist unter ε_n eine Zahl zu verstehen, welche für $n = 0$ den Werth 1, für $n > 0$ den Werth 2 besitzt.

§ 5.

Allgemeine Methode der Coefficienten-Bestimmung.

Auf der z-Ebene sei um den Punkt $z = 0$ ein Kreis beschrieben mit dem Radius R. Ferner sei $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange

(47)
$$\text{mod } z < R$$

*) Das nächstfolgende Glied dieser Formel lautet:

$$+ \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}\frac{4n^2(4n^2-2^2)(4n^2-4^2)(4n^2-6^2)}{z^{10}}.$$

bleibt. Endlich sei c irgend ein specieller Werth von z, der ebenfalls der Bedingung Genüge leistet:

$$\text{mod } c < R. \tag{48}$$

Geometrisch ausgedrückt wird also c ein Punkt sein, der innerhalb der Kreisfläche (R) liegt, und von ihrem Rande durch irgend welchen (wenn auch beliebig kleinen) Zwischenraum getrennt ist. Diesem Punkte c entsprechend mag ein zweiter Kreis construirt werden, welcher mit dem gegebenen concentrisch ist, und dessen Radius r der Bedingung genügt:

$$\text{mod } c < r < R. \tag{49}$$

Zufolge eines früheren Satzes (35) wird alsdann der Werth der gegebenen Function im Punkte c darstellbar sein durch folgendes Integral:

$$f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(r)} \frac{f(z)\cdot z\,dz}{z^2 - c^2}, \tag{50}$$

die Integration positiv hinerstreckt längs der Kreislinie (r).

Der hier unter dem Integral auftretende Bruch $\frac{1}{z^2 - c^2}$ kann nun aber, weil z einen *Rand*punkt der Kreisfläche (r) repräsentirt, folglich mod $z = r$, und also [nach (49)] mod $c <$ mod z ist, in folgende Reihe entwickelt werden:

$$\frac{1}{z^2 - c^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n [J^n(c)]^2\, \Omega^n(z), \tag{51}$$

wie solches aus dem zuletzt gefundenen Satze (46) unmittelbar hervorgeht.

Substituirt man nun die durch (51) dargebotene Entwicklung in die Formel (50), so erhält man:

$$f(c) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varkappa_n [J^n(c)]^2, \tag{52}$$

wo die Coefficienten $\varkappa_n$ folgende Werthe haben:

$$\varkappa_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int_{(r)} f(z)\,\Omega^n(z)\,z\,dz, \tag{53}$$

die Integration positiv erstreckt um die Kreisfläche (r).

Dass die Entwicklung (51) unter den hier gemachten Voraussetzungen jederzeit gültig ist, folgt aus unsern früheren Untersuchungen [Satz (46)]; und dass die Gültigkeit jener Entwicklung (51) diejenige von (52) mit Nothwendigkeit nach sich zieht, unterliegt keinem Zweifel.

Es mag schliesslich noch bemerkt werden, dass die Integrationscurve (r) des zur Bestimmung von $\varkappa_n$ dienenden Integrales (53) einer gewissen Deformation fähig ist, ohne dass der Werth des Integrales dabei eine Aenderung erleidet. Aus den über $f(z)$ gemachten Voraus-

setzungen, und aus der Natur der Functionen $\Omega^n(z)$, [vgl. die Formeln (44), (45)] folgt nämlich sofort, dass das Product $f(z)\,\Omega^n(z)$ stetig und eindeutig ist, solange z der Bedingung entspricht:

$$0 < \mathrm{mod}\, z < R.$$

Der Werth jenes Integrales (53) wird daher keinerlei Aenderung erleiden, wenn man seine Integrationscurve (r) einer beliebigen Deformation unterwirft, bei welcher ihre Punkte weder mit den Randpunkten der gegebenen Kreisfläche (R) noch mit dem Mittelpunkt dieser Fläche in unmittelbare Berührung gelangen. Der Werth des Integrales wird also z. B. keine Aenderung erfahren, wenn man seine Integrationscurve von der Kreislinie (r) nach irgend einer andern concentrischen Kreislinie verlegt, deren Radius kleiner als R ist.

Somit können die durch (52) und (53) erhaltenen Resultate schliesslich in folgender Weise zusammengefasst werden (der Buchstabe c wird dabei vertauscht werden mit z):

VIII. Satz. *Repräsentirt R eine reelle Constante, und $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange $\mathrm{mod}\, z < R$ bleibt, so wird jederzeit eine Entwicklung existiren:*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varkappa_n\, [J^n(z)]^2, \tag{54}$$

welche gültig ist für jeden der Bedingung $\mathrm{mod}\, z < R$ entsprechenden Werth von z. — Die constanten Coefficienten $\varkappa_n$ dieser Entwicklung finden ihre Bestimmung durch die Formel:

$$\varkappa_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i} \int_{(r)} f(z)\, \Omega^n(z)\, z\, dz,$$

die Integration positiv hinerstreckt längs irgend einer Kreislinie (r), deren Mittelpunkt bei $z = 0$ liegt, und deren Radius r kleiner als R ist. Dabei ist unter ε_n eine Zahl zu verstehen, welche für $n = 0$ den Werth 1, für $n > 0$ den Werth 2 hat.

In analoger Weise wird sich offenbar auch eine Function $f(z)$ behandeln lassen, welche eindeutig, stetig und gerade ist auf einer *ringförmigen* Fläche, die begrenzt ist von zwei concentrischen um den Punkt $z = 0$ beschriebenen Kreisen. Man gelangt dabei, wie leicht zu übersehen ist, zu folgendem Resultat:

IX. Satz. *Sind $R^0 < R$ zwei reelle Constante, und repräsentirt $f(z)$ eine gegebene Function, welche eindeutig, stetig und gerade ist, solange*

$$R^0 < \mathrm{mod}\, z < R$$

bleibt, so wird jederzeit eine Entwicklung existiren

$$f(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varkappa_n\, [J^n(z)]^2 + \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda_n\, \Omega^n(z), \tag{55}$$

welche gültig ist für jeden der Bedingung

$$R^0 < \mathrm{mod}\, z < R$$

entsprechenden Werth von z. — *Die constanten Coefficienten* $\varkappa_n$ *und* λ_n *dieser Entwicklung finden ihre Bestimmung durch die Formeln:*

$$\varkappa_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int_{(r)} f(z)\,\Omega^n(z)\,z\,dz,$$

$$\lambda_n = \frac{\varepsilon_n}{2\pi i}\int_{(r)} f(z)\,[J^n(z)]^2\,z\,dz,$$

die Integration positiv hinerstreckt längs irgend einer Kreislinie (r), *deren Mittelpunkt in* $z = 0$ *liegt, und deren Radius* r *der Bedingung entspricht:* $R^0 < r < R$. *Das hier auftretende* ε_n *ist eine Zahl, welche für* $n = 0$ *den Werth* 1, *für* $n > 0$ *den Werth* 2 *besitzt.*

§ 6.

Relationen für die Quadrate der Bessel'schen Functionen.

Die *Bessel*'schen Functionen $J^n(z)$ besitzen bekanntlich folgende Eigenschaften:

$$\frac{dJ^0(z)}{dz} = -J^1(z), \qquad 2\frac{dJ^n(z)}{dz} = J^{n-1}(z) - J^{n+1}(z),$$

$$\frac{2n}{z}J^n(z) = J^{n-1}(z) + J^{n+1}(z),$$

wo n eine der Zahlen 1, 2, 3, ... ∞ repräsentirt (vergl. meine Schrift über die Bessel'schen Functionen Seite 20 und 22). Aus diesen Formeln ergiebt sich durch Multiplication, wie schon Lommel bemerkt hat, die merkwürdige Relation:

$$\frac{2n}{z}\frac{d[J^n(z)]^2}{dz} = [J^{n-1}(z)]^2 - [J^{n+1}(z)]^2, \tag{56}$$

welche, wenn zur Abkürzung Q^n an Stelle von $[J^n(z)]^2$ gesetzt wird, auch so dargestellt werden kann:

$$\frac{2n}{z}\frac{dQ^n}{dz} = Q^{n-1} - Q^{n+1}. \tag{57}$$

Um eine analoge Formel für den hier ausgeschlossenen Fall $n = 0$ zu ermitteln, bemerken wir, dass die erste der in (10_b) erhaltenen Entwicklungen, bei Anwendung der eben eingeführten Abkürzung, sich so darstellt:

$$1 = Q^0 + 2Q^1 + 2Q^2 + 2Q^3 + 2Q^4 + \cdots\cdots$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach z:

$$\frac{1}{z}\frac{dQ^0}{dz} = -\frac{2}{z}\frac{dQ^1}{dz} - \frac{2}{z}\frac{dQ^2}{dz} - \frac{2}{z}\frac{dQ^3}{dz} - \frac{2}{z}\frac{dQ^4}{dz} - \cdots\cdots$$

und hieraus durch Benutzung der Relation (57):

$$\frac{1}{z}\frac{dQ^0}{dz} = \frac{1}{1}(Q^2 - Q^0) + \frac{1}{3}(Q^4 - Q^2) + \frac{1}{5}(Q^6 - Q^4) + \cdots$$
$$(58) \qquad + \frac{1}{2}(Q^3 - Q^1) + \frac{1}{4}(Q^5 - Q^3) + \frac{1}{6}(Q^7 - Q^5) + \cdots$$

Diese Gleichung (58), deren rechte Seite leicht etwas besser geordnet werden kann, wird offenbar als diejenige zu betrachten sein, welche im Falle $n = 0$ an die Stelle der Gleichung (57) tritt.

Für die zur Abkürzung mit Q^n bezeichneten Functionen $[J^n(z)]^2$ gelten also folgende Formeln:

$$\frac{1}{z}\frac{dQ^0}{dz} = -Q^0 + \frac{2}{1\cdot 3}Q^2 + \frac{2}{3\cdot 5}Q^4 + \frac{2}{5\cdot 7}Q^6 + \cdots\cdots$$
$$(59_a) \qquad -\frac{1}{2}Q^1 + \frac{2}{2\cdot 4}Q^3 + \frac{2}{4\cdot 6}Q^5 + \frac{2}{6\cdot 8}Q^7 + \cdots\cdots,$$

$$(59_b) \qquad \frac{2n}{z}\frac{dQ^n}{dz} = Q^{n-1} - Q^{n+1},$$

wo in der letztern Formel n eine der Zahlen 1, 2, 3, 4, $\ldots\ldots\infty$ *repräsentirt.*

§ 7.

Weitere Untersuchung über die Entwicklung des Ausdruckes $(y^2 - x^2)^{-1}$.

Es ist nachgewiesen worden, dass die für diesen Ausdruck gefundene Entwicklung (46) jederzeit *gültig* ist, falls nur mod $x <$ mod y bleibt. Gegenwärtig soll gezeigt werden, dass jene Entwicklung, unbeschadet ihrer *Gültigkeit*, beliebig oft nach x und y differenzirt werden kann. Um zu diesem Ziele zu gelangen, wird es aber erforderlich sein, die in jener Entwicklung auftretenden Functionen

$$[J^n(z)]^2 \text{ und } \Omega^n(z)$$

zunächst einer näheren Betrachtung zu unterwerfen.

Die Functionen $\Omega^n(z)$ besitzen eine gewisse Aehnlichkeit mit den Functionen $O^{2n}(z)$. Setzt man nämlich in der Formel (2) die Zahl $2n$ an Stelle von n, so ergiebt sich:

$$\alpha) \qquad zO^{2n}(z) = 1 + \frac{4n^2}{z^2} + \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)}{z^4} + \frac{4n^2(4n^2 - 2^2)(4n^2 - 4^2)}{z^6} + \cdots\cdots,$$

und andererseits ergiebt sich aus (45):

$$\beta) \quad z^2\Omega^n(z) = \vartheta_0 + \vartheta_2\frac{4n^2}{z^2} + \vartheta_4\frac{4n^2(4n^2 - 2^2)}{z^4} + \vartheta_6\frac{4n^2(4n^2 - 2^2)(4n^2 - 4^2)}{z^6} + \cdots\cdots,$$

wo zur augenblicklichen Abkürzung ϑ_{2p} gesetzt ist zur Bezeichnung der Grösse:

$$\vartheta_{2p} = \frac{1}{p} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}{1\cdot p + 2\cdot p + 3\cdots 2p} = \frac{(\Pi p)^2}{\Pi 2p}.$$

Der Ausdruck für $z^2\Omega^n(z)$ unterscheidet sich also von dem für $zO^{2n}(z)$ nur durch die zu den einzelnen Gliedern, d. i. zu den einzelnen Potenzen von z hinzugetretenen Grössen ϑ.

Nun kann aber der Ausdruck (α), wie aus (3) hervorgeht, durch eine Umkehrung in der Anordnung seiner Glieder in folgende Form (α') versetzt werden:

$$(\alpha') \qquad z\Omega^{2n}(z) = \frac{2^{2n}\Pi 2n}{\varepsilon_{2n} z^{2n}}\left(1 + \frac{z^2}{2\cdot 4n-2} + \frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 4n-2\cdot 4n-4} + \cdots\cdots \text{fin}\right).$$

Eine *analoge* Form (β') wird daher auch existiren für den Ausdruck (β). Diese Form (β') kann augenblicklich angegeben werden. Da nämlich (α) in (β) übergeht, sobald man den einzelnen Potenzen z^{-2p} die Factoren ϑ_{2p} beigesellt, so wird durch *dieselbe* Operation auch (α') übergehen müssen in (β'). Somit wird die Form (β') lauten:

$$(\beta') \qquad z^2\Omega^n(z) = \frac{2^{2n}\Pi 2n}{\varepsilon_{2n} z^{2n}}\left(\frac{\vartheta_{2n}}{1} + \frac{\vartheta_{2n-2}\cdot z^2}{2\cdot 4n-2} + \frac{\vartheta_{2n-4}\cdot z^4}{2\cdot 4\cdot 4n-2\cdot 4n-4} + \cdots \text{fin}\right).$$

In (α') sowohl wie in (β') sind [vergl. die Bemerkungen bei (3)] die Glieder in der Parenthese nicht ins Unendliche, sondern nur bis zu einer gewissen Stelle hin fortzusetzen. Und zwar ist, bei (α'), wie bei (β'), das *letzte* in die Parenthese noch aufzunehmende Glied dasjenige, welches mit der Potenz z^{2n} behaftet ist.

Da die Zahl ε_{2n}, der ihr beigelegten Bedeutung zufolge, jederzeit identisch ist mit ε_n, so kann die Formel (β') folgendermassen dargestellt werden:

$$\varepsilon_n\Omega^n(z) = \frac{2^{2n}\Pi 2n\cdot\vartheta_{2n}}{z^{2n+2}}\left(1 + \frac{\vartheta_{2n-2}}{2^2\vartheta_{2n}}\frac{z^2}{1\cdot 2n-1} + \frac{\vartheta_{2n-4}}{2^4\vartheta_{2n}}\frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 2n-1\cdot 2n-2} + \cdots \text{fin}\right)$$

Beachtet man daher, dass das *letzte* Glied innerhalb der Parenthese dasjenige ist, welches mit der Potenz z^{2n} behaftet ist, und beachtet man ferner, dass $\vartheta_{2n} = \frac{(\Pi n)^2}{\Pi 2n}$ ist, so ergiebt sich schliesslich:

$$(60) \qquad \varepsilon_n\Omega^n(z) =$$

$$\frac{(2^n\Pi n)^2}{z^{2n+2}}\left(1 + \frac{\Theta_2 z^2}{1\cdot 2n-1} + \frac{\Theta_4 z^4}{1\cdot 2\cdot 2n-1\cdot 2n-2} + \cdots\cdots + \frac{\Theta_{2n} z^{2n}}{1\cdot 2\cdots n\cdot 2n-1\cdot 2n-2\cdots n}\right),$$

wo die Coefficienten $\Theta_2, \Theta_4, \Theta_6, \ldots \Theta_{2n}$ folgende Bedeutungen haben:

$$\Theta_2 = \frac{\vartheta_{2n-2}}{2^2\vartheta_{2n}} = \frac{1}{2^2}\left(\frac{\Pi n-1}{\Pi n}\right)^2\frac{\Pi 2n}{\Pi 2n-2} = \frac{1}{2^2}\frac{2n\cdot 2n-1}{n^2},$$

$$\Theta_4 = \frac{\vartheta_{2n-4}}{2^4\vartheta_{2n}} = \frac{1}{2^4}\left(\frac{\Pi n-2}{\Pi n}\right)^2\frac{\Pi 2n}{\Pi 2n-4} = \frac{1}{2^4}\frac{2n\cdot 2n-1\cdot 2n-2\cdot 2n-3}{(n\cdot n-1)^2},$$

$$\Theta_6 = \frac{\vartheta_{2n-6}}{2^6\vartheta_{2n}} = \frac{1}{2^6}\left(\frac{\Pi n-3}{\Pi n}\right)^2\frac{\Pi 2n}{\Pi 2n-6} = \frac{1}{2^6}\frac{2n\cdot 2n-1\cdot 2n-2\cdot 2n-3\cdot 2n-4\cdot 2n-}{(n\cdot n-1\cdot n-2)^2}$$

. . . . . .

und also einfacher auch so dargestellt werden können:

$$(60_a)\qquad \begin{aligned} \Theta_2 &= \frac{2n-1}{2n}, \\ \Theta_4 &= \frac{2n-1\cdot 2n-3}{2n\cdot 2n-2}, \\ \Theta_6 &= \frac{2n-1\cdot 2n-3\cdot 2n-5}{2n\cdot 2n-2\cdot 2n-4}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \Theta_{2n} &= \frac{2n-1\cdot 2n-3\cdot 2n-5\cdot\cdots\cdot 3\cdot 1}{2n\cdot 2n-2\cdot 2n-4\cdot\cdots\cdot 4\cdot 2}. \end{aligned}$$

Hieraus geht sofort hervor, dass die Grössen Θ durchweg *ächte* Brüche sind.

Die ganzen rationalen Functionen von $\frac{1}{z^2}$, *welche mit* $\Omega^n(z)$ *bezeichnet, und durch* (45) *definirt worden sind, nehmen also, wenn man sie nach steigenden, statt nach fallenden Potenzen von z ordnet, die in* (60) *angegebene Gestalt an, wo unter* $\Theta_2, \Theta_4, \Theta_6, \ldots \Theta_{2n}$ *die in* (60_a) *angegebenen ächten Brüche zu verstehen sind, und unter* ε_n *eine Zahl, welche für* $n = 0$ *den Werth* 1, *für* $n > 0$ *den Werth* 2 *besitzt.*

Was andererseits die Functionen $[J^n(z)]^2$ anbelangt, so ist nach (5):

$$[J^n(z)]^2 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} J^{2n}(2z\sin\omega)\,d\omega.$$

Substituirt man hier für $J^{2n}(2z\sin\omega)$ die aus (1) sich ergebende unendliche Reihe:

$$J^{2n}(2z\sin\omega) = \frac{(2z\sin\omega)^{2n}}{2^{2n}\Pi 2n}\left(1 - \frac{(2z\sin\omega)^2}{2\cdot 4n+2} + \frac{(2z\sin\omega)^4}{2\cdot 4\cdot 4n+2\cdot 4n+4} - \cdots\cdots\right),$$

so lässt sich die Integration nach ω mit Leichtigkeit ausführen. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(2\sin\omega)^{2p}\,d\omega = \frac{\Pi 2p}{(\Pi p)^2} = \tau_{2p},$$

so ergiebt sich:

$$J^n(z)]^2 = \frac{z^{2n}}{2^{2n}\Pi 2n}\left(\tau_{2n} - \tau_{2n+2}\frac{z^2}{2\cdot 4n+2} + \tau_{2n+4}\frac{z^4}{2\cdot 4\cdot 4n+2\cdot 4n+4} - \cdots\cdots\right),$$

Hieraus aber folgt nach einfachen Reductionen:

$$(61)\quad [J^n(z)]^2 = \frac{z^{2n}}{(2^n\Pi n)^2}\left(1 - \frac{T_2 z^2}{1\cdot 2n+1} + \frac{T_4 z^4}{1\cdot 2\cdot 2n+1\cdot 2n+2} - \cdots\cdots\right),$$

wo $T_2, T_4, T_6, \ldots$ die Werthe besitzen:

$$(61_a)\qquad \begin{aligned} T_2 &= \frac{2n+1}{2n+2}, \\ T_4 &= \frac{2n+1\cdot 2n+3}{2n+2\cdot 2n+4}, \\ T_6 &= \frac{2n+1\cdot 2n+3\cdot 2n+5}{2n+2\cdot 2n+4\cdot 2n+6}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Zwischen der vorhin für $\Omega^n(z)$ *erhaltenen Formel* (60), *und zwischen der hier für* $[J^n(z)]^2$ *sich ergebenden Formel* (61) *findet, obwohl die erstere einen geschlossenen Ausdruck, die letztere aber eine unendliche Reihe darbietet, doch der äusseren Gestaltung nach eine gewisse Aehnlichkeit statt. Ebenso übrigens, wie bei jener Formel* $\Theta_2, \Theta_4, \Theta_6, \ldots$, *ebenso sind auch bei dieser die Coefficienten* $\mathsf{T}_2, \mathsf{T}_4, \mathsf{T}_6, \ldots$ *lauter ächte Brüche.*

Sind x und y zwei beliebig gegebene complexe Grössen, also (geometrisch ausgedrückt) irgend zwei Punkte in der z-Ebene, so haben die für diese Grössen gebildeten Functionen $[J^n(x)]^2$ und $\Omega^n(y)$, nach (60) und (61), folgende Werthe:

$$[J^n(x)]^2 = \frac{x^{2n}}{N^2}\left(1 - \frac{\mathsf{T}_2 x^2}{1\cdot 2n+1} + \frac{\mathsf{T}_4 x^4}{1\cdot 2\cdot 2n+1\cdot 2n+2} - \cdots\cdots \text{inf.}\right),$$

$$\varepsilon_n \Omega^n(y) = \frac{N^2}{y^{2n+2}}\left(1 + \frac{\Theta_2 y^2}{1\cdot 2n-1} + \frac{\Theta_4 y^4}{1\cdot 2\cdot 2n-1\cdot 2n-2} + \cdots\cdots \text{fin.}\right),$$

wo $N = 2^n \Pi n$ ist. Hieraus ergiebt sich, weil der Modul einer Summe kleiner als die Summe der Moduln ist:

$$\text{mod}\,[J^n(x)]^2 < \frac{a^{2n}}{N^2}\left(1 + \frac{\mathsf{T}_2 a^2}{1\cdot 2n+1} + \frac{\mathsf{T}_4 a^4}{1\cdot 2\cdot 2n+1\cdot 2n+2} + \cdots\cdots \text{inf.}\right),$$

$$\text{mod}\,\varepsilon_n \Omega^n(y) < \frac{N^2}{b^{2n+2}}\left(1 + \frac{\Theta_2 b^2}{1\cdot 2n-1} + \frac{\Theta_4 b^4}{1\cdot 2\cdot 2n-1\cdot 2n-2} + \cdots\cdots \text{fin.}\right),$$

wo $a = \text{mod}\, x$ und $b = \text{mod}\, y$ sein soll. Die rechten Seiten dieser Formeln werden, wenn man die in den einzelnen Gliedern vorhandenen Nenner *verkleinert*, und zugleich die *ächten* Brüche $\mathsf{T}_2, \mathsf{T}_4, \ldots, \Theta_2, \Theta_4, \ldots$ fortlässt, noch weiter *vergrössert* werden. Um so mehr also wird:

$$\text{mod}\,[J^n(x)]^2 < \frac{a^{2n}}{N^2}\left(1 + \frac{a^2}{1} + \frac{a^4}{1\cdot 2} + \frac{a^6}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\cdots \text{inf.}\right),$$

$$\text{mod}\,\varepsilon_n \Omega^n(y) < \frac{N^2}{b^{2n+2}}\left(1 + \frac{b^2}{1} + \frac{b^4}{1\cdot 2} + \frac{b^6}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots\cdots \text{fin.}\right).$$

In der zweiten Formel endlich wird gegenwärtig der Ausdruck rechts noch weiter vergrössert werden, wenn man seine Glieder nicht abbrechen, sondern ins Unendliche fortlaufen lässt. Somit ergiebt sich:

$$\text{(62)} \qquad \begin{aligned} \text{mod}\,[J^n(x)]^2 &< \frac{a^{2n}}{N^2}\, e^{aa}, \\ \text{mod}\,\varepsilon_n \Omega^n(y) &< \frac{N^2}{b^{2n+2}}\, e^{bb}. \end{aligned}$$

Setzt man nun fest, dass die Variabeln x, y der Bedingung $a < b$ d. i. $\text{mod}\, x < \text{mod}\, y$ unterworfen sein sollen, so lässt sich mit Hülfe dieser Formeln (62) leicht nachweisen [was die nähere Methode dieses Nachweises anbelangt, so verweise ich auf meine Schrift über die Bessel'schen Functionen Seite 27—32], dass die beiden Reihen

$$(63) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n [J^n(x)]^2 \, \Omega^n(y),$$

$$(64) \qquad \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n \frac{d^p [J^n x)]^2}{dx^p} \frac{d^q \Omega^n(y)}{dy^q}$$

convergent, ihre Werthe also *stetige* Functionen von x, y sind. Hieraus folgt dann weiter, dass die letztere dieser beiden stetigen Functionen aus der erstern abgeleitet werden durch $(p+q)$ malige Differentiation.

Die Reihe (63) ist aber, nach (46), identisch mit

$$\frac{1}{y^2 - x^2};$$

folglich muss die Reihe (64) identisch sein mit

$$\frac{d^{p+q}}{dx^p \, dy^q} \left(\frac{1}{y^2 - x^2} \right).$$

Somit gelangen wir nun zu folgendem Resultat:

X. Satz. *Ebenso wie die in* (46) *gefundene Entwicklung*

$$(65) \qquad \frac{1}{y^2 - x^2} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \varepsilon_n [J^n(x)]^2 \, \Omega^n(y)$$

gültig ist für jedes beliebige der Bedingung mod $x <$ mod y entsprechende Werthsystem von x, y; ebenso gilt Gleiches auch von allen denjenigen Entwicklungen, die aus dieser hervorgehen durch (beliebig oft wiederholtes) Differenziren nach x und y.

Hieraus folgt sofort, dass die in (54) *und* (55) *erhaltenen Entwicklungen, ohne Beeinträchtigung ihres Gültigkeit-Gebietes, beliebig oft nach z differenzirt werden können.*

Setzt man zur Abkürzung

$$(66) \qquad [J^n(x)]^2 = Q^n, \qquad \Omega^n(y) = \Omega^n,$$

so lässt sich die Entwicklung (65) folgendermassen darstellen:

$$(67) \qquad \frac{1}{y^2 - x^2} = Q^0\Omega^0 + 2Q^1\Omega^1 + 2Q^2\Omega^2 + 2Q^3\Omega^3 + \cdots\cdots$$

Hieraus folgt durch Differentiation nach x:

$$\frac{2}{(y^2 - x^2)^2} = \frac{\Omega^0}{x}\frac{dQ^0}{dx} + \frac{2\Omega^1}{x}\frac{dQ^1}{dx} + \frac{2\Omega^2}{x}\frac{dQ^2}{dx} + \frac{2\Omega^3}{x}\frac{dQ^3}{dx} + \cdots\cdots,$$

oder, wenn man die hier auftretenden $\frac{dQ}{dx}$ mit Hülfe der Formeln $(59_{a,b})$ durch die Q selber ausdrückt:

$$\begin{aligned} \frac{2}{(y^2 - x^2)^2} = {} & \Omega^0 \left(-Q^0 + \frac{2}{1\cdot 3} Q^2 + \frac{2}{3\cdot 5} Q^4 + \frac{2}{5\cdot 7} Q^6 + \cdots\cdots \right) \\ & + \Omega^0 \left(-\frac{1}{2} Q^1 + \frac{2}{2\cdot 4} Q^3 + \frac{2}{4\cdot 6} Q^5 + \frac{2}{6\cdot 8} Q^7 + \cdots\cdots \right) \\ & + \Omega^1 \frac{Q^0 - Q^2}{1} + \Omega^3 \frac{Q^2 - Q^1}{3} + \Omega^5 \frac{Q^1 - Q^6}{5} + \cdots\cdots \\ & + \Omega^2 \frac{Q^1 - Q^3}{2} + \Omega^4 \frac{Q^3 - Q^5}{4} + \Omega^6 \frac{Q^5 - Q^7}{6} + \cdots\cdots \end{aligned} \qquad (68)$$

Andererseits ergiebt sich aus 67 durch Differentiation nach y:

$$(69)\quad \frac{2}{y^2-x^2}=-\frac{Q^1}{y}\frac{d\Omega^1}{dy}-\frac{2Q^2}{y}\frac{d\Omega^1}{dy}-\frac{2Q^3}{y}\frac{d\Omega^2}{dy}-\frac{2Q^4}{y}\frac{d\Omega^3}{dy}-\cdots\cdots\cdots$$

Aus 68 und 69 aber ergeben sich, weil die in die einzelnen Q multiplicirten Ausdrücke in beiden Formeln *dieselben* sein müssen, folgende Relationen:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{y}\frac{d\Omega^1}{dy}&=\Omega^1-\Omega^0\\
-\frac{2}{y}\frac{d\Omega^1}{dy}&=\frac{\Omega^2}{2}-\frac{\Omega^0}{2},\\
-\frac{2}{y}\frac{d\Omega^2}{dy}&=\frac{\Omega^3}{3}-\frac{\Omega^1}{1}+\frac{2\Omega^0}{1\cdot 3},\\
-\frac{2}{y}\frac{d\Omega^3}{dy}&=\frac{\Omega^4}{4}-\frac{\Omega^2}{2}+\frac{2\Omega^0}{2\cdot 4},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-\frac{2}{y}\frac{d\Omega^n}{dy}&=\frac{\Omega^{n+1}}{n+1}-\frac{\Omega^{n-1}}{n-1}+\frac{2\Omega^0}{n-1\cdot n+1}.
\end{aligned}$$

Diese Relationen können, wie man sieht, mit Ausnahme der beiden ersten, welche isolirt dastehen, zusammengefasst werden durch eine einzige Formel. Substituirt man statt y den Buchstaben z, *so ergiebt sich also, dass für die Functionen* $\Omega^n(z)$ *folgende Formeln gelten:*

$$\begin{aligned}
-\frac{2}{z}\frac{d\Omega^0(z)}{dz}&=2\Omega^1(z)-2\Omega^0(z),\\
-\frac{2}{z}\frac{d\Omega^1(z)}{dz}&=\frac{\Omega^2(z)}{2}-\frac{\Omega^0(z)}{2},\\
-\frac{2}{z}\frac{d\Omega^n(z)}{dz}&=\frac{\Omega^{n+1}(z)}{n+1}-\frac{\Omega^{n-1}(z)}{n-1}+\frac{2\Omega^n(z)}{(n+1)(n-1)},
\end{aligned}\qquad(70)$$

wo in der letzten Formel n eine der Zahlen 2, 3, 4, 5, ... ∞ *repräsentirt.*

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass das in (54) über die Entwickelbarbeit einer gegebenen Function $f(z)$ nach den $[J^n(z)]^2$ erhaltene Resultat, durch Benutzung des zuletzt gefundenen Satzes (66), bedeutend verallgemeinert werden kann. Denn mit Hülfe dieses Satzes lässt sich offenbar nachweissen, dass jede gerade Function $f(z)$ in demselben Umfange, wie nach den $[J^n(z)]^2$, auch nach den $\frac{d^p[J^n(z)]^2}{dz^p}$ entwickelbar ist, wo p eine beliebig gegebene *gerade* Zahl sein kann; und dass ferner Gleiches auch gilt von jeder *ungeraden* Function $f(z)$, nur mit dem Unterschiede, dass in diesem Fall unter p eine beliebig gegebene *ungerade* Zahl zu verstehen ist.

Denkt man sich, um auf den Specialfall $p=1$ etwas näher einzugehen, um den Punkt $z=0$ einen Kreis beschrieben mit dem Radius R, und eine Function $f(z)$ gegeben, welche eindeutig, stetig und *ungerade* ist, solange mod $z<R$ bleibt, so wird die Function

$$(71) \qquad \varphi(z) = \int_0^z f(z)\, dz$$

(die Integrationscurve beschränkt gedacht auf das Innere des genannten Kreises) eindeutig, stetig und *gerade* sein, solange mod $z < R$ bleibt, und folglich entwickelbar sein in eine nach den $[J^n(z)]^2$ fortschreitende Reihe

$$(72) \qquad \varphi(z) = \varkappa_0 [J^0]^2 + \varkappa_1 [J^1]^2 + \varkappa_2 [J^2]^2 + \cdots\cdots$$

Und zwar wird diese Reihe, in welcher zur Abkürzung J^n statt $J^n(z)$ gesetzt ist, gültig sein für jeden der Bedingung mod $z < R$ entsprechenden Werth von z. Diese Entwicklung (72) kann [zufolge des Satzes (66)], unbeschadet ihres Gültigkeit-Gebietes, nach z differenzirt werden. Somit erhalten wir die Formel:

$$(73) \qquad \frac{d\varphi(z)}{dz} = 2\varkappa_0 J^0 \frac{dJ^0}{dz} + 2\varkappa_1 J^1 \frac{dJ^1}{dz} + 2\varkappa_2 J^2 \frac{dJ^2}{dz} + \cdots\cdots,$$

welche wiederum gültig ist für jedes der Bedingung mod $z < R$ entsprechende z. Nach (71) ist aber $\frac{d\varphi(z)}{dz} = f(z)$, und andrerseits ist nach bekannten Eigenschaften der Bessel'schen Functionen:

$$(73_a) \qquad \frac{dJ^0}{dz} = -J^1,$$

$$(73_b) \qquad \frac{dJ^n}{dz} = \frac{J^{n-1} + J^{n+1}}{2}, \qquad (n = 1, 2, 3 \ldots . \infty).$$

Somit nimmt die Entwicklung (73) folgende Gestalt an:

$$(74) \quad f(z) = -2\varkappa_0 J^0 J^1 + \varkappa_1 J^1 (J^0 - J^2) + \varkappa_2 J^2 (J^3 - J^4) + \cdots\cdots,$$

oder (was dasselbe ist) folgende:

$$(75) \quad f(z) = (\varkappa_1 - 2\varkappa_0) J^0 J^1 + (\varkappa_2 - \varkappa_1) J^1 J^2 + (\varkappa_3 - \varkappa_2) J^2 J^3 + \cdots\cdots$$

Wir gelangen daher zu folgendem Resultat:

XI. Satz. *Versteht man unter $f(z)$ eine beliebig gegebene Function, welche eindeutig, stetig und ungerade ist, solange mod $z < R$ bleibt, so wird dieselbe immer darstellbar sein durch eine nach den Producten*

$$(76) \qquad J^0(z) J^1(z), \quad J^1(z) J^2(z), \quad J^2(z) J^3(z), \ldots\ldots$$

fortschreitende Entwicklung; und zwar wird diese Entwicklung gültig sein für jeden der Bedingung mod $z < R$ entsprechenden Werth von z.

Solche nach den Producten (76) fortschreitende Entwicklungen können z. B. leicht erhalten werden für die *ungeraden* Potenzen:

$$z, z^3, z^5, z^7, z^9, \ldots\ldots;$$

und zwar wird man zu denselben am einfachsten dadurch gelangen, dass man die in (10_b) für *gerade* Potenzen gefundenen Entwicklungen nach z differenzirt. Diese Entwicklungen der ungeraden Potenzen sollen sogleich [in (78)] näher angegeben werden.

§ 8.

Die Entwickelung ungerader Functionen.

Um die zuletzt besprochenen Entwickelungen in möglichst übersichtlicher Gestaltung zu erhalten, mag [mit Rücksicht auf die Relationen (73_b)] gesetzt werden:

$$(77)\qquad \Pi^q(z) = \frac{d\,[J^q(z)]^2}{dz} = J^q(z)\left(J^{q-1}(z) - J^{q+1}(z)\right),$$

$$q = 1, 2, 3 \ldots\ldots \infty.$$

Aus den Formeln (10_b) folgt alsdann durch Differentiation nach z und mit Rücksicht auf (73_a) sofort:

$$\begin{aligned}
0 &= -J^0(z)J^1(z) + \Sigma\Pi^q(z),\\
\frac{2}{2}z &= \frac{1}{2}\Sigma 4q^2\Pi^q(z),\\
(78)\quad \frac{4}{2}z^3 &= \frac{1.2}{3.4}\Sigma 4q^2(4q^2-2^2)\Pi^q(z),\\
\frac{6}{2}z^5 &= \frac{1.2.3}{4.5.6}\Sigma 4q^2(4q^2-2^2)(4q^2-4^2)\Pi^q(z),\\
\frac{8}{2}z^7 &= \frac{1.2.3.4}{5.6.7.8}\Sigma 4q^2(4q^2-2^2)(4q^2-4^2)(4q^2-6^2)\Pi^q(z)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

wo die Summationen Σ hinerstreckt sind über $q = 1, 2, 3, \ldots\ldots \infty$.

Sind nun x, y zwei beliebig gegebene, der Bedingung $\mathrm{mod}\,x < \mathrm{mod}\,y$ unterworfene complexe Variable, so ist identisch:

$$\frac{x}{y^2-x^2} = \frac{x}{y^2} + \frac{x^3}{y^4} + \frac{x^5}{y^6} + \frac{x^7}{y^8} + \ldots\ldots\ldots$$

Substituirt man hier auf der rechten Seite für die Potenzen x, x^3, x^5, x^7, $\ldots\ldots$ die aus (78), bei Umänderung von z in x, sich ergebenden Entwickelungen, so erhält man augenblicklich:

$$(79)\qquad \frac{x}{y^2-x^2} = \sum_{q=1}^{q=\infty} 2\,\mathsf{P}^q(y)\,\Pi^q(x),$$

wo $\mathsf{P}^q(y)$ folgende ganze rationale Function von y^{-2} repräsentirt:

$$(80)\quad \mathsf{P}^q(y) = \frac{1}{2}\frac{4q^2}{2y^2} + \frac{1.2}{3.4}\frac{4q^2(4q^2-2^2)}{4y^4} + \frac{1.2.3}{4.5.6}\frac{4q^2(4q^2-2^2)(4q^2-4^2)}{6y^6} + \ldots\ldots$$

Mit Rücksicht auf die Bedeutung von Π^q (77) kann die Entwickelung (79) angesehen werden als *eine nach den Produkten*

$$J^0(x)J^1(x),\quad J^1(x)J^2(x),\quad J^2(x)J^3(x),\ \ldots\ldots$$

fortschreitende Entwickelung. Hieraus aber folgt [Satz (76)] sofort, *dass diese Entwickelung gültig ist für sämmtliche Werthsysteme von x, y, welche der Bedingung* $\mathrm{mod}\,x < \mathrm{mod}\,y$ *Genüge leisten.*

In (35) war für eine *gerade* Function $f(z)$ die Formel gefunden:

$$(81) \qquad f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,.\,z\,dz}{z^2 - c^2},$$

die Integration positiv hinerstreckt über eine um den Punkt $z = 0$ beschriebene und den Punkt $z = c$ umschliessende Kreisperipherie.

Eine ähnliche Formel lässt sich mit Leichtigkeit herleiten für eine *ungerade* Function $f(z)$, vorausgesetzt, dass dieselbe im Uebrigen denselben Bedingungen Genüge leistet, welche zur Gültigkeit der Formel (81) erforderlich sind. Man findet nämlich für eine solche Function die Formel:

$$(82) \qquad f(c) = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{f(z)\,.\,c\,dz}{z^2 - c^2}$$

die Integration wiederum positiv hinerstreckt über eine um den Punkt $z = 0$ beschriebene und den Punkt $z = c$ umschliessende Kreisperipherie. Nun ist nach (79):

$$(83) \qquad \frac{c}{z^2 - c^2} = \sum_{q=1}^{q=\infty} 2\,P^q(z)\,\Pi^q(c).$$

Somit folgt aus (82):

$$(84) \qquad f(c) = \sum_{q=1}^{q=\infty} \lambda_q\,\Pi^q(c),$$

wo die Coefficienten λ_q die Werthe besitzen:

$$(85) \qquad \lambda_q = \frac{1}{\pi i}\int f(z)\,P^q(z)\,dz,$$

die Integration wiederum positiv hinerstreckt über die genannte Kreisperipherie.

Durch diese und ähnliche Betrachtungen ergiebt sich, dass eine Function, welche auf einer *Kreisfläche* eindeutig, stetig und *ungerade* bleibt, immer entwickelbar ist in eine nach den Functionen Π^q fortschreitende Reihe, und dass andererseits eine Function, welche eindeutig, stetig und *ungerade* bleibt auf einer von zwei concentrischen Kreisen begrenzten *ringförmigen Fläche*, immer entwickelbar ist in eine nach den Π^q und P^q fortschreitende Doppelreihe. Dabei wird immer vorausgesetzt, dass die Mittelpunkte der genannten Kreise in $z = 0$ liegen.

Kurz, es ergeben sich für eine *ungerade* Function zwei Sätze, welche vollkommen analog sind mit denjenigen, die früher [in (54) und (55)] für eine *gerade* Function gefunden sind. Und gleichzeitig ergeben sich auch analoge allgemeine Methoden zur Bestimmung der in diesen Entwickelungen einer *ungeraden* Function auftretenden constanten Coefficienten.

Vor etwa einem Jahre hat bekanntlich Heine eine Untersuchung über die Bessel'schen Functionen J^n veröffentlicht (Borchardt's

Journal, Bd. 69, S. 128), welche schon deswegen im höchsten Grade werthvoll ist, weil erst durch sie *der zwischen den* J^n *und zwischen den Kugelfunctionen* P^n *stattfindende Zusammenhang* in deutlicher und vollständiger Weise aufgedeckt wurde. Bei dieser Gelegenheit bemerkt Heine mit vollem Recht, dass die Functionen J^n nicht als Bessel'sche, sondern als Fourier-Bessel'sche Functionen, oder auch wohl kürzer als *Cylinder*functionen zu bezeichnen sind. Mit Rücksicht hierauf ist die Ueberschrift des vorliegenden Aufsatzes gewählt. Im Texte selber aber habe ich mir erlaubt, an meiner früheren Bezeichnungsweise festzuhalten, um nicht durch Gebrauch des Namens Fourier-Bessel'sche Functionen eine beschwerliche Weitläufigkeit, oder durch Gebrauch des Namens *Cylinder*functionen eine unangenehme Discontinuität mit meinen früheren Arbeiten hervorzurufen.

Leipzig, November 1869.

Notiz über die elliptischen und hyperelliptischen Integrale.

Von Carl Neumann in Leipzig.

Zur Untersuchung sei zunächst vorgelegt das trigonometrische Integral

$$W = \int_{z_0}^{z} \Omega dz, \tag{1}$$

wo

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{(z-p)(z-q)}}, \tag{2}$$

und wo p, q und z_0 gegebene *complexe* Constanten bezeichnen. Jede dieser Constanten werde dargestellt durch einen festen Punkt in der Ebene, und ebenso z als ein beweglicher Punkt in derselben. Ferner werde gesetzt:

$$z - p = D' e^{\Delta' i}, \quad z - q = D'' e^{\Delta'' i}, \quad i = \sqrt{-1}; \tag{3}$$

so dass also D', Δ' die Polarcoordinaten von z in Bezug auf p, und D'', Δ'' diejenigen von z in Bezug auf q repräsentiren. Alsdann ergiebt sich für Ω der Ausdruck:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{D'D''}} e^{-\frac{1}{2}(\Delta'+\Delta'')i}. \tag{4}$$

Setzt man, um Reelles und Imaginäres zu sondern:

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ \Omega &= \Phi + i\Psi, \\ W &= U + iV, \end{aligned} \tag{5}$$

wo alsdann Φ, Ψ die Bedeutungen haben:

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{\sqrt{D'D''}} \cos\left(-\frac{\Delta'+\Delta''}{2}\right), \\ \Psi &= \frac{1}{\sqrt{D'D''}} \sin\left(-\frac{\Delta'+\Delta''}{2}\right), \end{aligned} \tag{6}$$

so nimmt die aus (1) folgende Differentialgleichung

$$dW = \Omega dz \tag{7}$$

die Gestalt an:

$$dU + idV = (\Phi + i\Psi)(dx + idy). \tag{8}$$

Hieraus folgt:

$$(9) \qquad \begin{aligned} dU &= \Phi dx - \Psi dy, \\ dV &= \Psi dx + \Phi dy. \end{aligned}$$

Die z Ebene mag aufgefasst werden als eine um den Anfangspunkt ($z = 0$) mit äusserst grossem Radius beschriebene Kreisfläche $\mathfrak{Z}$. In dieser Fläche werde eine Curve gezogen von p über q nach irgend einer Stelle p^* ihres sehr fernen Randes. Die beiden Strecken

$$pq \text{ und } qp^*,$$

aus denen die Curve besteht, mögen benannt werden mit

$$\alpha \text{ und } \beta;$$

und die ganze Curve $(\alpha + \beta)$ mag, um ihre Seiten oder Ufer in bequemer Weise unterscheiden zu können, aufgefasst werden als ein von p über q nach p^* hinfliessender *Strom*. Endlich mag $\mathfrak{Z}'$ diejenige Fläche genannt werden, in welche die Kreisfläche $\mathfrak{Z}$ sich verwandelt durch einen längs jener Curve $(\alpha + \beta)$ ausgeführten *Schnitt*.

Um die in Ω, nämlich in (2), (4), (6), dem Wurzelzeichen anhaftende Unbestimmtheit zu beseitigen, setzen wir fest, es solle die Function Ω innerhalb $\mathfrak{Z}'$ eindeutig und stetig sein, und es solle ihr Werth für $z = \infty$ convergiren gegen $-\frac{1}{z}$. Diese Function Ω wird alsdann *entgegengesetzte* Werthe besitzen zu beiden Ufern der Strecke α, *gleiche* Werthe aber haben zu beiden Ufern von β, und für weit entfernte Punkte z darstellbar sein durch eine Reihe von der Form:

$$(10) \qquad \Omega^* = -\frac{1}{z} - \frac{\Gamma'}{z^2} - \frac{2\Gamma''}{z^3} - \frac{3\Gamma'''}{z^4} - \cdots\cdots,$$

wo Γ', Γ'', Γ''', ... Constante sind*).

Um ferner die in dem Integrale W, (1), enthaltene Unbestimmtheit zu beseitigen, setzen wir fest, die Integrationscurve $z_0 \ldots . z$ solle in ihrer Bewegung beschränkt sein auf die (einfach zusammenhängende) Fläche $\mathfrak{Z}'$. Alsdann wird W innerhalb dieser Fläche $\mathfrak{Z}'$ eindeutig und stetig sein, und für weit entfernte Punkte derselben darstellbar sein durch die Reihe:

$$(11) \qquad W^* = U^* + iV^* = \log\frac{1}{z} + \mathsf{K} + \frac{\Gamma'}{z} + \frac{\Gamma''}{z^2} + \frac{\Gamma'''}{z^3} + \cdots\cdots,$$

wo zu den früheren Constanten Γ', Γ'', Γ''' noch eine weitere Constante K hinzugetreten ist. Setzt man $z = re^{i\vartheta}$, so ergiebt sich hieraus sofort die Formel:

---

*) Durch den in (10) dem Ω beigefügten Stern (*) soll angedeutet sein, dass diese Entwicklung nur für weit entfernte Punkte z gültig ist; wie Aehnliches auch weiterhin geschehen wird. Uebrigens wird, wie man sofort erkennt, zur Gültigkeit jener Entwicklung nur erforderlich sein, dass der Punkt z vom Anfangspunkt weiter entfernt ist als die gegebenen festen Punkte p und q.

$$U^* = \log \frac{1}{r} + \left(A + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta}{r^n} \right), \tag{12}$$

wo die A, A_n, B_n, reelle Constanten bezeichnen.

Die Werthe von Ω, W in einem gegebenen Punkt z mögen bezeichnet werden mit $\Omega(z)$, $W(z)$. Liegt z auf dem Strome $(\alpha + \beta)$, so bedarf es einer genaueren Bezeichnung; es mögen in solchem Falle die in z am *linken* Ufer vorhandenen Werthe durch $\Omega^l(z)$, $W^l(z)$, die am *rechten* Ufer vorhandenen durch $\Omega^r(z)$, $W^r(z)$ angedeutet werden.

Bezeichnet die Constante E den Werth von W im Punkte p,

$$W(p) = \mathsf{E}, \tag{13}$$

und ist ferner z irgend ein Punkt auf α, so wird

$$\begin{aligned} W^l(z) &= \mathsf{E} + \int_p^z \Omega^l(z)\, dz, \\ W^r(z) &= \mathsf{E} - \int_p^z \Omega^l(z)\, dz, \end{aligned} \tag{14}$$

die Integration hinerstreckt längs α. Denn es ist zu beachten, dass längs α die Werthe von $\Omega^l(z)$ und $\Omega^r(z)$ entgegengesetzt sind. Hieraus folgt:

$$W^l(z) + W^r(z) = 2\mathsf{E}. \tag{15}$$

Lässt man nun den Punkt z längs α bis q fortrücken, so nehmen die Formeln (14) die Gestalt an:

$$\begin{aligned} W^l(q) &= \mathsf{E} + \mathsf{A}, \\ W^r(q) &= \mathsf{E} - \mathsf{A}, \quad \text{wo } \mathsf{A} = \int_p^q \Omega^l(z)\, dz. \end{aligned} \tag{16}$$

Lässt man endlich den Punkt z noch weiter fortrücken nach irgend einer auf der Strecke β befindlichen Stelle, so erhält man:

$$\begin{aligned} W^l(z) &= \mathsf{E} + \mathsf{A} + \int_q^z \Omega^l(z)\, dz, \\ W^r(z) &= \mathsf{E} - \mathsf{A} + \int_q^z \Omega^l(z)\, dz; \end{aligned} \tag{17}$$

denn es ist zu beachten, dass längs β die Werthe $\Omega^l(z)$ und $\Omega^r(z)$ einander gleich sind. Hieraus folgt:

$$W^l(z) - W^r(z) = 2\mathsf{A}. \tag{18}$$

Aus (15) und (18) ersehen wir, dass die *Summe* der beiden Grössen W^l und W^r längs α constant, nämlich $= 2\mathsf{E}$ ist, und andrerseits, dass die *Differenz* jener Grössen constant ist längs β, nämlich $= 2\mathsf{A}$. Solches mag angedeutet werden durch die Formeln:

(19) $\alpha)$. $W^\lambda + W^\varrho = 2\mathsf{E}$, $\beta)$. $W^\lambda - W^\varrho = 2\mathsf{A}$.

Die Constante $2\mathsf{A}$ lässt sich leicht bestimmen. Denn bildet man z. B. die Differenz $W^\lambda - W^\varrho$ für den Endpunkt von β, d. i. für den am fernen *Kreis*rande befindlichen Punkt p^*, so findet man dieselbe, durch Anwendung der Entwickelung (11), gleich $2\pi i$. Folglich ist $2\mathsf{A} = 2\pi i$; jene Formeln lauten mithin:

(20) $\alpha)$. $W^\lambda + W^\varrho = 2\mathsf{E}$, $\beta)$. $W^\lambda - W^\varrho = 2\pi i$.

Setzt man nun, um Reelles und Imaginäres zu sondern, die complexe Constante $\mathsf{E} = \mathsf{E}^0 + i\mathsf{E}^{00}$, so erhält man:

(21) $\alpha)$. $\begin{aligned} U^\lambda + U^\varrho &= 2\mathsf{E}^0, \\ V^\lambda + V^\varrho &= 2\mathsf{E}^{00}, \end{aligned}$ $\beta)$. $\begin{aligned} U^\lambda - U^\varrho &= 0, \\ V^\lambda - V^\varrho &= 2\pi. \end{aligned}$

Für irgend einen auf dem Strome $(\alpha + \beta)$ befindlichen Punkt z repräsentire σ die Stromrichtung, und ν die auf dem linken Ufer errichtete Normale; so dass also σ zu ν ebenso liegt, wie die x-Achse zur y-Achse. Dann ist nach allgemeinem Satz:

(22) $$\frac{\partial U}{\partial \sigma} = \frac{\partial V}{\partial \nu}, \qquad \frac{\partial U}{\partial \nu} = -\frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Mit Rücksicht hierauf ergiebt sich aus den Formeln (21) durch Differentiation nach σ sofort:

(23) $\alpha)$. $\begin{aligned} \frac{\partial U^\lambda}{\partial \sigma} + \frac{\partial U^\varrho}{\partial \sigma} &= 0, \\ \frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu} + \frac{\partial U^\varrho}{\partial \nu} &= 0, \end{aligned}$ $\beta)$. $\begin{aligned} \frac{\partial U^\lambda}{\partial \sigma} - \frac{\partial U^\varrho}{\partial \sigma} &= 0, \\ \frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu} - \frac{\partial U^\varrho}{\partial \nu} &= 0. \end{aligned}$

Um nun zu einer näheren Einsicht in die Beschaffenheit der Function U zu gelangen, betrachten wir zunächst die Curven $U = \text{Const.}$ oder $dU = 0$. Diese Curven $dU = 0$ sind, nach (9), darstellbar durch

$$\Phi dx - \Psi dy = 0,$$

also nach (6) darstellbar durch

$$\cos\tfrac{\Delta' + \Delta''}{2} \cdot dx + \sin\tfrac{\Delta' + \Delta''}{2} \cdot dy = 0$$

Folglich sind $\cos\frac{\Delta'+\Delta''}{2}$ und $\sin\frac{\Delta'+\Delta''}{2}$ die Cosinus derjenigen Winkel, unter denen die im Punkte z oder $(x + iy)$ auf der Curve $U = \text{Const.}$ errichtete Normale geneigt ist gegen die x-Achse und y-Achse. Construirt man also die früher eingeführten Radien $\overline{pz} = D'$ und $\overline{qz} = D''$ mit ihren Azimuten Δ' und Δ'', so erkennt man sofort, dass jene im Punkte z errichtete Normale identisch ist mit der Halbirungslinie des von D' und D'' gebildeten Winkels. *Die Curven $U = \text{Const.}$ sind daher confocale Ellipsen mit den Brennpunkten p, q.*

Fortan mag nun supponirt werden, dass zur Curve α die Brennlinie $\overline{pq}$ gewählt worden ist. Alsdann wird U längs des linken Ufers

von α constant, etwa $= C$, und längs des rechten Ufers von α ebenfalls constant, etwa $= C'$ sein. Diese Constanten C und C' müssen aber unter einander identisch sein, weil U im Anfangspunkt p der Linie α nur *einen* Werth hat. Also $C = C'$. Ausserdem aber ist nach (21): $C + C' = 2\mathsf{E}^0$. Folglich muss $C = C' = \mathsf{E}^0$ sein. Die Formeln (21), (23) gewinnen daher folgende Gestaltung:

$$(24)\qquad \alpha).\quad U^\lambda = U^\varrho = \mathsf{E}^0,\quad \frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu} = -\frac{\partial U^\varrho}{\partial \nu}, \qquad \beta).\quad U^\lambda = U^\varrho,\quad \frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu} = \frac{\partial U^\varrho}{\partial \nu}.$$

Die Function U ist innerhalb der Fläche $\mathfrak{Z}'$ überall eindeutig und stetig. Daraus folgt, dass ihr Werth in irgend einem innerhalb $\mathfrak{Z}'$ befindlichen Punkt z_1 dargestellt werden kann durch das Integral

$$(25)\qquad U(z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{Z}'}\left(U\frac{\partial L}{\partial \mathsf{N}} - L\frac{\partial U}{\partial \mathsf{N}}\right) d\sigma,$$

die Integration hinerstreckt über alle zum Rande von $\mathfrak{Z}'$ gehörigen Linienelemente $d\sigma$. Für jedes Element $d\sigma$ repräsentirt N die *innere* Normale der Fläche $\mathfrak{Z}'$; andererseits repräsentirt L den Logarithmus der reciproken Entfernung des Elementes $d\sigma$ vom Punkte z_1; so dass also $L = \log\left(\frac{1}{R}\right) = -\log R$ ist, falls jene Entfernung selber mit R bezeichnet wird. — Entsprechend den Ufern von α, denen von β und dem *Kreis*rande $\varkappa$ der Fläche $\mathfrak{Z}'$, zerfällt das Integral (25) in drei Integrale:

$$(26)\qquad U(z_1) = J_\alpha + J_\beta + J_\varkappa.$$

Das erste dieser Integrale lautet:

$$J_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha\left(\left[U^\lambda\frac{\partial L}{\partial \mathsf{N}} + U^\varrho\frac{\partial L}{\partial \mathsf{N}'}\right] - L\left[\frac{\partial U^\lambda}{\partial \mathsf{N}} + \frac{\partial U^\varrho}{\partial \mathsf{N}'}\right]\right) d\sigma,$$

wo N, N' entgegengesetzte Richtungen haben, nämlich N gelegen ist auf dem linken, N' auf dem rechten Ufer von α, wo also N identisch ist mit der früher eingeführten Normale ν, und N' entgegengesetzt zu ν. Somit folgt:

$$J_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha\left(\left[U^\lambda - U^\varrho\right]\frac{\partial L}{\partial \nu} - L\left[\frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu} - \frac{\partial U^\varrho}{\partial \nu}\right]\right) d\sigma;$$

und hieraus ergiebt sich mit Rücksicht auf die Relationen (24):

$$(27)\qquad J_\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_\alpha\left(-L\,.\,2\,\frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu}\right) d\sigma.$$

In ähnlicher Weise erhält man, ebenfalls mit Benutzung der Relationen (24):

$$(28)\qquad J_\beta = 0.$$

Was endlich das dritte Integral $J_\varkappa$ betrifft, so ist es nöthig zurückzugehen auf die für die Punkte der Peripherie $\varkappa$ gültige, in (12) angegebene Entwicklung:

$$U^* = \log\frac{1}{r} + \left(A + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta}{r^n}\right),$$

und zu Hülfe zu nehmen die bekannte Entwicklung von L; es ist nämlich

$$L = -\log R = -\log\sqrt{r^2 + r_1^2 - 2rr_1\cos(\vartheta - \vartheta_1)},$$
$$= \log\frac{1}{r} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{r_1^n \cos n(\vartheta - \vartheta_1)}{nr^n},$$

wo r, ϑ die Polarcoordinaten eines auf $d\sigma$ gelegenen Punktes z, und r_1, ϑ_1 die Polarcoordinaten des Punktes z_1 bezeichnen. Mit Hülfe dieser Formeln für U^* und L findet man sofort:

$$J_\varkappa = A, \tag{29}$$

wo A die in der Entwicklung von U^* auftretende Constante bezeichnet. Aus (26), (27), (28), (29) folgt:

$$U(z_1) = A + \int_\alpha FL\,d\sigma = A - \int_\alpha F\log R\,d\sigma, \tag{30}$$

falls man nämlich mit F den Ausdruck bezeichnet:

$$F = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu}. \tag{31}$$

Diese Formel (30) zeigt, dass $U(z_1)$, abgesehen von der additiven Constanten A, *angesehen werden kann als das Logarithmische Potential*) der Brennlinie α auf den Punkt z_1, jene Linie mit einer Masse belegt gedacht, deren Dichtigkeit $= F$ ist.* Gleichzeitig ergiebt sich aus jener Formel für den Werth von $W = U + iV$ im Punkte z_1 folgende Darstellung:

$$W(z_1) = (A + iB) - \int_\alpha F\log(z - z_1)\,d\sigma, \tag{32}$$

wo B eine neu hinzutretende Constante bezeichnet, und wo in $\log(z - z_1)$ unter z ein zum Elemente $d\sigma$ gehöriger Punkt, unter z_1 der gegebene Punkt zu verstehen ist.

Um eine deutlichere Vorstellung von der *Dichtigkeit* F zu erhalten, sei zunächst bemerkt, dass die Formel (31) so dargestellt werden kann:

---

*) Unter dem Logarithmischen Potential eines Massensystems auf einen Punkt soll nämlich verstanden werden die Summe sämmtlicher Massenelemente, jedes multiplicirt mit dem Logarithmus seiner *reciproken* Entfernung von dem gegebenen Punkt.

$$F = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu} = +\frac{1}{\pi}\frac{\partial V^\lambda}{\partial \sigma}, \tag{33}$$
$$= +\frac{1}{\pi}\left(\Psi\frac{\partial x}{\partial \sigma} + \Phi\frac{\partial y}{\partial \sigma}\right),$$

[vergl. (22) und (9)]. Nun findet längs α die Gleichung statt $dU = 0$ oder $\Phi\frac{\partial x}{\partial \sigma} - \Psi\frac{\partial y}{\partial \sigma} = 0$, [vergl. (9)]. Hieraus folgt:

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\Psi}{\sqrt{\Phi^2 + \Psi^2}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + \Psi^2}}.$$

Somit ergiebt sich:

$$F = \frac{\varepsilon}{\pi}\sqrt{\Phi^2 + \Psi^2}, \tag{34}$$

oder nach (6):

$$F = \frac{\varepsilon}{\pi\sqrt{D'D''}}, \tag{35}$$

wo ε noch unbestimmt, nämlich $= \pm 1$ ist.

Um ε zu bestimmen, betrachten wir die durch $\int_\alpha F d\sigma$ dargestellte *Gesammtmasse* der Linie α. Aus (33) folgt:

$$\int_\alpha F d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_\alpha \frac{\partial V^\lambda}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{1}{\pi}\left(V^\lambda(q) - V^\lambda(p)\right). \tag{36}$$

Nun war die Constante A [vergl. (16)] definirt worden durch

$$\mathsf{A} = \int_\alpha \Omega^\lambda dz.$$

Demnach ist

$$\mathsf{A} = W^\lambda(q) - W^\lambda(p),$$
$$= \left(U^\lambda(q) + iV^\lambda(q)\right) - \left(U^\lambda(p) + iV^\lambda(p)\right),$$

oder, weil U längs α constant ist:

$$\mathsf{A} = iV^\lambda(q) - iV^\lambda(p).$$

Für A war aber der Werth πi gefunden worden, [vergl. (19), (20)]. Es ist daher:

$$\pi i = iV^\lambda(q) - iV^\lambda(p);$$

und hierdurch geht die Formel (36) über in:

$$\int_\alpha F d\sigma = +1. \tag{37}$$

Hieraus folgt, *dass die Gesammtmasse der Linie α gleich $+1$ ist*, und ferner, dass jenes in F enthaltene ε positiv ist, *dass mithin die Dichtigkeit F den Werth besitzt*:

$$F = +\frac{1}{\pi\sqrt{D'D''}}, \tag{38}$$

vorausgesetzt, dass man $\sqrt{D'D''}$ als positive Grösse betrachtet.

Es repräsentirt also F die Dichtigkeit einer über die Linie α vertheilten Masse 1; das Potential dieser Masse auf irgend einen Punkt z ist $U(z) - A$, (30), und ist also längs der Linie α von *constantem* Werth. Hieraus folgt, dass die durch jene Dichtigkeit F determinirte materielle Vertheilung identisch ist mit derjenigen Gleichgewichtslage, welche ein auf der Linie α befindliches und längs α (wie in einem zu beiden Enden geschlossenen Canal) bewegliches Fluidum von der Masse 1 annehmen wird unter der gegenseitigen Einwirkung seiner Theilchen. Somit gelangen wir zu folgendem Resultat:

Denkt man sich ein Fluidum) von der Masse* 1 *beweglich längs einer beliebig gegebenen begrenzten geraden Linie* α, *so wird nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes in jedem Punkt der Linie eine Dichtigkeit* F *vorhanden sein, deren Quadrat umgekehrt proportional ist mit dem Product der beiden Segmente* D', D'', *welche durch den Punkt auf der Linie markirt sind. Erstarrt dieses Fluidum in seiner Gleichgewichtslage, so wird das von ihm auf einen beliebigen Punkt* z *ausgeübte Potential, abgesehen von einer additiven Constanten, dargestellt sein durch den reellen Theil des Integrales*

$$\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{(z-p)(z-q)}}, \tag{39}$$

vorausgesetzt, dass p *und* q *die beiden Endpunkte der Linie* α *bezeichnen. Gleichzeitig werden die Niveaucurven dieses Potentiales confocale Ellipsen sein mit den Brennpunkten* p *und* q.

Die Betrachtung, welche zur Darstellung von U als Potential führt, kann übrigens noch ein wenig anders eingerichtet werden. — Es sei α' irgend eine unter jenen confocalen Ellipsen; ferner β' derjenige Theil von β, welcher von α' hinführt zum *Kreis*rande $\varkappa$ der Fläche $\mathfrak{Z}'$; und endlich sei $\mathfrak{T}$ derjenige Theil, welcher von der Fläche $\mathfrak{Z}'$ noch übrig bleibt nach Absonderung der von α' umschlossenen Ellipsenfläche. Alsdann kann, vorausgesetzt dass der Punkt z_1 innerhalb der Fläche $\mathfrak{T}$ liegt, statt der Formel (25) auch folgende benutzt werden:

$$U(z_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathfrak{T}} \left(U \frac{\partial L}{\partial \mathsf{N}} - L \frac{\partial U}{\partial \mathsf{N}} \right) d\sigma, \tag{40}$$

welche von jener nur dadurch sich unterscheidet, dass die Integration nicht über den Rand von $\mathfrak{Z}'$, sondern über den von $\mathfrak{T}$ hinerstreckt ist. Auch kann man in dieser Formel statt der Function U die Function

*) Es ist wohl nicht nöthig hinzuzufügen, dass hier von einem *fingirten* Fluidum die Rede ist, bei dem die Anziehung oder Abstossung zwischen zwei Theilchen umgekehrt proportional ist mit der Entfernung selber.

$U - K$ nehmen, unter K eine beliebige Constante verstanden. Alsdann ergiebt sich:

$$(41) \qquad U(z_1) - K = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{T}}\left((U-K)\frac{\partial L}{\partial \mathsf{N}} - L\frac{\partial U}{\partial \mathsf{N}}\right)d\sigma,$$

$$= J_{\alpha'} + J_{\beta'} + J_{\varkappa}.$$

Wählt man für K denjenigen constanten Werth, welchen U längs der Ellipse α' besitzt, so ergeben sich für diese Integrale J leicht folgende Werthe:

$$J_{\alpha'} = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha'}\left(-L\frac{\partial U}{\partial \nu}\right)d\sigma,$$

$$J_{\beta'} = 0,$$

$$J_{\varkappa} = A - K,$$

wo ν die auf α' errichtete Normale, und zwar die *innere* Normale der Fläche $\mathfrak{T}$ repräsentirt. Folglich wird:

$$(42) \qquad U(z_1) - K = A - K + \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha'}\left(-L\frac{\partial U}{\partial \nu}\right)d\sigma$$

d. i.

$$(43) \qquad U(z_1) = A + \int_{\alpha'} fL\,d\sigma,$$

wo f die Bedeutung hat:

$$(44) \qquad f = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial U}{\partial \nu} = +\frac{1}{2\pi}\frac{\partial V}{\partial \sigma}.$$

Dabei repräsentirt ν die eben genannte Richtung; während σ zu ν ebenso liegt, wie die x-Achse zur y-Achse. Demnach ist σ die positive Richtung der Curve α', dieselbe angesehen als Randcurve der Fläche $\mathfrak{T}$. Hieraus folgt:

$$\int_{\alpha'} f\,d\sigma = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha'} dV,$$

das Integral rechter Hand hinerstreckt in der eben genannten positiven Richtung von α'. Mit Rücksicht auf (21) ergiebt sich daher:

$$(45) \qquad \int_{\alpha'} f\,d\sigma = +1.$$

Ferner lässt sich f selber in ähnlicher Weise, wie früher F, ermitteln. Man findet:

$$(46) \qquad f = +\frac{1}{2\pi\sqrt{D'D''}}.$$

Die Formeln (43) und (45), (46), in gehöriger Weise interpretirt, führen zu folgendem Resultat:

Denkt man sich ein Fluidum von der Masse 1 *beweglich längs einer beliebig gegebenen Ellipse* α', *so wird nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes in jedem Punkt der Ellipse eine Dichtigkeit vorhanden*

sein, deren Quadrat umgekehrt proportional ist mit dem Product der beiden (nach dem Punkt hinlaufenden) Brennstrahlen D' und D''. Erstarrt das Fluidum in seiner Gleichgewichtslage, so wird das von ihm auf irgend einen Punkt z ausgeübte Potential, abgesehen von einer additiven Constante, wiederum identisch sein mit dem reellen Theil des Integrales (39), *vorausgesetzt, dass in diesem Integrale für p und q die Brennpunkte der gegebenen Ellipse genommen werden. Auch werden die Niveaucurven des Potentiales wiederum dargestellt sein durch das System der confocalen Ellipsen**).

Aehnliche Betrachtungen lassen sich nun auch durchführen mit Bezug auf die hyperelliptischen Integrale. Es sei

---

*) Das Gesetz für die Gleichgewichtsvertheilung eines Fluidums (Anziehungsgesetz: $\frac{1}{r}$), welches beweglich ist, längs einer gegebenen *Ellipse*, lässt sich nicht nur in dieser, sondern im Ganzen in drei verschiedenen Formen aussprechen. Nämlich:

I. Nach Eintritt des Gleichgewichtes ist die Dichtigkeit in jedem Punkt proportional mit dem Abstande des Punktes von einer zweiten Ellipse, welche der gegebenen *ähnlich*, und von derselben unendlich wenig verschieden ist.

II. Die Dichtigkeit ist in jedem Punkte umgekehrt proportional mit der Länge desjenigen Durchmessers der Ellipse, welcher parallel läuft zu der in dem Punkte construirten Tangente.

III. Die hier gefundene Form: Das Quadrat der Dichtigkeit ist umgekehrt proportional mit dem Product der beiden Brennstrahlen.

Das Gesetz für die Vertheilung des *elektrischen Fluidums* (Anziehungsgesetz: $\frac{1}{r^2}$) auf einer *Ellipsoidoberfläche* kann, wie hier beiläufig bemerkt sein mag, ebenfalls in verschiedenen Formen dargestellt werden, die zum Theil mit den Formen des die Ellipse betreffenden Gesetzes in Analogie stehen. Nämlich:

I. Nach Eintritt des Gleichgewichtes ist die Dichtigkeit in jedem Punkt der Ellipsoidfläche proportional mit dem Abstande des Punktes von einer zweiten Ellipsoidfläche, welche der gegebenen *ähnlich*, und von derselben unendlich wenig verschieden ist.

II. Jene Dichtigkeit ist in jedem Punkt umgekehrt proportional mit dem Quadratinhalt desjenigen Diametralschnittes, welcher parallel läuft zu der im Punkte construirten Tangentialebene. (Auf diese Form des Gesetzes ist bereits vor langer Zeit von mir aufmerksam gemacht worden, in Poggendorf's Annalen, Band 113.)

III. Bei einem *gestreckten Rotationsellipsoid* ist das Quadrat der Dichtigkeit an jeder Stelle umgekehrt proportional mit dem Product der beiden Brennstrahlen. Bei einem *abgeplatteten Rotationsellipsoid* ist das Quadrat der Dichtigkeit in jedem Punkt umgekehrt proportional mit dem Product des längsten und kürzesten Brennstrahles; wobei vorausgesetzt wird, dass in diesem Falle unter dem Namen Brennstrahlen sämmtliche Linien verstanden sind, welche von dem betrachteten Punkte hinlaufen nach der Peripherie der (kreisförmigen) Brennebene.

$$W = \int_{z_0}^{z} \Omega dz, \tag{1}$$

wo

$$\Omega = \frac{G(z-H_1)(z-H_2)\cdots(z-H_{s-1})}{\sqrt{(z-p_1)(z-q_1)\cdots(z-p_{s+1})(z-q_{s+1})}}, \tag{2}$$

und wo z_0, G, ebenso wie die H, p, q gegebene complexe Constante sind. Jede der Constanten H, p, q mag dargestellt sein als ein fester Punkt in der Ebene, und z selber als ein beweglicher Punkt. Führt man mit Bezug auf jeden festen Punkt c die Bezeichnung ein

$$z - c = D(c) \cdot e^{i\Delta(c)}, \qquad i = \sqrt{-1},$$

so dass also $D(c)$, $\Delta(c)$ die Polarcoordinaten des beweglichen Punktes z in Bezug auf den festen Punkt c darstellen; setzt man ferner zur Abkürzung:

$$\begin{aligned} D(H_1) \cdot D(H_2) \cdot \ldots \cdot D(H_{s-1}) &= D^H, \\ \Delta(H_1) + \Delta(H_2) \ldots + \Delta(H_{s-1}) &= \Delta^H, \\ D(p_1) \cdot D(q_1) \cdot \ldots \cdot D(p_{s+1}) \cdot D(q_{s+1}) &= D^{pq}, \\ \Delta(p_1) + \Delta(q_1) \ldots + \Delta(p_{s+1}) + \Delta(q_{s+1}) &= \Delta^{pq}, \end{aligned}$$

und setzt man ausserdem

$$G = g e^{i\gamma};$$

so erhält man für Ω folgende Darstellung:

$$\Omega = \frac{g D^H}{\sqrt{D^{pq}}} e^{i(\gamma + \Delta^H - \frac{1}{2}\Delta^{pq})}. \tag{3}$$

Setzt man also

$$\begin{aligned} z &= x + iy, \\ \Omega &= \Phi + i\Psi, \\ W &= U + iV, \end{aligned} \tag{4}$$

so wird

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{g D^H}{\sqrt{D^{pq}}} \cos(\gamma + \Delta^H - \tfrac{1}{2}\Delta^{pq}), \\ \Psi &= \frac{g D^H}{\sqrt{D^{pq}}} \sin(\gamma + \Delta^H - \tfrac{1}{2}\Delta^{pq}); \end{aligned} \tag{5}$$

und gleichzeitig erhält man alsdann aus

$$dW = \Omega dz \tag{6}$$

die Formeln:

$$\begin{aligned} dU &= \Phi dx - \Psi dy, \\ dV &= \Psi dx + \Phi dy, \end{aligned} \tag{7}$$

In der z Ebene möge nun, ebenso wie bei der früheren Betrachtung, um den Anfangspunkt ($z = 0$) eine Kreisfläche $\mathfrak{Z}$ beschrieben gedacht werden mit äusserst grossem Radius; und in dieser Fläche

werde eine Curve gezogen, welche in p_1 beginnt, sämmtliche Punkte $q_1, p_2, q_2, \ldots p_{s+1}, q_{s+1}$ der Reihe nach berührt, und schliesslich ihr Ende erreicht in irgend einem Punkte p^* des kreisförmigen Randes. Die einzelnen Strecken dieser Curve:

$$p_1q_1,\ q_1p_2,\ p_2q_2,\ \ldots\ldots\ q_sp_{s+1},\ p_{s+1}q_{s+1},\ q_{s+1}p^*$$

mögen benannt werden mit

$$\alpha_1,\quad \beta_1,\quad \alpha_2,\quad \ldots\ldots\quad \beta_s,\quad \alpha_{s+1},\quad \beta_{s+1}.$$

Endlich heisse $\mathfrak{Z}'$ diejenige Fläche, in welche $\mathfrak{Z}$ sich verwandelt durch einen längs der ganzen Curve von p_1 bis p^* fortlaufenden Schnitt.

Die Function Ω setzen wir in solcher Weise fest, dass sie innerhalb $\mathfrak{Z}'$ überall eindeutig und stetig ist. Sie wird alsdann zu beiden Ufern einer jeden Strecke α entgegengesetzte Werthe, zu beiden Ufern einer jeden Strecke β aber gleiche Werthe besitzen, und für sehr weit entfernte Punkte z darstellbar sein durch die Reihe:

$$\Omega^* = -\frac{\Gamma'}{z^2} - \frac{2\Gamma''}{z^3} - \frac{3\Gamma'''}{z^4} - \ldots\ldots, \tag{8}$$

wo $\Gamma', \Gamma'', \Gamma''' \ldots$. complexe Constanten sind.

Mit Bezug auf das Integral W, (1), setzen wir ferner fest, dass die Integrationscurve $z_0 \ldots . z$ in ihrer Bewegung auf die Fläche $\mathfrak{Z}'$ beschränkt sein soll, und verwandeln solcher Art W in eine Function von z, welche innerhalb $\mathfrak{Z}'$ überall eindeutig und stetig ist, und deren Werthe für weit entfernte Punkte z darstellbar sind durch

$$W^* = U^* + iV^* = \mathsf{K} + \frac{\Gamma'}{z} + \frac{\Gamma''}{z^2} + \frac{\Gamma'''}{z^3} + \cdots, \tag{9}$$

wo K eine complexe Constante bezeichnet. Hieraus folgt, wenn $z = re^{i\vartheta}$ gesetzt wird, sofort:

$$U^* = A + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{A_n \cos n\vartheta + B_n \sin n\vartheta}{r^n}. \tag{10}$$

wo A, A_n, B_n reelle Constante sind.

Bezeichnet man das längs der Strecke α_n von p_n nach q_n hinerstreckte Integral $\int \Omega^2 dz$ mit A_n, andererseits dasselbe Integral, längs β_n von q_n bis p_{n+1} erstreckt gedacht, mit B_n, und bezeichnet man ferner den Werth von W im Punkte p_1 mit E, so lassen sich die Werthe von W in sämmtlichen Punkten p, q folgendermassen ausdrücken:

$$\begin{aligned}
W(p_1) &= \mathsf{E},\\
W(q_1) &= \mathsf{E} \pm \mathsf{A}_1,\\
W(p_2) &= \mathsf{E} \pm \mathsf{A}_1 + \mathsf{B}_1,\\
W(q_2) &= \mathsf{E} \pm \mathsf{A}_1 + \mathsf{B}_1 \pm \mathsf{A}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
W(p_{s+1}) &= \mathsf{E} \pm \mathsf{A}_1 + \mathsf{B}_1 \pm \mathsf{A}_2 \cdots + \mathsf{B}_s,\\
W(q_{s+1}) &= \mathsf{E} \pm \mathsf{A}_1 + \mathsf{B}_1 \pm \mathsf{A}_2 \cdots + \mathsf{B}_s \pm \mathsf{A}_{s+1},
\end{aligned} \tag{11}$$

wo die *obern* oder *untern* Zeichen zu nehmen sind, je nachdem man die Werthe am *linken* oder *rechten* Ufer haben will. Dabei mag, was diese Uferbezeichnung betrifft, die Curve $(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 \ldots + \beta_{s+1})$ wiederum angesehen werden als ein von p_1 nach p^* hinfliessender Strom. — Leicht übersieht man nun, dass die Summe $W^\lambda + W^\varrho$ constant ist längs jeder Strecke α, dass andererseits die Differenz $W^\lambda - W^\varrho$ constant ist längs einer jeden Strecke β, und dass diese constanten Werthe in einfacher Weise sich ausdrücken lassen durch die E, A, B. Man gelangt so zu den Formeln:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1). \quad W^\lambda + W^\varrho = 2\,\mathsf{E},\\
&\alpha_2). \quad W^\lambda + W^\varrho = 2\,\mathsf{E} + 2\,\mathsf{B}_1,\\
(12)\quad &\alpha_3). \quad W^\lambda + W^\varrho = 2\,\mathsf{E} + 2\,\mathsf{B}_1 + 2\,\mathsf{B}_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_s). \quad W^\lambda + W^\varrho = 2\,\mathsf{E} + 2\,\mathsf{B}_1 + 2\,\mathsf{B}_2 \ldots\ldots + 2\,\mathsf{B}_{s-1},\\
&\alpha_{s+1}). \quad W^\lambda + W^\varrho = 2\,\mathsf{E} + 2\,\mathsf{B}_1 + 2\,\mathsf{B}_2 \ldots\ldots + 2\,\mathsf{B}_{s-1} + 2\,\mathsf{B}_s,
\end{aligned}
$$

und andererseits zu folgenden Formeln:

$$
\begin{aligned}
&\beta_1). \quad W^\lambda - W^\varrho = 2\,\mathsf{A}_1,\\
&\beta_2). \quad W^\lambda - W^\varrho = 2\,\mathsf{A}_1 + 2\,\mathsf{A}_2,\\
(13)\quad &\beta_3). \quad W^\lambda - W^\varrho = 2\,\mathsf{A}_1 + 2\,\mathsf{A}_2 + 2\,\mathsf{A}_3,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\beta_s). \quad W^\lambda - W^\varrho = 2\,\mathsf{A}_1 + 2\mathsf{A}_2 + 2\,\mathsf{A}_3 \ldots\ldots + 2\,\mathsf{A}_s,\\
&\beta_{s+1}). \quad W^\lambda - W^\varrho = 2\,\mathsf{A}_1 + 2\mathsf{A}_2 + 2\,\mathsf{A}_3 \ldots\ldots + 2\,\mathsf{A}_s + 2\,\mathsf{A}_{s+1},
\end{aligned}
$$

Aus (9) folgt, dass W zu beiden Ufern der Strecke β_{s+1} gleiche Werthe hat, dass also $W^\lambda - W^\varrho$ längs dieser Strecke $= 0$ ist. Somit zeigt sich aus der letzten der Formeln (13), dass zwischen den Constanten A folgende Relation stattfinden muss:

$$(14) \qquad \mathsf{A}_1 + \mathsf{A}_2 + \mathsf{A}_3 \cdots + \mathsf{A}_s + \mathsf{A}_{s+1} = 0.$$

Die bisherigen Grundlagen der Untersuchung mögen nun ein wenig geändert werden. Während nämlich die in dem hyperelliptischen Integral W enthaltenen $(2s+2)$ complexen Constanten p, q nach wie vor als *völlig beliebig* gegeben betrachtet werden sollen, *mögen die daselbst vorhandenen s complexen Constanten G, H fortan in solcher Weise berechnet gedacht werden, dass* $\mathsf{A}_1, \mathsf{A}_2, \mathsf{A}_3, \ldots \mathsf{A}_s$ *vorgeschriebene rein imaginäre Werthe erhalten*; wobei alsdann die Constante A_{s+1} [zufolge (14)] ebenfalls einen rein imaginären Werth erhalten wird. Solches festgesetzt, haben wir:

$$(15) \quad \mathsf{A}_1 = M_1\pi i,\ \mathsf{A}_2 = M_2\pi i,\ \ldots\ldots\ \mathsf{A}_s = M_s\pi i,\ \mathsf{A}_{s+1} = M_{s+1}\pi i,$$

wo die M *reelle*, der Relation

$$(16) \qquad M_1 + M_2 + M_3 \ldots + M_s + M_{s+1} = 0$$

unterworfene Constanten sind, von denen die s ersten *beliebig* gegeben sind.

Bezeichnet man also die Formeln (12) und (13) im Allgemeinen mit

(17) α_n). $W^\lambda + W^\varrho = 2\Gamma_n$, $\quad$ β_n). $W^\lambda - W^\varrho = 2\Delta_n$,

so wird Γ_n eine complexe Constante, $= \Gamma_n^0 + i\Gamma_n^{00}$, hingegen Δ_n eine rein imaginäre Constante, $= i\Delta_n^{00}$ sein. Somit ergiebt sich bei Sonderung des Reellen und Imaginären:

(18) α_n). $\begin{aligned} U^\lambda + U^\varrho &= 2\Gamma_n^0, \\ V^\lambda + V^\varrho &= 2\Gamma_n^{00}, \end{aligned}$ $\quad$ β_n). $\begin{aligned} U^\lambda - U^\varrho &= 0, \\ V^\lambda - V^\varrho &= 2\Delta_n^{00}. \end{aligned}$

Hieraus folgt durch Differentiation nach der Stromrichtung σ:

(19) α_n). $\begin{aligned} \frac{\partial U^\lambda}{\partial \sigma} + \frac{\partial U^\varrho}{\partial \sigma} &= 0, \\ \frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu} + \frac{\partial U^\varrho}{\partial \nu} &= 0, \end{aligned}$ $\quad$ β_n). $\begin{aligned} \frac{\partial U^\lambda}{\partial \sigma} - \frac{\partial U^\varrho}{\partial \sigma} &= 0, \\ \frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu} - \frac{\partial U^\varrho}{\partial \nu} &= 0, \end{aligned}$

wo ν die Normale des Stromes repräsentirt, und wo sogleich festgesetzt werden mag, dass σ zu ν ebenso liegen solle, wie die x-Achse zur y-Achse.

Längs jeder Strecke β ist nach (18): $U^\lambda = U^\varrho$. Mithin ist U *einwerthig* längs einer jeden Strecke β, und also auch *einwerthig* in den Endpunkten einer solchen Strecke, also *einwerthig in jedem der Punkte* p, q. Oder anders ausgedrückt: die Function U besitzt im Punkte p_n zwei Werthe P_n, P_n, welche einander *gleich* sind, und im Punkte q_n ebenfalls zwei einander *gleiche* Werthe Q_n, Q_n. Zufolge (18) ist nun $U^\lambda + U^\varrho$ längs der von p_n nach q_n gehenden Strecke α_n constant, $= 2\Gamma_n^0$. Bringt man diese Gleichung in Anwendung auf den Anfangspunkt und Endpunkt der Strecke α_n, so erhält man:

$$P_n + P_n = 2\Gamma_n^0, \qquad Q_n + Q_n = 2\Gamma_n^0,$$

folglich:

$$P_n = Q_n = \Gamma_n^0.$$

Die Function U besitzt also *gleiche* Werthe in p_1 und q_1, ebenso in p_2 und q_2, u. s. w., endlich *gleiche* Werthe in p_{s+1} und q_{s+1}. Denkt man sich daher die Curven $U =$ Const. construirt, so wird eine dieser Curven von p_1 nach q_1 gehen, eine andere derselben von p_2 nach q_2, u. s. w. *Die in solcher Weise durch die Beschaffenheit der Function U vorgezeichneten Curven $p_1 q_1$, $p_2 q_2$, $\ldots$ $p_{s+1} q_{s+1}$ mögen nun festgehalten werden; und die vorhin in willkürlicher Weise construirten Stromstrecken α_1, α_2, $\ldots$ α_{s+1} mögen fortan hinlaufend gedacht werden längs dieser Curven.* Alsdann wird die Function U constant sein längs jeder Strecke α_n, und zu beiden Ufern derselben gleiche Werthe haben;

sodass die Formeln (18) und (19), insoweit sie auf U sich beziehen, folgende speciellere Gestaltung erhalten:

$$(20)\qquad \alpha_\varkappa).\quad U^\lambda = U^\varrho = \Gamma_\varkappa^0, \qquad \frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu} = -\frac{\partial U^\varrho}{\partial \nu},$$

$$\beta_\varkappa).\quad U^\lambda = U^\varrho, \qquad \frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu} = \frac{\partial U^\varrho}{\partial \nu}.$$

Innerhalb der durch die beiden Ufer des Stromes

$$(\alpha_1 + \beta_1 + \alpha_2 + \cdots + \beta_{s+1})$$

und durch eine sehr ferne Kreislinie $\varkappa$ begrenzten Fläche $\mathfrak{Z}'$ ist die Function U überall eindeutig und stetig. Demgemäss wird sich der Werth von U in irgend einem innerhalb $\mathfrak{Z}'$ befindlichen Punkt z_1 darstellen lassen durch ein Integral

$$(21)\qquad U(z_1) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{Z}'}\left(U\frac{\partial L}{\partial \mathsf{N}} - L\frac{\partial U}{\partial \mathsf{N}}\right) d\sigma,$$

welches (durch eine Behandlung, die der auf Seite 615 ausgeführten völlig analog ist) schliesslich zu dem Ausdruck führt:

$$(22)\qquad U(z_1) = A + \Sigma\int_\alpha FL\,d\sigma = A - \Sigma\int_\alpha F.\log R\,.\,d\sigma,$$

wo F die Bedeutung hat:

$$(23)\qquad F = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial U^\lambda}{\partial \nu} = +\frac{1}{\pi}\frac{\partial V^\lambda}{\partial \sigma}.$$

In (22) ist durch Σ eine Summe von $(s+1)$ Integralen angedeutet, jedes hinerstreckt über die Linienelemente $d\sigma$ einer Strecke α; ferner ist $L = \log\frac{1}{R}$, und R die Entfernung des Elementes $d\sigma$ vom Punkte z_1; endlich ist A eine reelle Constante, identisch mit derjenigen, welche auftritt in der Entwickelung (10). Die Richtungen σ und ν, nach denen in (23) differenzirt ist, haben die schon genannten Bedeutungen; es repräsentirt nämlich σ die Stromrichtung, und liegt zu ν ebenso wie die x-Achse zur y-Achse.

Die Formel (22) zeigt, *dass $U(z_1)$, abgesehen von der additiven Constanten A, aufgefasst werden kann als das Potential der Curven α auf den Punkt z_1, jene Curven mit einer Masse belegt gedacht, deren Dichtigkeit $= F$ ist.* Gleichzeitig ergiebt sich aus jener Formel für den Werth von $W = U + iV$ im Punkte z_1 der Ausdruck:

$$(24)\qquad W(z_1) = (A + iB) - \Sigma\int_\alpha F.\log(z - z_1)\,.\,d\sigma,$$

wo B eine neu hinzutretende Constante, und z den Ort des Linienelementes $d\sigma$ bezeichnet. Dabei ist unter Σ wiederum eine Summe von $(s+1)$ Integralen zu verstehen, von denen jedes hinläuft über eine der Strecken α.

Es bleibt noch übrig, die Curven α, oder überhaupt die Curven $U = \text{Const.}$, und andererseits die Dichtigkeit F näher zu untersuchen.

Eine Curve $U = \text{Const.}$ oder $dU = 0$ kann nach (7) dargestellt werden durch:

$$\Phi dx - \Psi dy = 0,$$

also nach (5) durch:

(25) $$\cos\left(\tfrac{1}{2}\Delta^{pq} - \Delta^{H} - \gamma\right) . dx + \sin\left(\tfrac{1}{2}\Delta^{pq} - \Delta^{H} - \gamma\right) . dy = 0.$$

Somit bestimmt sich also die Richtung der Normale der Curve $U = \text{Const.}$ *in irgend einem Punkte* z *nach einem einfachen Gesetz aus denjenigen Winkeln* $\Delta(p)$, $\Delta(q)$, $\Delta(H)$, *unter welchen die Strahlen* pz, qz, Hz *gegen die x-Axe geneigt sind.* Und dasselbe Gesetz gilt natürlich auch für die Curven α.

Die Dichtigkeit F einer jeden Curve α ist nach (23) ausgedrückt durch

$$F = + \frac{1}{\pi} \frac{\partial V^{\lambda}}{\partial \sigma}.$$

Folglich wird die ganze Masse einer solchen Curve α dargestellt sein durch das längs α hinerstreckte Integral:

$$\int_{\alpha} F d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha} \frac{\partial V^{\lambda}}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha} d V^{\lambda}.$$

Hieraus folgt, falls man den Anfangspunkt der betrachteten Curve α mit p, ihren Endpunkt mit q bezeichnet (wo dann α, p, q als Abkürzungen anzusehen sind für α_n, p_n, q_n):

(26) $$\int_{\alpha} F d\sigma = \frac{1}{\pi} \left(V^{\lambda}(q) - V^{\lambda}(p) \right).$$

Nach der Definition von A (d. i. A_n) ist aber:

$$\mathsf{A} = \int_{\alpha} \Omega^{\lambda}(z) . dz,$$

(vergl. Seite 622). Hieraus folgt:

$$\mathsf{A} = W^{\lambda}(q) - W^{\lambda}(p),$$

oder weil U^{λ} längs α constant ist:

$$\mathsf{A} = i V^{\lambda}(q) - i V^{\lambda}(p),$$

oder weil $\mathsf{A} = M\pi i$ (nämlich $\mathsf{A}_n = M_n \pi i$) gemacht worden war (Seite 623):

$$M\pi = V^{\lambda}(q) - V^{\lambda}(p).$$

Somit folgt aus (26):

(27) $$\int_{\alpha} F d\sigma = M,$$

mithin mit Rücksicht auf (16):

$$\Sigma \int_{\alpha} F d\sigma = \Sigma M = 0, \tag{28}$$

die Summation Σ wieder ausgedehnt gedacht über sämmtliche $(s+1)$ Curven α.

Ferner ergiebt sich aus (23) mit Rücksicht auf (7):

$$F = \frac{1}{\pi} \frac{\partial V^{\lambda}}{\partial \sigma} = \frac{1}{\pi} \left(\Psi \frac{\partial x}{\partial \sigma} + \Phi \frac{\partial y}{\partial \sigma} \right).$$

Längs α ist aber nach (7): $\Phi \frac{\partial x}{\partial \sigma} - \Psi \frac{\partial y}{\partial \sigma} = 0$, mithin:

$$\frac{\partial x}{\partial \sigma} = \frac{\Psi}{\sqrt{\Phi^2 + \Psi^2}}, \qquad \frac{\partial y}{\partial \sigma} = \frac{\Phi}{\sqrt{\Phi^2 + \Psi^2}}.$$

Somit folgt:

$$F = \frac{1}{\pi} \sqrt{\Phi^2 + \Psi^2},$$

d. i. mit Rücksicht auf (5):

$$F = \frac{\varepsilon g D^H}{\pi \sqrt{D^{pq}}}, \tag{29}$$

wo $\varepsilon = \pm 1$. *Die auf einer Curve α in jedem Punkte z vorhandene Dichtigkeit F bestimmt sich also, wie diese Formel zeigt, nach einem einfachen Gesetz aus den Längen $D(p)$, $D(q)$, $D(H)$ derjenigen Strahlen, welche von den festen Punkten p, q, H aus nach z hinlaufen.*

Blicken wir zurück auf die Formeln (20), so sehen wir, dass U längs jeder Curve α constant ist, und dass ferner der Differentialquotient $\frac{\partial U}{\partial \nu}$ zu beiden Ufern einer solchen Curve entgegengesetzte Werthe hat. Dabei ist unter ν die auf dem linken Ufer von α errichtete Normale zu verstehen. Construiren wir ausser ν noch die *entgegengesetzte* Richtung, nämlich die auf dem rechten Ufer liegende Normale ν', so lassen sich jene Formeln (20) mit Bezug auf irgend eine Curve α so darstellen:

$$\alpha). \quad U^{\lambda} = U^{\varrho} = \text{Const.}, \tag{30}$$

$$\alpha). \quad \frac{\partial U^{\lambda}}{\partial \nu} = \frac{\partial U^{\varrho}}{\partial \nu'}. \tag{31}$$

Denkt man sich also die Function U geometrisch dargestellt durch auf der z-Ebene errichtete Perpendikel, so wird die von den Endpunkten dieser Perpendikel gebildete krumme Fläche über jeder Curve α einen *Grat von constanter Höhe* besitzen, welcher [zufolge (31)] *nach beiden Seiten einen gleich starken Abfall* darbietet.

Fasst man nach dieser augenblicklichen Abschweifung nun U wiederum auf als ein von den Curven $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{s+1}$ auf den beweglichen Punkt z ausgeübtes Potential, so sind die auf jenen Curven anzunehmenden Massen [nach (27)] ausgedrückt durch die reellen Constanten $M_1, M_2, \ldots M_{s+1}$. Denkt man sich diese Massen als Fluida,

die längs der Curven α (wie in Canälen) frei beweglich sind, so wird die durch die Dichtigkeitsfunction F (29) indicirte Vertheilung dieser Fluida denjenigen *Gleichgewichtszustand* repräsentiren, in welchem die Fluida unter gegenseitiger Einwirkung ihrer einzelnen Theilchen in jenen Curven (oder Canälen) schliesslich zur Ruhe gelangen: wie solches augenblicklich folgt aus den Relationen (30). — Denkt man sich ferner die mit den Fluidis beladenen Curven α mit unendlicher Leichtigkeit biegsam und dehnbar, überhaupt ihrer ganzen Form nach, abgesehen von den *festen* Endpunkten p, q, vollständig frei beweglich, so wird die hier in Betracht gezogene Form dieser Curven wiederum diejenige sein, welche dem Zustande des *Gleichgewichts* entspricht: wie solches hervorgeht aus den Relationen (31). Ob das Gleichgewicht labil oder stabil ist, bleibt dabei allerdings völlig dahingestellt.

Schliesslich noch eine Bemerkung. Aus (7) und (5) folgt:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \Phi = \frac{g D^H}{\sqrt{D^{h_i}}} \cos\left(\tfrac{1}{2}\Delta^{h_i} - \Delta^H - \gamma\right),$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\Psi = \frac{g D^H}{\sqrt{D^{h_i}}} \sin\left(\tfrac{1}{2}\Delta^{h_i} - \Delta^H - \gamma\right).$$

Diese Differentialquotienten repräsentiren (abgesehen vom Vorzeichen) die rechtwinkligen Componenten der von den materiellen Curven α auf einen beweglichen Punkt z oder $x + iy$ ausgeübten Kraft. Bezeichnet man die Kraft selber also mit R, so wird:

$$R^2 = g^2 \frac{D^H D^H}{D^{h_i}}. \tag{32}$$

Folglich kann diese Kraft nur für solche Punkte z verschwinden, in denen D^H verschwindet, oder in denen D^{h_i} unendlich wird. *Im Endlichen der z-Ebene giebt es also nur $(s-1)$ Punkte, in denen die Kraft verschwindet, nämlich die Punkte $H_1, H_2, \ldots H_{s-1}$.*

Als Resultat der angestellten Untersuchungen dürfte etwa Folgendes hervorzuheben sein:

Sind in der Ebene $(s+1)$ Curven α gegeben, jede versehen mit zwei festen Endpunkten p, q, sonst aber unbeschränkt veränderlich ihrer Lage und Form nach, ferner jede beladen mit einer beliebig gegebenen (reellen) Quantität M des fingirten Fluidums, so wird, falls die Summe dieser Quantitäten M gleich Null ist, nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes ein Potential vorhanden sein, welches, abgesehen von einer additiven Constanten, identisch ist mit dem reellen Theile eines gewissen hyperelliptischen Integrales.

Um dieses Integral näher angeben zu können, ist zu bemerken, dass bei der eintretenden Gleichgewichtslage jedesmal $(s-1)$ im Endlichen liegende indifferente Orte vorhanden sein werden, nämlich $(s-1)$ Orte, in denen ein beweglicher Massenpunkt unter der Einwir-

kung jener materiellen Curven in Ruhe bleiben würde. Denkt man sich diese Orte aufgesucht, bezeichnet mit $H_1, H_2, \ldots H_{s-1}$; *und denkt man sich ferner die gegebenen Endpunkte* p, q *der* $(s+1)$ *materiellen Curven der Reihe nach bezeichnet mit* $p_1, q_1, p_2, q_2, \ldots p_{s+1}, q_{s+1}$; *so lautet jenes hyperelliptische Integral:*

$$\int \frac{G(z-H_1)(z-H_2)\ldots.(z-H_{s-1})\,dz}{\sqrt{(z-p_1)(z-q_1)\ldots.(z-p_{s+1})(z-q_{s+1})}},$$

wo G *eine passend zu wählende (complexe) Constante bedeutet. Der reelle Theil dieses Integrales wird also, abgesehen von einer additiven Constanten, dasjenige Potential repräsentiren, welches von jenen materiellen Curven* α, *nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes, ausgeübt wird auf einen beliebigen Punkt* z.

Für die Gestalt der Niveaucurven, zu denen auch die Gleichgewichtsformen der Curven α *gehören, und für die im Zustande des Gleichgewichts auf den Curven* α *vorhandene Dichtigkeit* F *ergeben sich einfache geometrische Gesetze, welche ausgedrückt sind durch die Formeln* (25) *und* (29).

Nimmt man für die willkürlich zu wählenden, jedoch der Relation

$$M_1 + M_2 + \cdots + M_s + M_{s+1} = 0$$

unterworfenen reellen Constanten M der Reihe nach folgende s Werthsysteme:

	M_1	M_2	M_3	. . . .	M_s	M_{s+1}
1)	1	0	0	. . . .	0	-1,
2)	0	1	0	. . . .	0	-1,
3)	0	0	1	. . . .	0	-1,
.	.	.	.	. . . .	.	.
s)	0	0	0	. . . .	1	-1,

so ergeben sich der Reihe nach s hyperelliptische Integrale, alle mit denselben Punkten p, q. Diese s Integrale sind identisch mit denjenigen, welche von Riemann (seine allgemeineren Untersuchungen auf hyperelliptische Integrale übertragen gedacht) beim Umkehrproblem behandelt worden sind.

In ähnlicher Weise wie vorhin bei dem trigonometrischen Integral (Seite 618—620), lassen sich auch hier bei dem hyperelliptischen Integral die Niveaucurven, d. i. die Curven $U = \text{Const.}$, in Untersuchung ziehen; wodurch man zu Resultaten gelangt, die ihrem allgemeinen Charakter nach aus den schon durchgeführten Untersuchungen bereits hinlänglich erkennbar sind. Besonders einfach gestalten sich diese Resultate für den Fall $s = 1$, d. i. für den Fall des elliptischen Integrales:

$$W = U + iV = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-\varkappa^2 z^2}}.$$

Nimmt man den Modul $\varkappa$ *reell* an, so gelangt man, was die *Form* der Niveaucurven $U = \text{Const.}$ betrifft, zu einem bereits von Siebeck (Borchardt's Journal, Bd. 57, Seite 368) angegebenen Satz. Gleichzeitig aber ergiebt sich auch ein einfaches Gesetz für die Dichtigkeit, welche ein längs jener Curve frei bewegliches Fluidum nach Eintritt des Gleichgewichtszustandes an jeder Stelle der Curve besitzen wird, ein Gesetz, welches in voller Analogie steht zu dem früher (Seite 618) mit Bezug auf die Ellipse erhaltenen Resultat.

Leipzig, Februar 1870.

Ueber Curven dritter Ordnung mit zwei Doppelpunkten.

Von P. Gordan in Giessen.

Hat eine Curve dritter Ordnung zwei Doppelpunkte, dann zerfällt sie in eine gerade Linie und in einen Kegelschnitt. Durch die Untersuchungen des Herrn Aronhold im 55. Bd. des Crelle'schen Journals ist man im Stande, sowohl die Relationen anzugeben, welche zwischen den Coefficienten stattfinden, wenn f zwei Doppelpunkte besitzt, als auch die Gleichungen der Geraden und des Kegelschnitts zu finden, in welche die Curve in diesem Falle zerfällt.

Führt man die folgenden Bezeichnungen ein, welche sich von den Aronhold'schen nur um numerische Factoren unterscheiden:

$$f = (a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^3 = a_x^3 = b_x^3 = c_x^3 \ldots.$$

$$S_f = (abc)\,(abu)\,(acu)\,(bcu)$$

$$(abc)^2\,a_x b_x c_x = \Delta = \alpha_x^3 \qquad \text{(Hesse'sche Curve)}$$

$$(abc)\,(abd)\,(acd)\,(bcd) = S$$

$$(ab\alpha)\,(abu)\,(a\alpha u)\,(b\alpha u) = T_f$$

$$(abc)\,(ab\alpha)\,(ac\alpha)\,(bc\alpha) = T$$

$$(abu)^2(cdu)^2(acu)(bdu) = \Phi, \qquad \text{(Gl. in Liniencoordinaten.)}$$

bezeichnet man ferner die Gleichungen der Geraden und des Kegelschnittes, in welche f zerfällt durch $r_1x_1 + r_2x_2 + r_3x_3 = r_x$ und $(s_1x_1 + s_2x_2 + s_3x_3)^2 = s_x^2 = s'_x{}^2 = s''_x{}^2$ (wobei, was erlaubt ist, die Proportionalitätsfactoren der Grössen r und s so bestimmt werden sollen, dass die Determinante des Kegelschnittes

$$(ss's'')^2 = 1$$

ist), dann erhält man f und seine Covarianten und Invarianten mittelst folgender Relationen durch die simultanen Covarianten und Invarianten der Formen r_x und s_x^2 ausgedrückt:

$$f = a_x^3 = r_x s_x^2$$

$$S_f = \frac{2}{9}\,(rsu)^2.(rs's'')(s's''u) \qquad \text{(Product aus den beiden Schnittp. und dem Pol von } r\text{)}$$

$$\Delta = \frac{4}{27}\,r^3 - \frac{1}{9}\,f.(rss')^2.$$

Die letzte Formel zeigt, dass alle Wendepunkte von f auf r liegen; ich will die Invariante:

$$(rss')^2 = i$$

durch i bezeichnen; dann wird:

$$\Delta = \frac{4}{27} r^3 - \frac{1}{9} if$$

$$S = \frac{2}{27} i^2$$

$$T_f = -\frac{2}{81} i(rsu)^2 . (rs's'')\,(s's''u)$$

$$T = -\frac{2}{243} i^3$$

$\Phi = -12(rsu)^2 . (rs'u)^2 . (s''s'''u)^2$ (Quadrat des Productes beider Schnittpunkte multiplicirt in die Gleichung des Kegelschnittes in Liniencoordinaten.)

Durch Combination dieser Ausdrücke findet man die Gleichung

$$ST_f - TS_f = 0$$

als Bedingung dafür, dass f zwei Doppelpunkte besitzt, eine Relation, welche man übrigens aus den von Herrn Aronhold gegebenen Formeln unmittelbar schliessen kann. Zur Bestimmung der Gleichung der Geraden $r = 0$ kann man sich der Formel bedienen:

$$-Tf + S\Delta = \frac{8}{729} i^2 r^3.$$

Durch Division von r in f erhält man schliesslich die Gleichung des Kegelschnittes s.

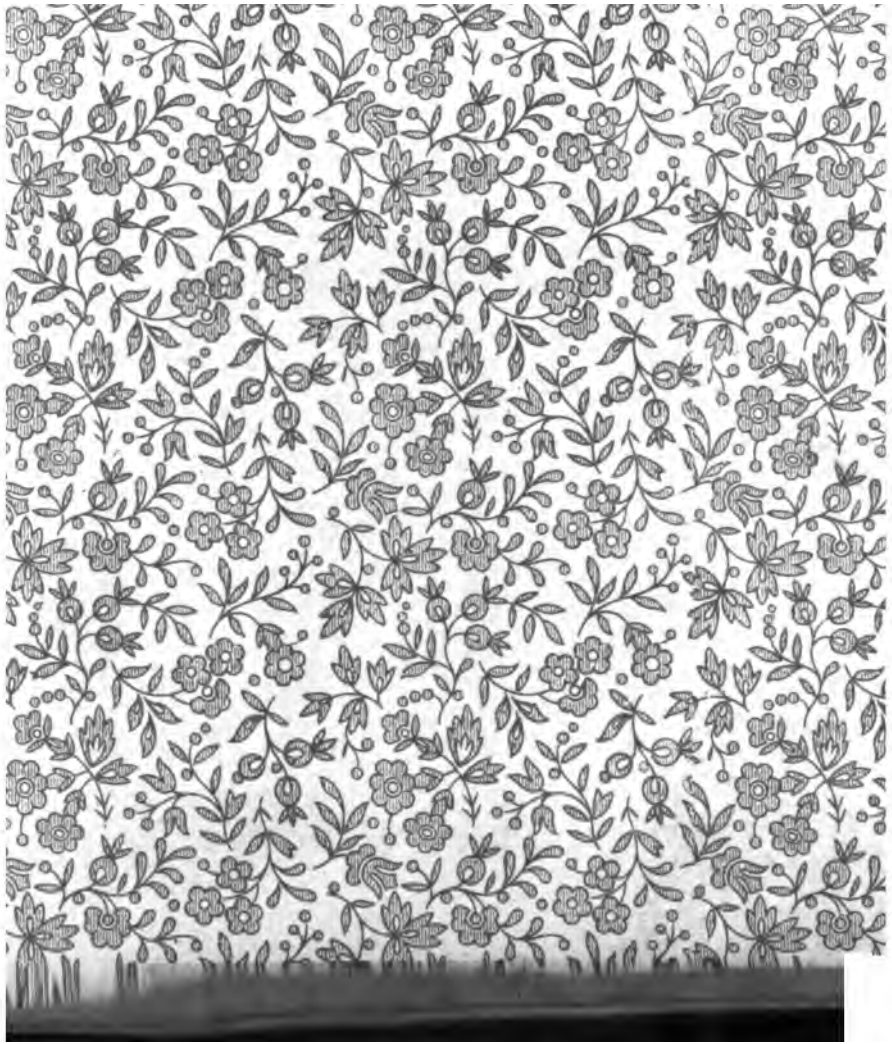
Giessen, im Januar 1871.

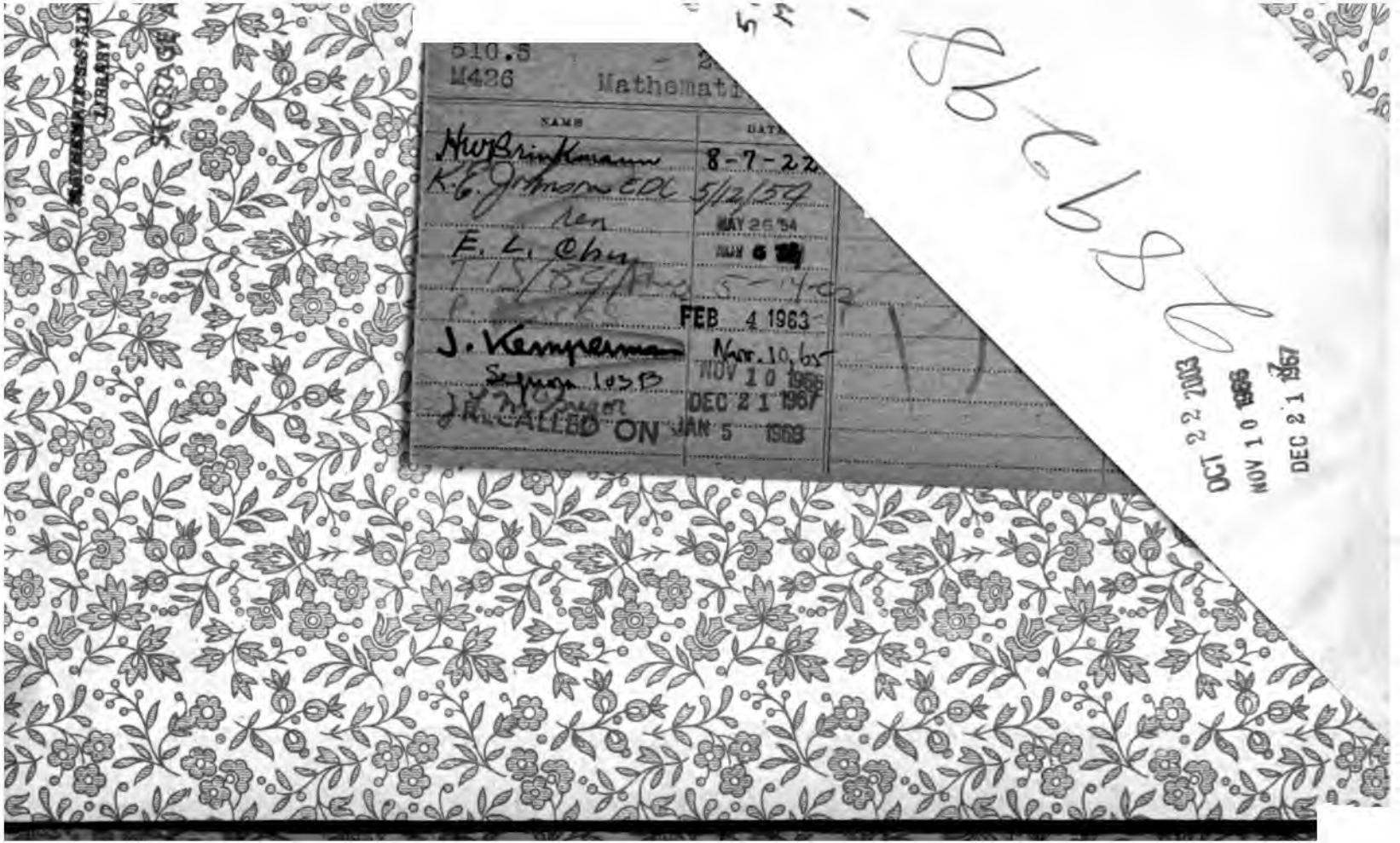
Verbesserungen.

Seite 129, Zeile 5 v. oben für s setze s_1 (viermal).
„ „ „ 11 v. „ „ C setze P.
„ „ „ 20 v. „ „ 2 setze I. 2.
„ „ „ 21 v. unten „ S_1 setze S_2.
„ „ „ 10 v. „ „ c_1 setze c_3.
Seite 150, Zeile 7 v. „ statt *LII* liess: *LXX*.
„ 159, „ 10 v. oben statt

$$\int_0^{\infty} e^{-zx^2} \sin 0\,x . x^{a-1}\,dx \text{ liess: } \int_0^{x} e^{-zx} \sin 0\,x . x^{a-1}\,dx.$$

Seite 496, Zeile 2 v. oben statt „Doppelpaaren" liess: „Doppelgeraden".




510.8
M426
NAME
DATE
8-7-22
5/12/54
MAY 26 '54
FEB 4 1963
Nov. 10, 63
NOV 10 1966
DEC 21 1967
JAN 5 1968
CALLED ON
OCT 22 2003
NOV 10 1965
DEC 21 1967